第 1 章 行列式

1.1 说明与要求

本章的重点是行列式的计算，要求在理解 n 阶行列式的概念、掌握行列式性质的基础上，熟练正确地计算三阶、四阶及简单的 n 阶行列式.

计算行列式的基本思路是：按行(列)展开公式，通过降阶来计算. 但在展开之前往往先利用行列式性质通过对行列式的恒等变形，使行列式中出现较多的零和公因式，从而简化计算. 常用的行列式计算方法和技巧有：直接利用定义法、化三角行列式法、降阶法、递推法、数学归纳法和利用已知行列式法.

行列式在本章的应用是求解线性方程组(克莱姆法则). 要掌握克莱姆法则并注意克莱姆法则应用的条件.

1.2 内容提要

1.2.1 排列

1. 基本概念

(1) 排列和逆序

由 n 个数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列或称 n 元排列.

在一个排列中，如果两个数的前后位置与它们的大小次序相反，即排在前面的数比后面的数大，就称这两个数构成一个逆序.

(2) 逆序数

一个排列中逆序的个数称为此排列的逆序数. 用 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数.

排列的逆序数由其中每一个数所引起的逆序个数相加而得到.

(3) 排列的奇偶性

若排列的逆序数是奇数，则称该排列为奇排列；逆序数为偶数，则称之为偶排列.

（4）对换

把一个排列的某两个数的位置相互调换，其余各数不动，得到一个新的排列，这种调换称为一次对换.

2. 有关排列和逆序的几个重要结论

（1）对换改变排列的奇偶性.

（2）在全部的 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半，各为 $n!/2$ 个（$n\geqslant 2$）.

（3）任意一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 经过若干次对换可变为自然顺序排列 $123\cdots n$，且所作的对换次数与排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的奇偶性相同.

1.2.2 行列式

1. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

这里，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. 故行列式等于取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 每一项的正负号取决于组成该项的 n 个元素的列标排列的逆序数（当其行标按自然顺序排列时），即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，取正号，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，取负号. 由于 n 级排列共有 $n!$ 项，所以 n 阶行列式共有 $n!$ 项.

下面是几种特殊的行列式：

（1）上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

（2）下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} a_{n-1,2} \cdots a_{1n}.$$

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶和 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

2. 行列式的性质

性质 1 行列式的行和列互换,其值不变,即行列式 D 与它的转置行列式相等,$D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 用一个数 k 乘以行列式的某一行(列)的各元素,等于该数乘以此行列式.或者说行列式的某一行(列)的公因子可以提到行列式的前面.

推论 1 若行列式的某行(列)的元素全为零,则该行列式等于零.

性质 3 如果行列式中某行(列)中各元素均为两项之和,则这个行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4 交换行列式中任意两行(列)的位置,行列式的正负号改变.

推论 2 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则行列式等于零.

推论 3 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于零.

性质 5 把行列式中某一行(列)的各元素同乘以一个数 k 加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

3. 行列式按某行(列)展开

(1) 余子式

n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划去后剩下的元素按原来的次

序排列而得到的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

(2) 代数余子式

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(3) 行列式按某一行(列)展开

行列式等于它的任一行(列)的所有元素分别与它们所对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

(4) 行列式的任何一行(列)的各元素与另一行(列)的各元素对应的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad (i\neq j),$$
$$a_{1k}A_{1l}+a_{2k}A_{2l}+\cdots+a_{nk}A_{nl}=0\quad (k\neq l).$$

1.2.3　克莱姆法则

1. 非齐次线性方程组

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}\tag{1.1}$$

的系数行列式 $D\neq 0$，那么这个线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},\tag{1.2}$$

其中 D_j 是将系数行列式中的第 j 列的元素(即 x_j 的系数)换成线性方程组中的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 所构成的行列式.

克莱姆法则给出了线性方程组的解与线性方程组的系数及常数项的关系的公式，在理论上和应用上都很重要.

若系数行列式 $D=0$，则不能用克莱姆法则求解. 此时线性方程组可能有解，也可能无解，这需要根据具体情况讨论.

