第 1 章 行　列　式

行列式的理论是人们从解线性方程组的需要中建立和发展起来的，它在线性代数以及其他数学分支中都有着广泛的应用．本章我们主要讨论下面几个问题：

(1) 行列式的定义；

(2) 行列式的基本性质及计算方法；

(3) 利用行列式求解线性方程组（克莱姆法则）．

1.1　二阶与三阶行列式

行列式的概念起源于解线性方程组，它是从二元与三元线性方程组的求解公式引出来的．因此我们首先讨论解线性方程组的问题．

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是一般二元线性方程组的公式解．但这个公式很不好记忆，应用时不方便，因此，我们引进新的符号来表示(1.2)式这个结果，这就是行列式的起源．我们称 4 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式．它含有两行两列，横的叫做行，纵的叫做列．行列式中的数叫做行列式的元素．从上式知，二阶行列式是这样两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线（又叫做行列式的主对角线）上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线（又叫做次对角线）上两个元素的乘积，取负号．

根据定义,容易得知,(1.2)式中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时,线性方程组(1.1)的解(1.2)式可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.3}$$

像这样用行列式来表示的解,形式简便整齐,便于记忆.

首先,(1.3)式中分母的行列式是从线性方程组(1.1)中的系数按其原有的相对位置而排成的,称为系数行列式.分子中的行列式,x_1,x_2 的分子是分别把系数行列式中的第 1 列、第 2 列换成线性方程组(1.1)的常数项得到的.

例 1.1　用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=1, \\ x_1+3x_2=2. \end{cases}$$

解　这时

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-4\times 2=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 1=3,$$

因此,线性方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

作类似的讨论,我们引入三阶行列式的概念,称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.5}$$

为三阶行列式，它有3行3列，是6项的代数和.这6项的和也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角3个元素的乘积取正号，从右上角到左下角3个元素的乘积取负号，等等.如图1.1所示.

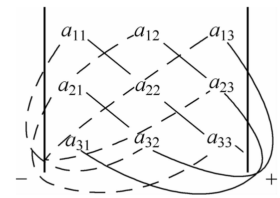

图　1.1

例 1.2　计算$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解　$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times3\times5+1\times1\times2+(-4)\times3\times2-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1 \\ &= 30+2-24-12+20-6=10.\end{aligned}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当$D\neq0$时，(1.4)式的解可简单地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

它的结构与前面二元一次方程组的解类似.

例 1.3　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1, \\ x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

解　$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28,\quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

例 1.4　已知$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$,问 a,b 应满足什么条件(其中 a,b 均为实数)?

解　$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$. 若要 $a^2+b^2=0$,则 a 与 b 须同时等于零. 因此,当 $a=0$ 且 $b=0$ 时,给定行列式等于零.

为了得到更为一般的线性方程组的求解公式,我们需要引入 n 阶行列式的概念,为此,下节先介绍排列的有关知识.

习题 1.1

1. 计算下列二阶、三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ -1 & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$.

2. 当 a,b 为何值时,行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}=0.$$

3. 解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 5x_1-3x_2=1, \\ x_1+11x_2=6; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2=7, \\ x_1-3x_2=-2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1-4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-6x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2-7x_3=0. \end{cases}$

1.2 排列

在 n 阶行列式的定义中,要用到排列的某些知识,为此先介绍排列的一些基本知识.

定义 1.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如,1234 是一个 4 级排列,3412 也是一个 4 级排列,而 52341 是一个 5 级排列.由数码 1,2,3 组成的所有 3 级排列为 123,132,213,231,312,321,共有 $3!=6$ 个,而所有的 n 级排列共有 $n!$ 个.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为自然序排列.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面 $(i_s<i_t)$,则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序.一个 n 级排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如,在 4 级排列 3412 中,31,32,41,42 各构成一个逆序数,所以,排列 3412 的逆序数为 $N(3412)=4$.同样可计算排列 52341 的逆序数为 $N(52341)=7$.

容易看出,自然序排列的逆序数为 0.

定义 1.3 如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$是奇数,则称此排列为奇排列;逆序数是偶数的排列则称为偶排列.

例如,排列 3412 是偶排列,排列 52341 是奇排列.自然序排列 $123\cdots n$ 是偶排列.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置,其余各数位置不变,就得到另一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换称为一个对换,记作$(i_s,i_t)$.

