# 第 1 章 随机事件与概率

客观世界发生的现象一般可以分成两大类：一类是**确定性现象**，另一类是**随机现象**.

确定性现象是指在相同的条件下重复试验，总是出现某一个确定结果的现象；只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的. 例如，上抛的均匀硬币必然下落；作匀速直线运动的物体，如无外力作用，必然保持其匀速直线运动状态；在标准大气压下，加热到 100℃ 的水必然沸腾等，这些现象都是确定性现象.

随机现象是指在相同条件下重复试验，可能发生多种不确定结果的现象；在每次试验之前，哪一个结果发生是无法预言的. 例如，抛一枚均匀硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上；向一目标射击，可能击中，也可能没击中；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同等，这些现象都是随机现象.

表面看来，随机现象似乎无规律可循，就个别试验而言，到底产生哪一种结果是不确定的，但就大量重复试验而言，随机现象必然呈现出一种规律性. 例如，抛一枚均匀硬币，当投掷次数很多时，出现正面和反面的次数几乎各占一半；测量一个长度 $a$，测量几次可能结果各不相同，看不出什么规律性，但测量次数很多时，就会发现各次测量值的大小呈现一种规律性：测量值分布在 $a$ 左右基本呈现对称性，且越靠近 $a$，数值越密集，越远离 $a$，数值越稀少. 像这种通过大量重复试验或观察呈现出来的规律性，称为随机现象的**统计规律性. 概率论与数理统计就是从数量角度研究随机现象统计规律的一门数学学科.**

概率论与数理统计的历史已有 300 多年，最早由法国数学家帕斯卡和费马等就机会游戏中的一些问题的研究建立了概率论的一些基本概念，如事件、概率、数学期望等. 在其后 200 年间，极限定理成了概率论研究的中心课题，这个时期先后作出重要贡献的数学家有伯努利、拉普拉斯、泊松和高斯等. 直到 20 世纪初，由于新的更有力的数学方法的引入，一些古典问题得到较好解决，建立在公理、定义和定理基础上的严格的数学理论才建立起来，使概率论成为一个严谨独立的数学分支.

数理统计以概率论为理论基础，又为概率论应用提供了有力工具. 近几十年来，概率论与数理统计已广泛应用于物理学、生物学、工程技术、保险业、农业、医学、经济学及军事科学等诸多领域，有些还形成了交叉学科. 概率论与数理统计的理论和方法渗入各基础学科、工程技术学科和社会学科已成为近代科学发展的明显特征之一.

## 1.1 随机事件

为了研究随机现象的内在规律性，必然要对客观事物进行观察、测定和实验，统称之为**随机试验**，简称**试验**，并规定概率论里所研究的试验具有下列特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果具多种可能性，而且在试验之前可以明确试验的全部可能结果；

(3) 试验之前不能准确预言该次试验将出现哪一种结果.

### 1. 样本空间

对于一个随机试验，首先关心的是试验全部可能出现的结果，虽然每次试验出现哪一个结果预先不知道. 随机试验的一个可能出现的结果(不能再分解)，称为一个**样本点**，一般用字母 $\omega$ 表示. 可能出现的结果的全体，称为**样本空间**，用 $\Omega$ 表示. 显然，样本空间 $\Omega$ 是全体样本点 $\omega$ 的集合. 在具体问题中，给定样本空间是对随机现象进行数学描述的第一步.

**例 1.1** 投掷一枚硬币，可能出现正面或反面. 记 $\omega_1$ 为"出现正面"、$\omega_2$ 为"出现反面"，则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

**例 1.2** 从甲、乙、丙、丁四人中选出组长和副组长各一名. 以"甲乙"表示"甲被选为组长，乙被选为副组长"，则选举的全部可能结果共有 12 种：$\Omega=\{$甲乙，甲丙，甲丁，乙甲，乙丙，乙丁，丙甲，丙乙，丙丁，丁甲，丁乙，丁丙$\}$.

