第 1 章 准备知识

本章为课程的学习做准备，先介绍一些在数学中广泛应用的术语和记号，然后介绍函数的概念及一些常用函数.

1.1 集合与符号

1. 集合

集合这一概念描述如下：一个集合是由确定的一些对象汇集的总体. 组成集合的这些对象被称为集合的**元素**. 通常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素这件事记为 $x \in E$（读作 x 属于 E）；

y 不是集合 E 的元素这件事记为 $y \notin E$（读作 y 不属于 E）.

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，则称 E 是 F 的**子集合**，简称为**子集**，记为

$$E \subset F（读作 E 包含于 F），$$

或者

$$F \supset E（读作 F 包含 E）.$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素（即 $E \subset F$ 并且 $F \subset E$），则称集合 E 与集合 F **相等**，记为

$$E = F.$$

为了方便起见，引入一个不含任何元素的集合——空集合 $\varnothing$. 另外还约定：空集合 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集，即 $\varnothing \subset E$.

2. 数集

全体整数的集合、全体有理数的集合、全体实数的集合和全体复数的集合都是经常遇到的集合，约定分别用字母 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 来表示这些集合，即

$\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合；

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数的集合；

$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合；

$\mathbb{C}$ 表示全体复数的集合.

另外，将非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为$\mathbb{Z}_+$，$\mathbb{Q}_+$ 和$\mathbb{R}_+$，显然有

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

和

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+.$$

集合可以通过罗列其元素或指出其元素应满足的条件等办法来给出. 例如

$$\{1,2,3,4,5\}$$

表示由 1，2，3，4，5 这 5 个数字组成的集合，而$\{x\in\mathbb{R} \mid x>3\}$表示大于 3 的实数组成的集合. 又如：2 的平方根的集合可以记为 $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2=2\}$或$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

在本课程中经常遇到以下形式的实数集的子集.

(1) 区间

为了书写简练，将各种**区间**的符号、名称、定义列成表格，如表 1.1 所示($a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$).

表 1.1 区间的记法及含义

符号	名称		定义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x \mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x \mid x>a\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x \mid x\geqslant a\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x \mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x \mid x\leqslant a\}$

(2) 邻域

设 $a\in\mathbb{R}$，$\delta>0$. 数集$\{x \mid |x-a|<\delta\}$表示为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ **邻域**. 当不需要注明邻域的半径 δ 时，常把它表示为 $U(a)$，简称 a 的邻域.

数集$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$表示为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a，称为 a 的 δ **去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时，常将它表示为 $\mathring{U}(a)$，简称 a 的去心邻域.

3. 逻辑符号

微积分的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的，其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号，使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

（1）连词符号

符号"$\Rightarrow$"表示"蕴涵"或"推得"，或"若……，则……".

符号"$\Leftrightarrow$"表示"必要充分"，或"等价"，或"当且仅当".

例如：设 A,B 是两个陈述句，可以是条件，也可以是命题，则 $A\Rightarrow B$ 表示若命题 A 成立，则命题 B 成立；或命题 A 蕴涵命题 B；称 A 是 B 的充分条件，同时也称 B 是 A 的必要条件. 如，n 是整数$\Rightarrow n$ 是有理数. $A\Leftrightarrow B$ 表示命题 A 与命题 B 等价；或命题 A 蕴涵命题$B(A\Rightarrow B)$，同时命题 B 也蕴涵命题$A(B\Rightarrow A)$；或 $A(B)$是$B(A)$的必要充分条件. 再如，$A\subset B\Leftrightarrow$任意 $x\in A$，有 $x\in B$.

（2）量词符号

符号"$\forall$"表示"对任意"，或"对任意一个".

符号"$\exists$"表示"存在"，或"能找到".

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如，数集 A 有上界、有下界和有界的定义：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R},\forall x\in A,\text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有下界} \Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R},\forall x\in A,\text{有 } a\leqslant x.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有界} \Leftrightarrow \exists M>0,\forall x\in A,\text{有 } |x|\leqslant M.$$

设有命题"集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$"，用符号表示为

$$\forall a\in A,\text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是"集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$"，用符号表示为

$$\exists a_0\in A,\text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题. 由此可见，否定一个命题，要将原命题中的"$\forall$"改为"$\exists$"，将"$\exists$"改为"$\forall$"，并将性质 P 否定. 例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R},\forall x\in A,\text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 无上界} \Leftrightarrow \forall b\in\mathbb{R},\exists x_0\in A,\text{有 } b<x_0.$$

4. 其他符号

（1）max 与 min

符号"max"表示"最大"（它是 maximum（最大）的缩写）；符号"min"表示"最小"（它是 minimum（最小）的缩写）. 例如，设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个数. 则：

$$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最大数；

$$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小数.

