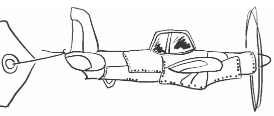
第1章



行　列　式

解方程及方程组是代数中的一个基本问题.在中学所学代数中,我们解过一元、二元、三元以至四元一次方程组,而对于一般的多元一次方程组,即线性方程组,它的解法是线性代数中需要解决的问题.本章和下一章所介绍的行列式和矩阵的定义及其运算,为第 3 章给出 n 元线性方程组的具体解法做好铺垫,这也是整本书的基础,是学好线性代数这门课程的关键.本章我们将从二阶、三阶行列式出发,进而给出 n 阶行列式的定义、性质及运算方法,最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

在中学代数课中学过,用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 和 b_1, b_2 均为常数,x_1, x_2 为未知量.当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,二元线性方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

式(1.2)中的分子、分母均为四个数分两对相乘再相减而得.其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的四个系数确定的.从形式上看,分母的表达式不利于记忆.为了方便,引入记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,并规定

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

称式(1.3)定义的 D 为**二阶行列式**,数 a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式 D 的**元素**或**元**,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**,第二个下标 j 称为**列标**,表明元素位于行列式的第 i 行第 j 列.在二阶行列式中,称左上角到右下角的连线为主对角线,左下角到右上角的连线为副对角线.式(1.3)的二阶行列式的定义可由**对角线法则**来记忆:如图 1.1 所示,二阶行列式的展

开式含 2!=2 项,它是一个数,数值等于主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的定义,式(1.2)中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1.1

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

那么当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,二元线性方程组(1.1)的解可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式),x_i 的分子 D_i 是用常数项 b_1,b_2 替换系数行列式 D 的第 i 列所得的二阶行列式($i=1,2$).

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1+2x_2=4. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=10-4=6,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=8-5=3,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{6}{3}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{3}=1.$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1.1 设有 3^2 个数排成 3 行 3 列,记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.4}$$

称上式定义的 D 为**三阶行列式**.

类似地,三阶行列式的定义也可由**对角线法则**来记忆:三阶行列式的展开式含 3!=6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律如图 1.2 所示,三条实线看作是平行于主对角线的连线,实线上三个元素乘积冠以正号;三条虚线看作是平行于副对角线的连线,虚线上三个元素乘积冠以负号.

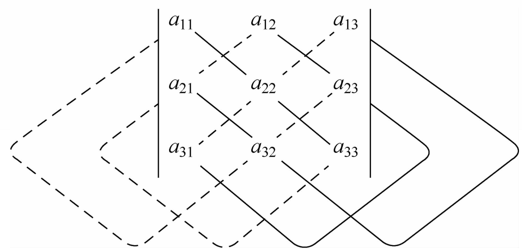


图　1.2

例 1.2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

解　由对角线法则得

$$\begin{aligned} D= & 3\times(-1)\times 6+(-2)\times(-3)\times(-5)+5\times 4\times 4 \\ & -5\times(-1)\times(-5)-(-2)\times 4\times 6-3\times(-3)\times 4 \\ = & -18-30+80-25+48+36=91. \end{aligned}$$

类似于用二阶行列式解二元线性方程组的方法，我们也可利用三阶行列式求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，将 D 的第一列、第二列与第三列分别用线性方程组的右端项替换，得到

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则三元线性方程组(1.5)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

例 1.3　在某交通运输中，从 P 点出发，依次经过 A,B,C 三点. 由于每段路的路况及承载量不同，故每段的单位运输成本难以确定. 现通过 3 次测试所得总成本如下：

路　程	承载量/吨			总成本/万元
	$P\to A$	$A\to B$	$B\to C$	
测试一	2	1	0	4
测试二	3	2	1	10
测试三	4	3	1	13

试求每段路程的单位运输成本(即每吨的运输成本).