**例 1.3** 记录某个电话交换台在一段时间内接收到的呼叫次数. 每天这段时间接到的呼叫次数是随机的，如果次数很大，为数学上的方便起见，可以认为呼叫次数没有上限，则样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$是一个无穷集合.

**例 1.4** 考察某人在公共汽车站等候每隔 5min 经过一辆的公共汽车的候车时间，可取 $\Omega=[0,5]$. 这个样本空间是实数轴上的一个区间，其中任意一点都是一个样本点.

### 2. 事件

随机试验中，可能发生也可能不发生的随机试验的结果，称为**随机事件**，简称**事件**. 一般用大写拉丁字母 $A,B,C$ 等表示.

为了说明事件的数学表示方法，再看例 1.2.

从甲、乙、丙、丁四人中选出组长和副组长各一名，则可能出现的结果是：

甲乙， 甲丙， 甲丁， 乙甲， 乙丙， 乙丁

丙甲， 丙乙， 丙丁， 丁甲， 丁乙， 丁丙

在这个问题中，这 12 个样本点是我们关心的事件；但还可以研究另外一些事件，如：$A=\{$甲当选$\}$；$B=\{$甲、乙都当选$\}$；$C=\{$丙当选组长$\}$等.

事件 $A,B,C$ 与前面几个事件的不同之处在于前面 12 个事件由单个样本点构成；而事件 $A,B,C$ 都是由若干个样本点构成的. 例如，事件 $A$ 发生必须且只须下列样本点之一出现：甲乙，甲丙，甲丁，乙甲，丙甲，丁甲. 但它们都是样本空间的某个子集.

我们将**样本空间的某个子集**，称为**事件**；称某事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现. 由一个样本点构成的子集，称为**基本事件**；由多个样本点构成的子集，称为**复合事件**.

样本空间 $\Omega$ 和空集 $\varnothing$ 作为 $\Omega$ 的子集也看作事件. 由于 $\Omega$ 包含所有样本点，而在每次试验中必有 $\Omega$ 中的一个样本点出现，即事件 $\Omega$ 必然发生，所以称 $\Omega$ 为**必然事件**；又因在 $\varnothing$ 中不含任何一个样本点，故在每一次试验中 $\varnothing$ 都不会发生，所以称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件应该说不是随机事件，但为研究方便，将它们作为随机事件的两个极端来处理.

### 3. 事件间的关系及运算

在同一问题中，我们常常需要考察多个事件及其之间的联系. 将事件表示成样本空间的子集，就可方便地运用集合间的关系及运算来讨论事件间的关系及运算. 下面讨论的事件均属于同一个样本空间 $\Omega$.

1）事件的包含与相等

若**事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生**，即属于 $A$ 的样本点都属于 $B$，则称事件 $B$ **包含**事件 $A$. 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 $A$ 与 $B$ **相等**，记作 $A=B$.

2）事件的和

**事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生**，即“$A$ 或 $B$”，这一事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的**和**(并). 它是由属于 $A$ 或 $B$ 的所有样本点构成的集合，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

3）事件的积

**事件 $A$ 与 $B$ 同时发生**，即“$A$ 且 $B$”，这一事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的**积**(交). 它由既属于 $A$ 又属于 $B$ 的所有公共样本点构成，记作 $AB$ 或 $A\cap B$.

事件的和与积可以推广到有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 及可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的情形. $n$ 个事件的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生一个，$n$ 个事件的积 $A_1A_2\cdots A_n$ 表示 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生；可列个事件的和 $A_1+A_2+\cdots$ 与积 $A_1A_2\cdots$ 分别表示一列事件 $A_1,A_2,\cdots$ 至少有一个发生和同时发生.

4）事件的差

**事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生**这个事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的差. 它是由属于 $A$ 但不属于 $B$ 的样本点构成的集合，记作 $A-B$.

5）互不相容事件

如果事件 **$A$ 与 $B$ 不能同时发生**，即 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ **互不相容**（也称**互斥**）. 互不相容事件 $A$ 与 $B$ 没有公共样本点.

