第3章　积分及其应用

在前面两章中我们已经讨论了一元函数的微分学，本章我们将研究与微分学相反的问题，即积分学问题。一元函数的积分学有两个基本概念——不定积分和定积分。本章主要介绍不定积分和定积分的概念、性质和计算方法以及它们的应用问题。

【学习目标】

【知识目标】

- 理解原函数、不定积分、定积分的概念。
- 熟练掌握不定积分的基本公式和性质。
- 熟练掌握换元积分法和分部积分法。
- 熟练掌握牛顿-莱布尼兹公式。
- 理解定积分的元素法思想。

【能力目标】

- 能熟练运用直接积分法和牛顿-莱布尼兹公式。
- 能利用换元积分法求不定积分和定积分。
- 能利用分部积分公式求不定积分和定积分。
- 能熟练运用积分知识解决实际问题。

【本章重点】

- 积分的基本公式和性质。
- 换元积分法和分部积分法。

3.1　不定积分

3.1.1　原函数与不定积分的概念

定义3.1　函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在可导函数 $F(x)$，使

$$F'(x)=f(x) \quad \text{或} \quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x \quad (x\in I)$$

称 $F(x)$是函数 $f(x)$在区间 I 上的一个**原函数**。

例如，因为$(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数；因为$(x^2+1)'=2x$，所以 x^2+1 是 $2x$ 的一个原函数。

我们知道，一个可微函数的导数只有一个，那么当一个函数具有原函数时，它的原函数是否也只有一个呢？由于$(x^2+1)'=2x$，$(x^2+2)'=2x$，$(x^2-\sqrt{3})'=2x$，$\cdots$，$(x^2+C)'=2x$（C 是任意常数），所以 x^2+1、x^2+2、$x^2-\sqrt{3}$、$\cdots$、x^2+C 都是 $2x$ 的原函数，可见 $2x$ 的原函数不止一个，而是有无穷多个，且其中任意两个原函数之间只相差一个常数。这样，我们得到下面的定理。

定理 3.1　若函数 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $F(x)+C$（C 是任意常数）是 $f(x)$的全部原函数，且其任意两个原函数之间仅相差一个常数。

在前面的讨论中，我们都假定 $f(x)$有原函数，那么函数 $f(x)$应具备什么条件，才能保证它有原函数呢？下面给出一个结论。

定理 3.2（原函数存在定理）　如果函数 $f(x)$在区间 I 上连续，则函数 $f(x)$在该区间上一定存在原函数。

简单地说，连续函数必有原函数，由于初等函数在其定义区间上都是连续函数，所以初等函数在其定义区间上都有原函数。

定义 3.2　如果函数 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数，则称 $f(x)$的全部原函数 $F(x)+C$（C 是任意常数）为 $f(x)$在区间 I 上的**不定积分**，记作$\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中“$\int$”称为**积分号**，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，C 称为**积分常数**。

求不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 就是求被积函数 $f(x)$的全部原函数。为此，只需求得 $f(x)$的一个原函数 $F(x)$，然后再加上任意常数 C 即可。

【例 3-1】　求$\int x^2\mathrm{d}x$。

解： 因为$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，所以$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$。

【例 3-2】　求$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

解： 因为$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，所以$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$。

【例 3-3】　求$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解： 当 $x>0$ 时，由$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，有$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$。

当 $x<0$ 时，由$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$，有$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C$。

综上所述得 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$。

【例 3-4】 设曲线通过点(1,2)，且其上任意一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程。

解：设所求曲线方程为 $y=f(x)$，由导数的几何意义，据题设曲线上任一点(x,y)处的切线斜率为 $y'=2x$，所以

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$$

又由于所求曲线经过点(1,2)，故有 $2=1+C$，得 $C=1$。因此所求曲线方程为

$$y=x^2+1$$

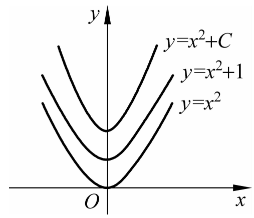

图　3-1

从几何上看，$y=x^2+C$ 的图形可由曲线 $y=x^2$ 的图形沿 y 轴平移$|C|$个单位得到，所以 $y=x^2+C$ 表示一族抛物线，而 $y=x^2+1$ 则是这族曲线中通过点(1,2)的那一条，如图 3-1 所示。

一般的，若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，$f(x)$的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 在几何上就表示一族曲线，称为 $f(x)$的积分曲线族，如图 3-2 所示。在这族曲线上任一点 x 处切线的斜率都等于 $f(x)$，而且任意两条积分曲线沿 y 轴方向只差一个积分常数，所以任一条积分曲线都可以由另一条积分曲线沿 y 轴方向平移而得到，这就是**不定积分的几何意义**。

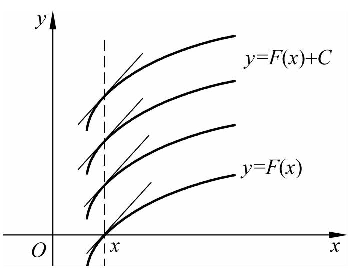

图　3-2

【案例 3-1　结冰厚度】 若池塘结冰的速度由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k\sqrt{t}$ 给出，其中 y(单位：cm)是自结冰起到时刻 t(单位：h)冰的厚度，k 是正常数。求结冰厚度 y 关于时间 t 的函数。