如在排列 3412 中,将 4 与 2 对换,得到新的排列 3214.并且我们看到:偶排列 3412 经过 4 与 2 的对换后,变成了奇排列 3214.反之,也可以说奇排列 3214 经过 2 与 4 的对换后,变成了偶排列 3412.

一般地,有以下定理.

定理 1.1 任一排列经过一次对换后,其奇偶性改变.

证明 首先讨论对换相邻两个数的情况,该排列为

$$a_1a_2\cdots a_l\,ijb_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n.$$

将相邻两个数 i 与 j 作一次对换,则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_ljib_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n.$$

显然对于数 $a_1,a_2,\cdots,a_l,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 来说,并不改变它们的逆序数.但当 $i<j$ 时,经过 i 与 j 的对换后,排列的逆序数增加 1 个;当 $i>j$ 时,经过 i 与 j 的对换后,排列的逆序数减少 1 个.所以对换相邻两数后,排列改变了奇偶性.

再讨论一般情况,设排列为

$$a_1a_2\cdots a_lib_1b_2\cdots b_mjc_1c_2\cdots c_n.$$

将 i 与 j 作一次对换，则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_ljb_1b_2\cdots b_mic_1c_2\cdots c_n,$$

这就是对换不相邻的两个数的情况. 但它可以看成是先将 i 与 b_1 对换，再与 b_2 对换，……，最后与 b_m 的对换，即 i 与它后面的数作 m 次相邻两数的对换变成排列

$$a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots b_mijc_1\cdots c_n,$$

然后将数 j 与它前面的数 $i,b_m,\cdots,b_1$ 作 $m+1$ 次相邻两数的对换而成. 因此对换不相邻的数 i 与 j（中间有 m 个数），相当于作 $2m+1$ 次相邻两数的对换. 由前面的证明知，排列的奇偶性改变了 $2m+1$ 次，而 $2m+1$ 为奇数，因此，不相邻的两数 i,j 经过对换后的排列与原排列的奇偶性不同.

定理 1.2　在所有的 n 级排列中（$n\geqslant 2$），奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列施以同一个对换，如都对换 $(1,2)$，则由定理 1.1 知，p 个奇排列全部变为偶排列，由于偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理将全部的偶排列施以同一对换 $(1,2)$，则 q 个偶排列全部变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $q=p$，即奇排列与偶排列的个数相等. 又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，所以 $q+p=n!$，$q=p=\frac{n!}{2}$.

定理 1.3　任一 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可通过一系列对换与 n 级自然序排列 $12\cdots n$ 互变，且所作对换的次数与这个 n 级排列有相同的奇偶性.

证明　对排列的级数用数学归纳法证之.

对于 1 级排列，结论显然成立.

假设对 $n-1$ 级排列，结论成立. 现在证明对于 n 级排列，结论也成立.

若 $i_n=n$，则根据归纳假设 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 是 $n-1$ 级排列，可经过一系列对换变成 $12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换就把 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成 $12\cdots n$. 若 $i_n\neq n$，则先施行 i_n 与 n 的对换，使之变成 $i'_1i'_2\cdots i'_{n-1}n$，这就归结成上面的情形. 相仿地，$12\cdots n$ 也可经过一系列对换变成 $i_1i_2\cdots i_n$，因此结论成立.

因为 $12\cdots n$ 是偶排列，由定理 1.1 可知，当 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇（偶）排列时，必须施行奇（偶）数次对换方能变成偶排列，所以，所施行对换的次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

习题 1.2

1. 计算下列各排列的逆序数：

(1) $N(3742561)$；　　　(2) $N(n(n-1)\cdots 21)$；

(3) $N(653241)$； (4) $N(1357\cdots(2n-1)2468\cdots(2n))$.

2. 决定 i,j 的值，使(1) $1245i6j97$ 为奇排列；(2) $3972i15j4$ 为偶排列.

3. 排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 经过多少次相邻两数对换变成自然顺序排列？

1.3 n 阶行列式

本节我们从观察二阶、三阶行列式的特征入手.引出 n 阶行列式的定义.

已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

其中元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素位于第 i 行，称为行标；第二个下标 j 表示此元素位于第 j 列，称为列标.