如果 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则称这 $n$ 个事件互不相容.

6）对立事件

**事件 $A$ 不发生**这一事件称为事件 $A$ 的对立事件，它由样本空间中所有不属于 $A$ 的样本点构成，记作 $\overline{A}$.

7）完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：

（1）$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n\ \ i\neq j)$；

（2）$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个**完备事件组**. 显然，全部的基本事件构成一个完备事件组；任何事件 $A$ 与 $\overline{A}$ 也构成一个完备事件组.

事件间的关系和运算可用，如图 1.1 所示的图形表示，此图称为**文氏图**.

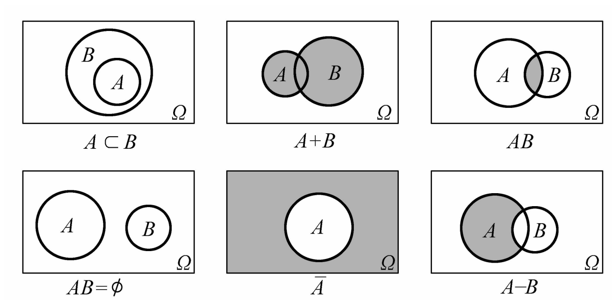


图 1.1

**例 1.5** 一名射手连续向一目标射击 3 次，用事件 $A_i$ 表示该射手第 $i(i=1,2,3)$ 次击中目标. 试用 $A_i$ 表示下列事件：

（1）第 1 次击中而第 2 次未击中目标；

（2）三次都击中目标；

（3）前两次击中目标，第 3 次未击中目标；

（4）后两次射击至少有一次击中目标；

(5) 三次射击中至少有一次击中目标;
(6) 三次射击中恰有两次击中目标;
(7) 三次射击中至少两次击中目标;
(8) 三次射击中至多有一次击中目标;
(9) 三次射击中至多两次击中目标;
(10) 前两次射击至少有一次未击中目标;
(11) 前两次射击都未击中目标.

**解** (1) $A_1-A_2=A_1\overline{A}_2=A_1-A_1A_2$;
(2) $A_1A_2A_3$;
(3) $A_1A_2\overline{A}_3$;
(4) $A_2+A_3$;
(5) $A_1+A_2+A_3$;
(6) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$;
(7) $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$;
(8) $\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或$\overline{A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3}$或 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;
(9) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$ 或$\overline{A_1A_2A_3}$;
(10) $\overline{A}_1+\overline{A}_2=\overline{A_1A_2}$;
(11) $\overline{A}_1\overline{A}_2=\overline{A_1+A_2}$.

关于事件的运算,有下列基本关系式:
(1) $A+B=B+A,AB=BA$; (交换律)
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$; (结合律)
$(AB)C=A(BC)$;
(3) $(A+B)C=AC+BC$; (分配律)
(4) $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$, (对偶律)
$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A}_i,\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A}_i;$$
(5) $\varnothing\subset A\subset\Omega$;
(6) 若 $A\subset B$,则 $A+B=B,AB=A$;
(7) $A+\varnothing=A,A+\Omega=\Omega,A\varnothing=\varnothing,A\Omega=A$;
(8) $A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$;
(9) $\overline{A}=\Omega-A,\overline{\overline{A}}=A,A-B=A\overline{B}$.

**例 1.6** 化简下列各式:
(1) $(A+B)(A+\overline{B})$;

(2) $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3}$.

**解** (1) $(A+B)(A+\overline{B})=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}=A+A(\overline{B}+B)+\varnothing=A$.