(2) $n!$ 与 $n!!$

符号“$n!$”表示“不超过 n(正整数)的所有正整数的连乘积”，读作“n 的阶乘”即

$$n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

符号“$n!!$”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”，读作“n 的双阶乘”，即

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1,$$

$$(2k-2)!! = (2k-2)(2k-4)\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2,$$

$$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, \quad 12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

规定：$0! = 1$.

(3) 连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$

在数学中，常遇到一连串的数相加或一连串的数相乘，例如 $1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$ 等.为简便起见，人们引入连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

这里的指标 i 仅仅用以表示求和或求乘积的范围，把 i 换成别的符号 j, k 等，也同样表示同一和或同一乘积，例如

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

人们通常把这样的指标称为“哑指标”.

下面举几个例子说明连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$ 的应用.

例 1.1 阶乘 $n!$ 的定义可以写成

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j.$$

例 1.2 二项式定理可以表示为

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j a^j b^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k,$$

其中

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

习题 1.1

1. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$的一切子集.

2. 如果 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{1,2\}$,下列各种写法,哪些正确?哪些不正确?

$$1\in A,\quad 0\notin B,\quad \{1\}\in A,\quad 1\subset A,\quad \{1\}\subset A,\quad 0\subset A,$$
$$\{0\}\subset A,\quad \{0\}\subset B,\quad A=B,\quad A\supset B,\quad \varnothing\subset A,\quad A\subset A.$$

3. 设 $A=\{(x,y)\,|\,x-y+2\geqslant 0\}$,$B=\{(x,y)\,|\,2x+3y-6\geqslant 0\}$,$C=\{(x,y)\,|\,x-4\leqslant 0\}$,在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$,$(A\cup B)\cap C$.

4. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x|\leqslant 3$; (2) $|x-2|\leqslant 1$; (3) $|x-a|<\varepsilon$ (a 为常数,$\varepsilon>0$);

(4) $|x-3|<\dfrac{1}{10}$; (5) $0<|x-1|<0.01$; (6) $|x|>M$ ($M>0$).

5. 求邻域半径 δ,使 $x\in U(1,\delta)$时,$|2x-2|<\varepsilon$. 又若 ε 分别为 0.1,0.001 时,上述 δ 各等于多少?

1.2 函数

在自然科学、工程技术和某些社会科学中,函数是被广泛应用的数学概念之一,其重要意义远远超出了数学范围. 在数学中函数处于基础的核心地位. 函数是微积分的研究对象.

1. 函数概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着,这是物质世界的一个普遍规律.

例 2.1 真空中自由落体,物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着. 如果物体距地面的高度为 h,$\forall\, t\in\left[0,\ \sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$①,都对应一个距离 s. 已知 t 与 s 之间的对应关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,是常数.

例 2.2 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着:$\forall\, r\in[0,\infty)$ 都对应一个球的体积 V. 已知 r 与 V 的对应关系是

① 当 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ 时,由 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 有 $s=h$,即物体下落到地面.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率，是常数.

例 2.3 某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着(如图 1.1)，对 13 时至 23 时内任意时间 t 都对应着一个气温 T. 已知 t 与 T 的对应关系用图 1.1 中的气温曲线表示. 横坐标表示时间 t，纵坐标表示气温 T，曲线上任意点 $P(t,T)$ 表示在时间 t 对应着的气温 T.

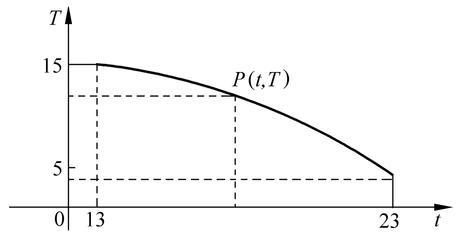

图 1.1

例 2.4 在标准大气压下，温度 T 与水的体积 V 互相联系着. 实测如表 1.2，对于数集 $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V，已知 T 与 V 的对应关系用表 1.2 来表示.

表 1.2

温度/℃	0	2	4	6	8	10	12	14
体积/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述 4 个实例，分属于不同的学科，实际意义完全不同. 但是，从数学角度看，它们有一个共同的特征：都有一个数集和一个对应关系，对于数集中任意数 x，按照对应关系都对应 $\mathbb{R}$ 中惟一一个数. 于是有如下的函数概念.

定义 1.1 设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f，对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$，按照对应关系 f，对应惟一一个 $y\in\mathbb{R}$，则称 f 是定义在 A 上的**函数**，表示为

$$f:A\to\mathbb{R},$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**，表示为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**，函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

根据函数定义不难看到，上述例题皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明：

(1) 用符号"$f:A\to\mathbb{R}$"表示 f 是定义在数集 A 上的函数，十分清楚、明确. 在本书中，为方便起见，约定将"f 是定义在数集 A 上的函数"，用符号"$y=f(x)$，$x\in A$"表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时，又可简写为"$y=f(x)$"，有时甚至笼统地说"$f(x)$是 x 的函数(值)".