2. 齐次线性方程组

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

的系数行列式 $D\neq 0$,那么齐次线性方程组只有零解.若系数行列式 $D=0$,则齐次线性方程组有非零解.反之亦然.

注 克莱姆法则只能用于线性方程组的个数与未知量个数相等且行列式不等于零的线性方程组,对于线性方程个数与未知量个数不等或未知量个数与线性方程个数相等,但系数行列式等于零的情况,需用另外的方法求解.

1.3 典型例题分析

1.3.1 排列

例 1.1 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots 21$; (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1) 为了找出排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的所有逆序而不遗漏,对此排列的 n 个数从左到右顺序地考察.第一个数 n 后面比它小的数有 $n-1$ 个,共构成 $n-1$ 个逆序,第二个数 $n-1$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个,……,3 后面比它小的数有 2 个,2 后面比它小的数有 1 个,所以

$$N(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

由于$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性需根据 n 而定,故讨论如下:

当 $n=4k$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$是偶数;

当 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$是偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$是奇数;

当 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$是奇数.

综上所述,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,此排列为奇排列,其中 k 为任意非负整数.

(2) 该排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,2n$ 之间也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$N(135\cdots(2n-1)246(2n)) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

小结 求任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数可按如下的方法计算 $N(i_1i_2\cdots i_n)$：用 i_1 后面比 i_1 小的数的个数加上 i_2 后面比 i_2 小的数的个数……加上 i_n 后面比 i_n 小的数的个数. 如 $N(53214)=4+2+1+0=7$.

例 1.2 选择 i,j,k 使 $21i36jk97$ 为偶排列.

解 在排列中可供 i,j,k 选择的数字只有 $4,5,8$，不妨设 $i=4,j=5,k=8$，则

$$N(214365897) = 1+1+1+2 = 5,$$

为奇排列. 由对换两个数字改变排列的奇偶性可知，当 $i=5,j=4,k=8$，或 $i=8,j=5,k=4$，或 $i=4,j=8,k=5$ 时，9 级排列为偶排列.

例 1.3 设 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$ 为 5 阶行列式的一项，取“$-$”号，试确定 i,j.

解 将题给项重新排列变为 $a_{1i}a_{2j}a_{32}a_{45}a_{54}$ 列标排列为 $ij254$，可见 i,j 可取 $1,3$. 不妨设 $i=1,j=3$，则 $N(13254)=1+1=2$，故可知应取 $i=3,j=1$.

例 1.4 有一个 5 阶行列式，其中 $a_{21}a_{32}a_{45}a_{13}a_{54}$ 为其一项，试确定其符号.

解 该项行标排列的逆序数 $N(23415)=3$，该项列标排列的逆序数 $N(12534)=2$. 因为行标与列标排列的逆序数之和 $3+2=5$ 为奇数，故该项取“$-$”号.

例 1.5 写出 4 阶行列式中包含因子 $a_{22}a_{34}$ 的所有项，并确定它们的符号.

解 在 4 阶行列式中，含 $a_{22}a_{34}$ 的一般项为

$$(-1)^{N(p24q)}a_{1p}a_{22}a_{34}a_{4q},$$

这里 p,q 是 $1,3$ 的所有排列，即 13 和 31 两个排列，因此含有 $a_{22}a_{34}$ 的项只有两个，即

$$(-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43},$$

$$(-1)^{N(3241)}a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} = a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}.$$

1.3.2 行列式的计算

计算行列式有以下几种常用的方法.

1. 利用行列式的定义计算行列式

例 1.6 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解 由于行列式中不为零的项只有 $12\cdots(n-1)n$ 这一项，而把这 n 个元素按行下标顺序排列时，列下标的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots21n$，其逆序数 $N((n-1)(n-2)\cdots21n)=(n-1)(n-2)/2$，所以行列式 $D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

例 1.7 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义可知，此行列式的非零项只有两项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$，故

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{N(12\cdots n)}aa\cdots a+(-1)^{N(23\cdots n1)}bb\cdots b$$

$$= a^n+(-1)^{n-1}b^n.$$

例 1.8 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ b_3 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