(2) $$\begin{aligned}\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3}&=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2}\ \overline{\overline{A}_1\overline{A}_3}\ \overline{\overline{A}_2\overline{A}_3}=(\overline{\overline{A}}_1+\overline{\overline{A}}_2)(\overline{\overline{A}}_1+\overline{\overline{A}}_3)(\overline{\overline{A}}_2+\overline{\overline{A}}_3)\\&=(A_1+A_2)(A_1+A_3)(A_2+A_3)\\&=(A_1+A_1A_3+A_2A_1+A_2A_3)(A_2+A_3)\\&=(A_1+A_2A_3)(A_2+A_3)=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3.\end{aligned}$$

## 1.2 随机事件的概率

一个随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，但通过长期的观察及对问题性质的分析发现，随机事件在一次试验中发生的可能性是有大小之分的，这是一种内在的客观规律性. 随机事件的概率就是用来从数量上描述随机事件出现的可能性大小的一个数量指标. 它是概率论中最基本的概念之一.

### 1. 概率的统计定义

人们对概率的认识可以从直观的大量重复试验中获得.

设随机事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中出现了 $r$ 次，称比值 $r/n$ 为这 $n$ 次试验中事件 $A$ 出现的**频率**. 记作 $f_n(A)=r/n$.

显然，频率具有下列性质：

(1) 对任意事件 $A$，$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 对任意有限个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，有

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

历史上，曾有不少人做过大量投掷硬币的试验，观察“正面向上”这一事件出现的规律. 从表 1.1 的试验记录中可以发现：试验次数较少时频率是不稳定的，当试验次数不断增大时，频率稳定地在数值 0.5 附近摆动.

**表 1.1 投掷硬币的试验结果及频率**

| 实 验 者 | 掷硬币次数/次 | 出现正面次数/次 | 频 率 |
|---|---|---|---|
| 德摩根 | 2048 | 1061 | 0.518 |
| 蒲丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |
| 维尼 | 30000 | 14994 | 0.4998 |

类似的试验还有：人们发现英语中各个字母被使用的频率相对稳定，表 1.2 就是一份统计表. 其他各种文字也都有类似的规律. 在生产生活中也经常遇到同样的例子. 如：下雨时地面各处总是差不多同时淋湿，质量检验中某种产品出现次品的频率及寿命在 60～70 岁的人占总人口的比例等，在观察次数增多时，都可发现对应的频率具有某种稳定性.

**表 1.2　英文中各个字母的使用频率**

| 字母 | 空格 | E | T | O | A | N | I | R | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 频率 | 0.2 | 0.105 | 0.072 | 0.0654 | 0.063 | 0.059 | 0.055 | 0.054 | 0.052 |
| 字母 | H | D | L | C | F | U | M | P | Y |
| 频率 | 0.047 | 0.035 | 0.029 | 0.023 | 0.0225 | 0.0225 | 0.021 | 0.0175 | 0.012 |
| 字母 | W | G | B | V | K | X | J | Q | Z |
| 频率 | 0.012 | 0.011 | 0.0105 | 0.008 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |

试验表明：在相同条件下重复进行某种试验，当试验次数不多时，同一事件出现的频率表现出较大的波动性，但当试验次数增大时，频率在某一确定的数值 $p$ 附近摆动，并逐渐稳定于这个值. 这个频率的稳定值在相同的试验条件下完全由事件自身决定，与试验无关，即它表明了随机事件本身固有的一种客观属性. 可以看出：频率稳定值 $p$ 越大，在一次试验中该事件发生的可能性越大；反之亦然. 我们把这个频率的稳定值作为对事件出现可能性大小的客观度量，称为该事件的**概率**.

**定义 1.1**　在相同条件下重复进行 $n$ 次试验，如果当 $n$ 增大时，事件 $A$ 出现的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 $p$ 附近摆动；且一般说来，$n$ 越大，摆动幅度越小，则称常数 $p$ 为事件 $A$ 的**概率**，记作 $P(A)$.

这一定义称为**概率的统计定义**. 它指出了事件的概率是客观存在的，但并不能用这个定义直接计算概率. 实际中，当概率不易求出时，可以取大量试验的频率作为概率的近似值.