解：由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k\sqrt{t}$，求不定积分，得

$$y(t)=\int k\sqrt{t}\mathrm{d}t=k\int\sqrt{t}\mathrm{d}t=k\,\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

由于 $\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)'=\sqrt{t}$

由于 $t=0$ 时池塘开始结冰，此时冰的厚度为 0，即有 $y(0)=0$，代入上式，得 $C=0$，所以有

$$y(t)=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

3.1.2　不定积分的性质

由不定积分的定义，可得到不定积分的下述性质。

性质 1　积分与微分的互逆运算性质，即

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$

此性质表明，不定积分的导数（或微分）等于被积函数（或被积表达式），而函数的导数（或微分）的不定积分等于全部原函数。

性质 2　被积函数中不为零的常数因子可提到积分号外面，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{ 为非零常数})$$

性质 3　两个函数代数和的不定积分等于两个函数不定积分的代数和，即

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x$$

性质 2、性质 3 还可以推广到有限个函数代数和的形式，即

$$\begin{aligned}&\int [k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) \pm \cdots \pm k_n f_n(x)]\mathrm{d}x \\ =&k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x \pm k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm k_n\int f_n(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3.1.3　基本积分公式

由于求不定积分的运算是求导数运算的逆运算，所以由导数的基本公式相应地可以得到积分的基本公式如下：

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 是常数)

(2) $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$，α 是常数)

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

(4) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0$，$a \neq 1$)

(5) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

(7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \tan x \sec x \mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \cot x \csc x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

(13) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

以上 13 个公式称为**基本积分公式**,它们是求不定积分的基础,必须熟记。

实训 3.1

A(基础训练)

1. 填空题。

(1) 函数 x^2 的原函数是________。

(2) 函数 $\sin x$ 是函数________的原函数。

(3) 已知 $f'(x) = g(x)$,则$\int g(x)\mathrm{d}x =$ ________。

(4) $\mathrm{d}\int \arctan x \mathrm{d}x =$ ________。

(5) $\int \mathrm{d}\ln x =$ ________。

2. 求过点(1,2),且在任一点处的切线斜率为 $3x^2$ 的曲线方程。

B(能力提高训练)

1. 填空题。

(1) 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $4x^3$,则$\int f(x)\mathrm{d}x =$ ________。

(2) 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $4x^3$,则 $f(x) =$ ________。

(3) 已知$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin^2 x + C$,则 $f(x) =$ ________。

(4) 已知$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = \ln x$,则 $f(x) =$ ________。

2. 设某函数当 $x=1$ 时有极小值，当 $x=-1$ 时有极大值为 4，又知道这个函数的导数具有形状 $y'=3x^2+bx+C$，求此函数。

3.2　积　分　法

在不定积分的定义、性质以及基本公式的基础上，我们进一步讨论不定积分的有关计算问题。不定积分的计算方法主要有三种：直接积分法、换元积分法和分部积分法。

3.2.1　直接积分法

利用不定积分的性质和基本公式，结合适当的代数或三角恒等变形，可以求一些简单函数的不定积分，这样的积分方法叫做**直接积分法**。

【例 3-5】　求$\int(4x^3-2x^2+5x+3)\mathrm{d}x$。

解：$\int(4x^3-2x^2+5x+3)\mathrm{d}x$

$$=\int 4x^3\mathrm{d}x-\int 2x^2\mathrm{d}x+\int 5x\mathrm{d}x+\int 3\mathrm{d}x$$

$$=4\int x^3\mathrm{d}x-2\int x^2\mathrm{d}x+5\int x\mathrm{d}x+3\int \mathrm{d}x$$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C$$

$$=x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C$$

注意：

(1) 求函数的不定积分时积分常数 C 不能丢掉，否则就会出现概念性的错误。

(2) 等式右端的每个不定积分都有一个积分常数，因为有限个任意常数的代数和仍是一个常数，所以只要在结果中写一个积分常数 C 即可。

(3) 检验积分计算是否正确，只需对积分结果求导，看它是否等于被积函数。若相等，积分结果是正确的，否则就是错误的。

【例 3-6】　求$\int\sqrt{x}\,(x-1)^2\mathrm{d}x$。

解：$\int\sqrt{x}\,(x-1)^2\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}(x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x$

$$=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-2\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

【例 3-7】 求$\int \frac{3x^2-2x+1}{x^2}\mathrm{d}x$。

解：
$$\int \frac{3x^2-2x+1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=3\int \mathrm{d}x-2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=3x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

【例 3-8】 求$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解：在积分基本公式中没有这种类型的积分公式，我们可以先把被积函数做恒等变形，再逐项求积分。
$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int \mathrm{d}x-\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$$

【例 3-9】 求$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$。

解：
$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\arctan x-\frac{1}{x}+C$$

【例 3-10】 求$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$。

解：先利用三角恒等式进行变形，然后求积分。
$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \mathrm{d}x=\tan x-x+C$$