解　由题意,设每段的单位运输成本分别为 x_1,x_2,x_3,可得三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2=4,\\3x_1+2x_2+x_3=10,\\4x_1+3x_2+x_3=13,\end{cases}$$

其系数行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&0\\3&2&1\\4&3&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}4&1&0\\10&2&1\\13&3&1\end{vmatrix}=-1,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&4&0\\3&10&1\\4&13&1\end{vmatrix}=-2,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&1&4\\3&2&10\\4&3&13\end{vmatrix}=-3,$$

因此每段路程的单位运输成本分别为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,x_2=\dfrac{D_2}{D}=2,x_3=\dfrac{D_3}{D}=3.$

通过上述例题我们可以看到,运用对角线法则计算二阶、三阶行列式,做法是非常清晰的.但值得注意的是,对角线法则仅适用于二阶、三阶行列式,为计算四阶及四阶以上的行列式,在下一节将介绍全排列的定义,然后给出 n 阶行列式的定义和计算方法.

1.2　全排列与逆序数

定义 1.2　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级**全排列**,简称**排列**.

例如,2314 是一个四级排列,42531 是一个五级排列.我们知道,n 级排列的总数是 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1=n!$,通常用 P_n 表示.例如四级排列的总数 $P_4=4!=24$,且 P_n 随着 n 的增大迅速地增大.

显然 $123\cdots n$ 是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,即 n 个自然数是按照递增的顺序排列起来的;其他的排列都或多或少地破坏了自然顺序.

定义 1.3　在一个排列中,如有某两个数的前后顺序与自然顺序不同,那么这两个数就有一个**逆序**,一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

我们可以利用下面的方法讨论一个排列的逆序数.

一般地,设 n 个自然数的排列 $p_1p_2\cdots p_n$,从第一个元素 p_1 开始,如果比 p_1 小的且排在 p_1 后面的元素有 t_1 个,就说 p_1 的逆序数为 t_1;依此类推,直到最后一个元素 p_n 的逆序数 t_n.全体元素的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

即为这个排列的逆序数.

例 1.4　求排列 42531 的逆序数.

解　在排列 42531 中:

第一个元素 4,排在 4 后且比 4 小的数有 2、3、1,故有 3 个逆序;

第二个元素 2,排在 2 后且比 2 小的数有 1,故有 1 个逆序;

第三个元素 5,排在 5 后且比 5 小的数有 3、1,故有 2 个逆序;

第四个元素 3，排在 3 后且比 3 小的数有 1，故有 1 个逆序；

第五个元素 1 排在末位，故逆序为 0.

于是这个排列的逆序数为 $3+1+2+1+0=7$.

定义 1.4　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如排列 42531 为奇排列，而排列 2314 为偶排列.

定义 1.5　在排列中任意互换两个元素的位置，其余元素不动，称为一次**对换**.

定理 1.1　一个排列经过一次对换，其奇偶性发生改变，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证明　先考虑特殊情况，即相邻两个数对换. 设排列为

$$\cdots k\ j \cdots,$$

经相邻两数 k 和 j 对换后，变成排列

$$\cdots j\ k \cdots,$$

这里"…"表示除 k 和 j 以外，排列中的其他元素，它们在对换前后位置保持不变. 显然，在原排列中，若 k 和 j 为自然顺序，那么对换后两数构成一个逆序，排列的逆序数增加 1；若 k 和 j 为逆序，那么对换后两数成为自然顺序，排列的逆序数减少 1. 故相邻两数对换改变排列的逆序数.

再考虑一般情况. 设对换的两数 k 和 j 之间有 s 个数($s>0$)，即排列为

$$\cdots k\ t_1\ t_2 \cdots t_s\ j \cdots,$$

对换 k 和 j 后得到新的排列

$$\cdots j\ t_1\ t_2 \cdots t_s\ k \cdots,$$

可以看做排列 $\cdots k\ t_1\ t_2 \cdots t_s\ j \cdots$ 中元素 k 依次与 $t_1, t_2, \cdots, t_s, j$ 做对换，得到排列

$$\cdots t_1\ t_2 \cdots t_s\ j\ k \cdots,$$

再将元素 j 依次与 $t_s, t_{s-1}, \cdots, t_2, t_1$ 做对换所得，共做了 $s+1+s=2s+1$ 次相邻元素对换，由证明前半部分的讨论，排列的奇偶性发生了改变. 证毕.

如例 1.4 中，排列 42531 的逆序数为 7，是一个奇排列，对换元素 2 和 3 的位置，得到排列 43521，逆序数为 8，是一个偶排列.