由概率的统计定义，可以推出概率的以下性质：

(1) 对任一事件 $A$，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 对任意有限个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

**2. 概率的古典定义**

在数学上，我们用样本空间、事件和概率来描述一个随机试验. 对一个随机事件，如何

寻求它的概率是概率论的一个基本课题. 我们先讨论一类最简单的随机试验.

**定义 1.2** 具有下列两个特点的随机试验称为**等可能概型**：

(1) 基本事件总数为有限个；

(2) 每个基本事件出现的可能性相同.

等可能概型曾是概率论发展早期的主要研究对象，所以也称**古典概型**. 古典概型是最简单的概率模型，它在实际应用中会涉及许多有趣的问题，而解决这些问题需要很强的技巧性. 古典概型在产品质量抽样检验等方面有广泛的应用.

对于古典概型，有下述概率的古典定义.

**定义 1.3** 设在古典概型中共有 $n$ 个基本事件，$A$ 为包含其中 $m$ 个基本事件的随机事件，则 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

计算古典概型中事件 $A$ 的概率时，必须计算样本空间中的基本事件总数及事件 $A$ 包含的基本事件的个数. 对较简单的情况可以把样本空间中的基本事件一一列出，当 $n$ 较大时，不可能一一列出，需具有分析和想象能力，熟练地运用排列、组合知识.

**例 1.7** 袋中装有 5 个白球，3 个黑球，分别按下述方式抽取两个：(1)无放回依次抽取；(2)有放回抽取；(3)一次任取两个. 设 $A=\{$所取两个球均为白球$\}$，$B=\{$两个球一白一黑$\}$. 求 $P(A)$，$P(B)$.

**解** 因为无论哪一种方式抽取，其基本事件总数都是有限的，并且每一个基本事件出现的可能性相同，所以这是一个古典概型问题.

(1) 无放回抽取

第一次从 8 个球中抽取一个，不再放回，故第二次从 7 只球中抽取一个，因此基本事件总数为 $\mathrm{P}_8^2=8\times7=56$. 对于事件 $A$，因为第一次有 5 个白球供抽取，第二次有 4 个白球供抽取，所以两个球都是白球的事件 $A$ 包含的基本事件数为 $\mathrm{P}_5^2=5\times4=20$，所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_5^2}{\mathrm{P}_8^2}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}.$$

从 5 个白球中任取一个共有 5 种方法，从 3 个黑球中任取一个共有 3 种方法，第一次取得白球第二次取得黑球及第一次取得黑球第二次取得白球构成事件 $B$，共 $\mathrm{P}_5^1\mathrm{P}_3^1+\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_5^1=15+15=30$ 种方法，故

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_5^1\mathrm{P}_3^1+\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_5^1}{\mathrm{P}_8^2}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}.$$

(2) 有放回抽取

由于每次都是从 8 个球中抽取，故基本事件总数为 $8^2=64$. 对于事件 $A$，因为两次都是从 5 个白球中抽取，故构成 $A$ 的基本事件数为 $5^2=25$，因此

$$P(A) = \frac{5^2}{8^2} = \frac{25}{64}.$$

事件 $B$ 包含的基本事件数：第一次取得白球第二次取得黑球有 $5\times3$ 个基本事件，第一次取得黑球第二次取得白球有 $3\times5$ 个基本事件，共 30 个基本事件，故

$$P(B) = \frac{5\times3+3\times5}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}.$$

（3）一次任取两个

因为不考虑次序，将从 8 个球中抽取两个的可能组合作为基本事件，总数为 $C_8^2=28$. 导致事件 $A$ 发生的基本事件为从 5 个白球中任取两个的组合，有 $C_5^2=10$ 个，故

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

导致事件 $B$ 发生的基本事件为从 5 个白球中任取一个，从 3 个黑球中任取一个构成的那些组合，共 $C_5^1C_3^1=5\times3=15$ 个，故

$$P(B) = \frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}.$$

比较(1)、(3)结果可以看到，“两个同时取出”与“无放回地抽取两次，每次一个”，两种抽样方法是等效的.