【例 3-11】 求$\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$。

解：
$$\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int \frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x-\int \cos x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$$

3.2.2 换元积分法

虽然利用直接积分法可以求一些函数的不定积分，但利用它所能计算的不定积分是非常有限的。因此，有必要进一步研究不定积分的求法。根据积分与微分的互逆运算关系，如果复合函数的求导法则反过来用于求不定积分，那么得到的一种基本积分方法叫换元积分法。

换元积分法有两类：第一类换元积分法和第二类换元积分法。

1. 第一类换元积分法

先分析下面的积分。

【例 3-12】 求 $\int \cos 2x \mathrm{d}x$。

分析：计算不定积分 $\int \cos 2x \mathrm{d}x$，若直接用基本积分公式 $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$，所求答案为 $\sin 2x + C$。显然这个结果是错误的，因为 $(\sin 2x + C)' = 2\cos 2x$，就是说 $\sin 2x$ 不是 $\cos 2x$ 的一个原函数。事实上，因为 $\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$，所以 $\int \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$。出现错误结果的原因在于，被积函数 $\cos 2x$ 与公式 $\int \cos x \mathrm{d}x$ 中的被积函数不一样，$\cos 2x$ 是复合函数，因此计算时应将原积分作变形处理。

解：把原积分作下列变形后计算

$$
\begin{aligned}
\int \cos 2x \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}(2x) \\
&\xlongequal{\text{令 } 2x = u} \frac{1}{2}\int \cos u \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\sin u + C \\
&\xlongequal{\text{回代 } u = 2x} \frac{1}{2}\sin 2x + C
\end{aligned}
$$

上例解法中，通过引入新变量 $u = \varphi(x) = 2x$，从而把原积分化为关于 u 的一个简单积分，再用基本积分公式求解。现在的问题是，在公式 $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$ 中，如果将 x 换成了 $u = \varphi(x)$，对应得到公式 $\int \cos u \mathrm{d}u = \sin u + C$ 是否成立？回答是肯定的。请看下面的定理。

定理 3.3　如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$$

其中，$u = \varphi(x)$ 是 x 的任意可微函数。

证明：由于 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，所以 $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$，根据微分形式的不变性，则有

$$\mathrm{d}F(u) = f(u)\mathrm{d}u$$

其中，$u = \varphi(x)$ 是 x 的可微函数。所以有

$$\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u) + C$$

该定理告诉我们：求不定积分时，如果被积函数可以整理成 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$，并且 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{凑微分}} \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$\xlongequal{\text{换元 } \varphi(x)=u} \int f(u)\mathrm{d}u$$

$$= F(u) + C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } u=\varphi(x)} F[\varphi(x)] + C \tag{3-1}$$

这种先"凑"微分式，再作变量置换的方法，称为**第一类换元积分法**，也称**凑微分法**。式(3-1)称为**第一类换元积分公式**。定理 3.3 表明将基本积分公式中的积分变量换成任一可微函数，公式仍成立，这就大大扩充了基本积分公式的使用范围。

【例 3-13】 求$\int (5x+8)^3\mathrm{d}x$。

解： 基本积分公式中有$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$

$$\int (5x+8)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int (5x+8)^3\mathrm{d}(5x+8)$$

$$\xlongequal{\text{令 } 5x+8=u} \frac{1}{5}\int u^3\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{20}u^4 + C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } u=5x+8} \frac{1}{20}(5x+8)^4 + C$$

【例 3-14】 求$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$。

解： 因为 $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2)$

所以

$$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2$$

$$\xlongequal{\text{令 } x^2=u} \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } u=x} \mathrm{e}^{x^2} + C$$

【例 3-15】 求$\int \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$。

解： 因为 $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln x$

所以

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}\ln x$$

$$\xlongequal{\text{令 } \ln x=u} \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } =\ln x} \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

由上面例题可以看出，用第一类换元积分法计算积分时，关键是把被积表达式凑成两部分，其中一部分为 $\varphi(x)$ 的函数 $F[\varphi(x)]$，而另一部分凑成 $\mathrm{d}\varphi(x)$ 的形式，在凑微分时，常用到下列微分式子，熟记它们有助于求不定积分。

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)\ (a \neq 0, a、b \text{ 为常数})$$

$$x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\sqrt{x})$$

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arctan x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arcsin x$$

$$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\cos x)$$

$$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$$

$$\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$$

$$\csc^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\cot x)$$

$$\sec x\tan x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sec x$$

$$\csc x\cot x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\csc x)$$

凑微分的式子绝非只有这些，要根据具体问题具体分析，读者应在熟记基本积分公式和一些常用微分式子的基础上，通过大量的练习才能逐步较好地掌握这一重要积分方法。

【例 3-16】 求 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解： $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \arctan x\mathrm{d}\arctan x$

$$\xlongequal{\text{令 } \arctan x = u} \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } u = \arctan x} \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

当运算比较熟练后，设变量代换及回代这两个过程可以省略不写。

2. 第二类换元积分法

第一类换元积分法的使用范围极为广泛，但对于某些无理函数的积分，则需应用第二