1.3　n 阶行列式

1.3.1　n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的一般定义之前，我们从特殊出发，寻找是否有可以遵循的规律. 回忆 1.1 节中给出的二阶、三阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

通过定义可以发现一些特征：一方面，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积是由行列式中位于不同行不同列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成. 当 $n=2$ 时，由不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$ 两项，当 $n=3$ 时，由不同行不同列的元素构成的乘积，就是三阶行列式定义中等号右边给出的六项. 另一方面，每一项乘积都带有符号，例如三阶行列式展开式中的一项 $a_{12}a_{21}a_{33}$ 带有"－"号，这个符号怎样确定呢？我们发现，$a_{12}a_{21}a_{33}$ 一项中位于不同行不同列的元素，行标构成排列 123 为自然顺序排列，逆序数为 0，而列标构成排列 213，逆序数为 1. 因此我们看出，在行标满足自然顺序排列的情况下，$a_{12}a_{21}a_{33}$ 一项的符号与列标排列的奇偶性对应，213 为奇排列，故 $a_{12}a_{21}a_{33}$ 项带有"－"号. 又如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 项的列标排列 312 是偶排列，故该项带有"＋"号. 二阶行列式显然也符合这个原则.

因此，三阶行列式的定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 τ 为列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，3 的所有排列求和. 由此，我们可以进一步推广，得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.6　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为所有取自于不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

的代数和，每一项前面带有正负号，式(1.7)所带正负号由列标排列 $j_1\ j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性确定，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.8}$$

其中 τ 为列标排列 $j_1\ j_2 \cdots j_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对所有 n 阶排列求和. n 阶行列式也简记为 $\det(a_{ij})$，其中元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行第 j 列，也称 a_{ij} 为 (i,j) 元.

类似地，若将位于不同行不同列的元素按照列标排成自然顺序排列，即 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$，那么 n 阶行列式的定义也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{1.9}$$

其中 τ 为行标排列 $i_1\ i_2 \cdots\ i_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对所有 n 阶排列求和.

定义表明，为了计算 n 阶行列式，首先做所有可能由位于不同行不同列元素的乘积. 把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序，然后由列标所成的排列的奇偶性来决定这一项的正负号. 最后，将所有乘积项做代数和. 然而，对于 n 阶行列式，位于不同行不同列元素的乘积共有 $n!$ 个，随着 n 的增大，项数会迅速增加，利用定义计算行列式实际上是相当麻烦的，因此我们需要更简便的计算方法.

首先，通过下面的例子，介绍几种特殊的行列式以及它们的计算方法.

例 1.5　一阶行列式 $D=|a_{11}|=a_{11}$.

例 1.6　证明对角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明　对角行列式的特点：元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 位于行列式的主对角线上，主对角线以外的元素全都为 0，即当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由 n 阶行列式的定义，设 $(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是展开式中的一项，其中 τ 为列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 要使得该项不等于 0，第一行只能取元素 a_{11}，第二行只能取元素 a_{22}，依此类推，第 n 行只能取元素 a_{nn}，因此该项为 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，而列标排列 $12\cdots n$ 为自然排列，逆序数为 0，该项取“＋”号，所以命题成立. 证毕.

例 1.7　证明上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明　上三角行列式的特点：元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 位于行列式的主对角线上，主对角线上方元素不全为 0，主对角线下方元素全都为 0，即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由 n 阶行列式的定义，设 $(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是展开式中的一项，其中 τ 为列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 要使得该项不等于 0，从最后一项开始，第 n 行只能取元素 a_{nn}，第 $n-1$ 行要取与 a_{nn} 不同行不同列的元素，因此第 $n-1$ 行只能取元素 $a_{n-1,n-1}$，依此类推，第一行只能取元素 a_{11}，因此该项为 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，而列标排列 $12\cdots n$ 为自然排列，逆序数为 0，该项取“＋”号，所以命题成立. 证毕.

同理，下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 1.8　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　由定义 1.6，按行顺序取位于不同行不同列非零元素乘积

$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=4\times3\times2\times1=24,$$

该项的列标排列 4321 的逆序数为 $3+2+1=6$，带“＋”号. 除该项外，其余乘积项全都为 0，

所以 $D=24$.