**例 1.8**　袋中有 $a$ 个黑球及 $b$ 个白球，若随机地把球一个接一个地摸出来，求第 $k$ 次摸出的球是黑球(事件 $A$)的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

**解**　把 $a$ 个黑球及 $b$ 个白球都看作是不同的(比如设想把它们进行编号)，若把摸出的球依次放在排列成一直线的 $a+b$ 个位置上，则可能的排列法相当于把 $a+b$ 个元素进行全排列，将每一种排列作为基本事件，于是基本事件的总数为$(a+b)!$

由于第 $k$ 次摸得黑球有 $a$ 种取法，而另外$(a+b-1)$次摸球相当于 $a+b-1$ 只球进行全排列，所以事件 $A$ 包含的基本事件数为$a\times(a+b-1)!$，因此

$$P(A) = \frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}.$$

这个结果与 $k$ 无关，这与我们的生活经验是一致的. 通常进行的抽签，机会均等，与抽签的先后次序无关.

**例 1.9**　将 3 个小球随机地放入 5 个盒子中去，设每个球落入各个盒子是等可能的. 求下列事件的概率：

（1）前 3 个盒子中各有 1 个球(事件 $A$)；

（2）恰有 3 个盒子中各有 1 个球(事件 $B$)；

（3）第一个盒子中恰有两个球(事件 $C$).

**解**　由于每个小球都等可能性地落入 5 个盒子中的每一个，所以每个小球有 5 种不

同的落法,3个小球落入5个盒子共有$5^3$种不同的落法,且各种落法是等可能的.

(1) 3个小球落入前3个盒子中且每个盒子中各有1个球相当于把3个元素进行全排列,所以事件$A$包含的基本事件数为3!,故

$$P(A)=\frac{3!}{5^3}=\frac{6}{125}.$$

(2) 3个盒子中各有1个球,这里没有指定哪3个盒子,从5个盒子中任选3个盒子的方法共有$C_5^3$种.指定了3个盒子后的情况就是(1).因此$B$包含的基本事件数为$C_5^3 3!$.

$$P(B)=\frac{C_5^3 3!}{5^3}=\frac{12}{25}.$$

(3) 从3个球中任取两个球共有$C_3^2$种方法,指定了的两个球落入一个指定的盒子中只有一种方法,余下的1个球可以随机地落入其余4个盒子中有4种方法,所以事件$C$包含的基本事件数为$C_3^2\times 4$,故

$$P(C)=\frac{C_3^2\times 4}{5^3}=\frac{12}{125}.$$

有许多问题和本例具有相同的数学模型.例如,设有$n$个人,每个人都等可能地被分配到$N$个房间中的任意一间去住($n\leqslant N$),则指定的$n$个房间各有一人住的概率为$\frac{n!}{N^n}$;而恰好有$n$个房间,其中各住一人的概率为$\frac{C_N^n n!}{N^n}$.这个例子常被称为"分房问题".处理这类问题时,要分清什么是"人",什么是"房子",一般不可颠倒.

**例 1.10**　把1,2,3,4,5诸数各写在一张纸片上,任取其中3个排成自左向右的次序.问:

(1) 所得的三位数是偶数的概率;

(2) 所得的三位数不小于200的概率.

**解**　5个数中任取3个,不管怎样排都是三位数.因为123不同于231,故基本事件取作5个元素中任取3个的无重复排列,基本事件总数为$P_5^3=5\times 4\times 3=60$.

(1) 设$A$表示"所得的三位数是偶数",要求个位数在2,4里取,其余两位数在剩下的4个数里取,搭配开来共$C_2^1 P_4^2=24$种取法.故

$$P(A)=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}.$$

(2) 设$B$表示"所得的三位数不小于200",在这种情况下,百位数取2,3,4,5均可,其余两位数在余下的4位数中取,所以$B$包含的基本事件数为$C_4^1 P_4^2=48$,故

$$P(B)=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}.$$