(2) 根据函数定义，虽然函数都存在定义域，但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$的定义

域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x\mid f(x)\in\mathbb{R}\}$. 例如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，没有指出它的定义域，那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合，即闭区间 $[-1,1]=\{x\mid\sqrt{1-x^2}\in\mathbb{R}\}$.

具有具体实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束. 例如，上述例 2.2，半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数，从抽象的函数来说，r 可取任意实数；从它的实际意义来说，半径 r 不能取负数，因此它的定义域是区间 $[0,\infty)$.

(3) 函数定义指出：$\forall x\in A$，按照对应关系 f，对应惟一一个 $y\in\mathbb{R}$，这样的对应就是所谓的单值对应. 反之，一个 $y\in f(A)$ 就不一定只有一个 $x\in A$，使 $y=f(x)$. 例如函数 $y=\sin x$. $\forall x\in\mathbb{R}$，对应惟一一个 $y=\sin x\in\mathbb{R}$，反之，对 $y=1$，都有无限多个 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}$，$k\in\mathbb{Z}$，按照对应关系 $y=\sin x$，x 都对应 1，即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

(4) 在函数 $y=f(x)$ 的定义中，要求对应于 x 值的 y 值是惟一确定的，这种函数也称为**单值函数**. 如果取消惟一这个要求，即对应于 x 值，可以有两个以上确定的 y 值与之对应，那么函数 $y=f(x)$ 称为**多值函数**. 例如函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多(双)值函数.

为了便于讨论，总设法避免函数的多值性. 在一定条件下，多值函数可以分裂为若干**单值支**. 例如，双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 就可以分成两个单值支：一支是不小于零的 $y=+\sqrt{r^2-x^2}$，另一支是不大于零的 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$. 已知方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图形是中心在原点、半径为 r 的圆周，这同时也就是双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 的图形. 两个单值支就相当于把整个圆周分为上下两个半圆弧. 所以只要把各个分支弄清楚，由各个分支合起来的多值函数也就了如指掌. 今后如果没有特别声明，所讨论的都限于单值函数.

再看几个函数的例子.

例 2.5 $\forall x\in\mathbb{R}$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 显然，$\forall x\in\mathbb{R}$，都对应惟一一个 y. 这是一个函数(如图 1.2 所示)，表示为 $y=[x]$，即 $[2.5]=2$，$[3]=3$，$[0]=0$，$[-\pi]=-4$.

例 2.6 有一些函数具有“分段”的表达式，例如，图 1.3～图 1.5 所示的函数.

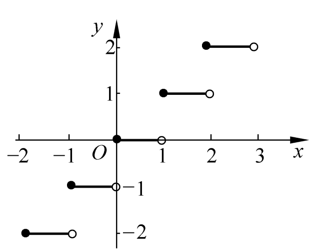

图 1.2

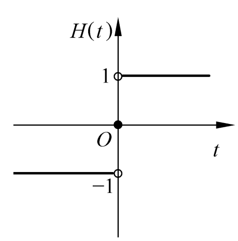

图 1.3

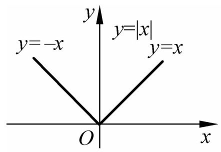

图 1.4

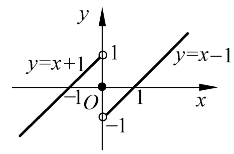

图 1.5

(1) 符号函数 $H(t)=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 0, & t=0,\\ 1, & t>0;\end{cases}$

(2) $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$ (3) $y=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

2. 几类具有特殊性质的函数

(1) 有界函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$在数集 A 上有定义,若函数值的集合

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

有界,即 $\exists M>0$, $\forall x\in A$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 A 上**有界**,否则称 $f(x)$在 A 上**无界**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对 $\forall x\in\mathbb{R}$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,2)$上是无界的,在$[1,\infty)$上是有界的.

(2) 单调函数

定义 1.3 设函数 $f(x)$在数集 A 上有定义,若 $\forall x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$,有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 A 上**严格单调增加**(**严格单调减少**). 上述不等式改为

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 A 上**单调增加**(**单调减少**).

例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是严格增加的. 函数 $y=2x^2+1$ 在$(-\infty,0)$上是严格减少的,在$[0,+\infty)$上是严格增加的. 因此,在$(-\infty,+\infty)$上,$y=2x^2+1$ 不是单调函数.

(3) 奇函数与偶函数

定义 1.4 设函数 $f(x)$定义在数集 A 上,若 $\forall x\in A$,有 $-x\in A$,且

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$是**奇函数**(**偶函数**).

如果点(x_0,y_0)在奇函数 $y=f(x)$的图像上,即 $y_0=f(x_0)$,则

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0,$$

即$(-x_0,-y_0)$也在奇函数 $y=f(x)$的图像上,于是奇函数的图像关于原点对称.