1.3.2 行列式的初等变换

由例 1.7 可以看到，n 阶上三角行列式等于主对角线元素的乘积. 于是，我们可以将任意 n 阶行列式转化为上三角行列式，这里用到的方法就是做行列式的初等变换.

定理 1.2 （第一类行初等变换）交换行列式的两行，行列式变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 设行列式 D'是互换行列式 D 中的第 i 行和第 j 行所得的行列式，记 s 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，t 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数. 因为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 是由排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 做了一次对换得到的，所以两个排列的奇偶性不同，故 $(-1)^s=-(-1)^t$. 于是由定义

$$\begin{aligned} D' &= \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum (-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

证毕.

通常，以 r_i 表示行列式的第 i 行，用 $r_i\leftrightarrow r_j$ 表示互换行列式的第 i 行和第 j 行.

推论 1.1 行列式中任意两行元素对应相等，则行列式为 0.

证明 设行列式 D 中第 i 行和第 j 行元素对应相等，互换两行后得到的行列式仍为 D，而由定理 1.2，互换两行后行列式变号，即 $D=-D$，所以 $D=0$. 证毕.

定理 1.3 （第二类行初等变换）行列式中某一行的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面，或者说以一常数乘行列式某行的所有元素等于用这个数乘以行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 设行列式 D'的第 i 行有公因子 k，则

$$\begin{aligned} D' &= \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} = kD. \end{aligned}$$

证毕.

通常，用 $r_i \div k$ 表示行列式的第 i 行所有元素同时提出公因子 k.

推论 1.2　行列式中某两行元素对应成比例，则行列式为 0.

证明　设行列式 D' 中第 j 行元素是第 i 行元素的 k 倍，由定理 1.2，第 j 行提出公因子 k 后，所得行列式为 D，有 $D'=kD$. 而 D 的第 i 行和第 j 行元素对应相等，由定理 1.2 的推论知 $D=0$，于是 $D'=0$. 证毕.

推论 1.3　行列式中某一行均为零元素，则此行列式为 0.

证明　在推论 1.2 中取 $k=0$ 即得. 证毕.

定理 1.4(第三类行初等变换)　行列式某一行的常数倍加到另一行，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　由定义 1.6 和定理 1.3 及定理 1.3 的推论 1.2，

$$\begin{aligned} \text{上式右边} &= \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots(ka_{ip_i}+a_{jp_j})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n} + \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \text{左边}. \end{aligned}$$

证毕.

通常，用 $r_j + kr_i$ 表示第 i 行的 k 倍加到第 j 行.

例 1.9　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解　$$D \xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+(-1)r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(-2)\times(-2)\times 4 = 16.$$

行列式的第一、二、三类行初等变换统称为行列式的行初等变换. 如果将行初等变换中的行改为列，对应的有行列式的列初等变换，用 c_i 表示第 i 列，对应地有下列结论：

(1) 交换行列式的两列($c_i \leftrightarrow c_j$)，行列式变号；

(2) 以行列式某列的所有元素同时提出公因子($c_i \div k$)，等于用这个数乘以行列式；

(3) 行列式某一列的常数倍加到另一列($c_j + kc_i$)，行列式不变.

通常在计算行列式时，为了方便起见，行和列的初等变换往往会同时使用.

例 1.10 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&3&3\\3&1&3&3\\3&3&1&3\\3&3&3&1\end{vmatrix}$.

解 观察这个行列式，它的特点是每列元素之和相同，所以先将第一列后的每一列同时加到第一列上，再按照初等变换的方法求解.

$$D\xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}}\begin{vmatrix}10&3&3&3\\10&1&3&3\\10&3&1&3\\10&3&3&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}10&3&3&3\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-80.$$

例 1.11 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点与上例相似，每一行的和均为 $a+(n-1)b$，只不过是将具体的数字改为字母，行列式的阶数推广到 n 阶.

$$D\xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2\\\cdots}}\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a+(n-1)b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\\cdots}}\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

1.3.3 行列式的运算性质

定义 1.7 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

把 D 的行列互换，所得的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$