解 在 D_4 中第一行的非零元素为 $a_{11}=a_1, a_{13}=b_1$，故 $j_1=1,3$；同理由第 2,3,4 行可求得 $j_2=2,4$；$j_3=1,3$；$j_4=2,4$. 因为 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成 4 个四级排列：1234,1432,3214,3412，故 D_4 中相应有 4 个非零项：

$$(-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_1a_2a_3a_4,\quad (-1)^{N(1432)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=-a_1b_2a_3b_4,$$

$$(-1)^{N(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-b_1a_2b_3a_4,\quad (-1)^{N(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=-b_1b_2b_3b_4,$$

于是有

$$D_4=a_1a_2a_3a_4-a_1b_2a_3b_4-b_1a_2b_3a_4+b_1b_2b_3b_4=(a_1a_3-b_1b_3)(a_2a_4-b_2b_4).$$

例 1.9 证明：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0$.

证明 这个行列式的元素满足：

$$a_{3j_3}=0 \quad (\text{当 } j_3=1,2,3 \text{ 时}),$$

$$a_{4j_4}=0\quad(\text{当 } j_4=1,2,3\text{ 时}),$$
$$a_{5j_5}=0\quad(\text{当 } j_5=1,2,3\text{ 时}),$$

而5阶行列式的一般项为$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，只要 j_3,j_4,j_5 中有一个为1，2，3时，对应项便为零. 又因为 $j_3j_4j_5$ 应取1，2，3，4，5中各不相同的3个数，其中必然有1，2，3中的任一个数，因此行列式的一般项必为零，即行列式为零. 证毕.

小结 对于含有零元素较多的行列式，可直接用定义计算，此时只需求出所有非零项即可. 为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，先由第一行的非零元素及位置，写出 j_1 可取的数码；再由第2，3，…，n 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2j_3\cdots j_n$ 可能取的数码；进而求出 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的 n 级排列有多少个，相应地该行列式就含有多少个非零项.

2. 化三角行列式法

化三角行列式法就是把一个行列式经过适当的变换化成三角行列式的形式，从而直接计算出其结果，这是行列式计算中的一个重要方法. 如何将一个行列式化成三角行列式，是否一定要化成三角行列式才能计算，这需要具体问题具体分析.

例 1.10 计算行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}.$$

分析 这个行列式关于主对角线对称，即形如

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

这样的行列式称为对称行列式. 由于各行的元素之和相等，若把各列的元素都加到第1列，则可以提出公因子，使第1列都变成1，然后再化成三角行列式即可求出其值.

解
$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\overline{\overline{\;①+(②+③+④)\;}}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{②-①\\③-①\\④-①}}{=\!=\!=}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[④+②]{③-2\times②} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=160.$$

注 此行列式可以推广到 n 阶. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix},$$

读者可以按上述方法计算,先把行列式的 2 至 n 列都加到第 1 列. 提出公因子 $\frac{n(n-1)}{2}$,第 1 列都变成了 1,然后把第 1 行的(-1)倍加到其他各行. 这样,第 1 列除第 1 行上有非零元素外,其他均为零.

例 1.11 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ x & x+y & y \\ x+y & y & x \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ x & x+y & y \\ x+y & y & x \end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+y & y \\ x+y & y & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[③-(x+y)\times①]{②-x\times①} 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & y-x \\ 0 & -x & -y \end{vmatrix} \xlongequal{③-(x/y)\times②} 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & y-x \\ 0 & 0 & \frac{x}{y}(y-x)-y \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)(xy-x^2-y^2)=-2(x^3+y^3).$$

注 此题若不用上述方法化成三角行列式,而由倒数第二个行列式开始即用三阶行列式计算会更简单,我们所以要用前面方法解,是为了练习化为三角行列式的方法.

例 1.12 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[\substack{③-① \\ ④-①}]{②-①} \begin{vmatrix} 1+x & -x & -x & -x \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[①+\frac{1}{x}\times②-\frac{1}{y}\times③+\frac{1}{y}\times④]{} \begin{vmatrix} x & -x & -x & -x \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

例 1.13 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

解 从第 2 列到第 n 列都加到第 1 列,得

$$D = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

第 1 列乘$(-j)$加到第 j 列$(j=2,\cdots,n)$,得

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n-1)! = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)!}{2}.$$