同理可知,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如,函数 $y=x^4-2x^2$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 等均为偶函数; 函数 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^3$, $y=x^2\sin x$等均为奇函数.

(4) 周期函数

定义 1.5 设函数 $f(x)$定义在数集 A 上,若$\exists\ l>0$, $\forall\, x\in A$,有 $x\pm l\in A$,且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$是**周期函数**, l 称为函数 $f(x)$的一个**周期**.

若 l 是函数 $f(x)$的周期,则 $2l$ 也是它的周期. 不难用归纳法证明,若 l 是函数 $f(x)$的周期,则 $nl(n\in\mathbb{Z}_+)$也是它的周期. 若函数 $f(x)$有最小的正周期,通常将这个最小正周期称为函数 $f(x)$的**基本周期**,简称为**周期**.

例如, $y=\sin x$ 就是周期函数,周期为 2π. 再如,常函数 $y=1$ 也是周期函数,任意正的实数都是它的周期.

3. 复合函数与反函数

(1) 复合函数

由两个或两个以上的函数用所谓“中间变量”传递的方法能产生新的函数. 例如函数

$$z=\ln y \quad 与 \quad y=x-1,$$

由“中间变量” y 的传递生成新函数

$$z=\ln(x-1).$$

在这里, z 是 y 的函数, y 又是 x 的函数,于是通过中间变量 y 的传递得到 z 是 x 的函数. 为了使函数 $z=\ln y$ 有意义,必须要求 $y>0$,为使 $y=x-1>0$,必须要求 $x>1$. 于是对函数 $z=\ln(x-1)$来说,必须要求 $x>1$.

定义 1.6 设函数 $z=f(y)$定义在数集 B 上,函数 $y=\varphi(x)$定义在数集 A 上, G 是 A 中使 $y=\varphi(x)\in B$ 的 x 的非空子集,即

$$G=\{x\mid x\in A,\ \varphi(x)\in B\}\neq\varnothing,$$

$\forall\, x\in G$,按照对应关系 φ,对应惟一一个 $y\in B$,再按照对应关系 f,对应惟一一个 z,即 $\forall\, x\in G$,对应惟一一个 z,于是在 G 上定义了一个函数,表示为 $f\circ\varphi$,称为函数 $y=\varphi(x)$与 $z=f(y)$的**复合函数**,即

$$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)],\quad x\in G,$$

y 称为中间变量. 今后经常将函数 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的复合函数表示为

$$z = f[\varphi(x)], \quad x \in G.$$

例如,函数 $z=\sqrt{y}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$,函数 $y=(x-1)(2-x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$. 为使其生成复合函数,必须要求

$$y = (x-1)(2-x) \geqslant 0, \quad 即 \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$$

于是,$\forall x \in [1,2]$,函数 $y=(x-1)(2-x)$ 与 $z=\sqrt{y}$ 生成了复合函数

$$z = \sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

以上是两个函数生成的复合函数. 不难将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数. 例如,三个函数

$$u = \sqrt{z}, \quad z = \ln y, \quad y = 2x+3,$$

生成的复合函数是

$$u = \sqrt{\ln(2x+3)}, \quad x \in [-1,+\infty).$$

我们不仅能够将若干个简单的函数生成为复合函数,而且还要善于将复合函数"分解"为若干个简单的函数. 例如函数

$$y = \tan^5 \sqrt[3]{\lg(\arcsin x)}$$

是由 5 个简单函数 $y=u^5$,$u=\tan v$,$v=\sqrt[3]{w}$,$w=\lg t$,$t=\arcsin x$ 所生成的复合函数.

(2) 反函数

在高中代数中已经学习了反函数,如对数函数是指数函数的反函数,反三角函数是三角函数的反函数. 鉴于反函数的重要性,需要复习反函数的概念及其图像.

在圆的面积公式(函数)

$$S = \pi r^2$$

中,半径 r 是自变量,面积 S 是因变量,即对任意半径 $r \in [0,+\infty)$,对应惟一一个面积 S. 这个函数还有一个性质:对任意面积 $S \in [0,+\infty)$,按此对应关系,也对应惟一一个半径 r,即

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

函数 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 就是所谓函数 $S=\pi r^2$ 的反函数.

在函数定义中,已知函数 $y=f(x)$,对任意 $x \in X$,按照对应关系 f,$\mathbb{R}$ 中有惟一一个 y 相对应,但对任意一个 $y \in f(X)$,不一定仅有惟一一个 $x \in X$,使 $f(x)=y$. 即一个函数不一定存在反函数.

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$,$x \in X$. 若对任意 $y \in f(X)$,有惟一一个 $x \in X$ 与之对应,使 $f(x)=y$,则在 $f(X)$ 上定义了一个函数,记为