我们可以从中发现以下规律：

(1) 二阶行列式是 $2!$ 项的代数和，三阶行列式是 $3!$ 项的代数和；

(2) 二阶行列式中每一项是两个元素的乘积，它们分别取自不同的行和不同的列，三阶行列式中的每一项是三个元素的乘积，它们也是取自不同的行和不同的列；

(3) 每一项的符号是：当这一项中元素的行标是按自然序排列时，如果元素的列标为偶排列，则取正号；如果元素的列标为奇排列，则取负号.

作为二、三阶行列式的推广，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由排成 n 行 n 列的 n^2 个数 a_{ij} (也称为元素)($i,j=1,2,\cdots,n$)组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.它是 $n!$ 项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：每一项中各元素的行标按自然序排列，如果列标的排列为偶排列时，则取正号；如果列标的排列为奇排列，则取负号.于是得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

(1.7)式称为 n 阶行列式按行标自然顺序排列的展开式. $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

当 $n=2,3$ 时,这样定义的二阶、三阶行列式与1.1节中用对角线法则定义的行列式结果是一致的. 当 $n=1$ 时,一阶行列式为 $|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n=4$ 时,4阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

表示 $4!=24$ 项的代数和,因为取自不同行、不同列的4个元素的乘积恰为 $4!$ 项. 根据 n 阶行列式的定义,4阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

例如 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为1234,元素取自不同的行;列标排列为4312,元素取自不同的列,因为 $N(4312)=5$,所以该项取负号,即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是上述行列式中的一项.

为了熟悉 n 阶行列式的定义,我们来看下面几个问题.

例 1.5　在5阶行列式中,$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ 这一项应取什么符号?

解　这一项各元素的行标是按自然顺序排列的,而列标的排列为23514. 因 $N(23514)=4$,故这一项应取正号.

例 1.6　写出4阶行列式中带负号且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解　包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项的一般形式为

$$(-1)^{N(13j_3j_4)}a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

按定义,j_3 可取2或4,j_4 可取4或2,因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \quad 或 \quad a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

但因 $N(1324)=1$ 为奇数,$N(1342)=2$ 为偶数,所以此项只能是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

例 1.7　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}.$$

解 这是一个 4 阶行列式,按行列式的定义,它应有 $4!=24$ 项.但只有以下 4 项

$$adeh,\quad adfg,\quad bceh,\quad bcfg$$

不为零.与这 4 项相对应的列标的 4 级排列分别为 1234,1243,2134 和 2143,而 $N(1234)=0$,$N(1243)=1$,$N(2134)=1$ 和 $N(2143)=2$,所以第一项和第四项应取正号,第二项和第三项应取负号,即

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix} = adeh-adfg-bceh+bcfg.$$

例 1.8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 由 n 阶行列式的定义,应有 $n!$ 项,其一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

但由于 D 中有许多元素为零,只需求出上述一切项中不为零的项即可.在 D 中,第 n 行元素除 a_{nn} 外,其余均为 0,所以 $j_n=n$;在第 $n-1$ 行中,除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 外,其余元素都是零,因而 j_{n-1} 只有取 $n-1,n$ 这两个可能,又由于 $a_{nn},a_{n-1,n}$ 位于同一列,而 $j_n=n$,所以只有 $j_{n-1}=n-1$.这样逐步往上推,不难看出,在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项不等于零,而这项的列标所组成的排列的逆序数是 $N(12\cdots n)=0$,故取正号.因此,由行列式的定义,有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.8 出现的行列式中,其主对角线以下三角部分的元素都等于零,我们称具有这种形式的行列式为上三角行列式.同样可以定义下三角行列式.将上(下)三角行列式统称为三角行列式.进一步称主对角线上下三角形部分的元素均为零的行列式为对角行列式.例 1.8 的结果说明,上三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

同理可求得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即三角行列式及对角行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积.

例 1.9 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式除了 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项外，其余项均为零，现在来看这一项的符号，列标的 n 级排列为 $n(n-1)\cdots 21$，

$$N(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理可计算出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

由行列式的定义，行列式中的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，所以可得出：如果行列式有一行(列)的元素全为 0，则该行列式等于 0.

在 n 阶行列式中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素的行标按自然序排列，