

第一章 三角函数

高考数学中,三角函数的考点有三角函数的定义、终边相同的角与三角函数值的象限符号、化简求值、三角恒等变换、三角函数的图像和性质与解三角形,其中核心考点是三角函数的图像和性质与解三角形.为什么说它们是核心考点呢?其一,在高考数学试卷中的三角函数试题(约占15~18分)里,这部分约占三分之二的分值(约占10~13分);其二,它们都是研究三角函数的中心内容;其三,它们都与实际生活和其他边缘学科有紧密联系;其四,它们对三角函数的其他考点有较高的覆盖率.

核心考点一 三角函数的图像和性质

方向一:三角恒等变换及性质的讨论

解法突破:用公式把已知函数化成同一个角的同种类型的三角函数(简称“同角同函”),常见方法有:

- (1)用两角和差公式或诱导公式变成“同角”的三角函数形式;
- (2)用倍角公式(升幂公式、降幂公式)变成“同角”(如 $\frac{x}{2}, x, 2x$)的三角函数形式;
- (3)用两角和差公式或辅助角公式化 $a\sin\omega x + b\cos\omega x$ 为 $A\sin(\omega x + \varphi)$ 的“同函”三角函数形式;
- (4)用同角三角函数基本关系式化“切”为“弦”三角函数形式.

【例 1.1】 已知函数 $f(x) = \frac{1 - \sin 2x}{\cos x}$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域;

(2)设 α 是第四象限角,且 $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$,求 $f(\alpha)$ 的值.

分析 对于定义域需从函数式结构(分式、偶次根式)及函数自身($\log_a x, \tan x$)考虑,求值问题的思路是由未知化为已知.

解析 (1)由 $\cos x \neq 0$,得 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,故 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(2)因为 $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$,且 α 是第四象限角,所以 $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,

$$\text{故 } f(\alpha) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{49}{15}.$$

评注 掌握定义域在求解步骤中最后结果的书写规范问题.

变式 1 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}}{\sin x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)若 $f(x) = 2$,求 $\sin 2x$ 的值.

【例 1.2】 已知函数 $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及其图像的对称轴方程.

分析 化简函数解析式的一般规律是运用倍角、两角和(差)公式化为只含一个角的三角函数形式去求解.

解析 (1) 由 $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x = \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x = \frac{1}{2} + \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 得函数 $f(x)$ 的最

小正周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \pi$, 得 $\omega = 1$, 因此 $f(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

(2) 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$),

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

所以函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

评注 利用两角和差公式(辅助角公式)化 $y = a \sin \omega x + b \cos \omega x$ 为 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的“同函”三角函数形式, 在此基础上求解函数的性质, 如最小正周期、对称性、单调区间、值域(最值)或求解三角不等式.

变式 1 (2013 山东文 18) 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \omega x - \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 且 $y = f(x)$ 图像的一个

对称中心到最近的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求 ω 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

变式 2 (2012 北京文 15) 已知函数 $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x) \sin 2x}{\sin x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间.

变式 3 已知函数 $f(x) = \sin x + a \cos x$ 的图像经过点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 设 $g(x) = [f(x)]^2 - 2$, 求函数 $g(x)$ 的最小正周期与单调增区间.

【例 1.3】 已知函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x + \sin x$.

(1) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

分析 该函数的变形方向与例 1.2 不同, 无法将其变为同次、同角, 只能变为二次型函数.

提醒读者: 注意次数、角度、函数名三者的变化.

解析 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) + \sin^2 x + \sin x = -3\sin^2 x + \sin x + 2$,

$$(1) f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{3} + 2 = -3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{2\sqrt{3}-1}{4}.$$

$$(2) \text{ 令 } t = \sin x \in [-1, 1], \text{ 得 } y(t) = -3t^2 + t + 2, t \in [-1, 1],$$

$$\text{则当 } t = \frac{1}{6} \text{ 时, } y(t) \text{ 取最大值 } y\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{12};$$

$$\text{当 } t = -1 \text{ 时, } y(t) \text{ 取最小值 } y(-1) = -2, \text{ 因此函数 } f(x) \text{ 的最大值为 } \frac{25}{12}, \text{ 最小值为 } -2.$$

评注 求解三角函数的值域(最值)、周期、单调性、奇偶性、对称性等性质的问题, 首先要考虑将所给函数进行变形, 但未必能变为 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的形式, 有时简化为 $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$ 或 $a\cos^2 x + b\cos x + c$ 型函数.

变式 1 已知 $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}, A \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求函数 $f(x) = \cos 2x + 5\cos A \cos x + 1$ 的值域.

方向二: 对函数图像的研究, “由图(及其性质)求式”, 即已知三角函数的部分图像, 求解函数解析式(应理解 A, ω, φ 的意义)

解法突破: 对 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中 “ A, ω, φ ” 的确定, 常规方法是:

(1) 振幅, 可推出 $A (A > 0)$;

(2) 周期, 可推出 ω 的值或取值范围;

(3) 特征点, 可列出三角方程, 求出 φ 的值.

【例 1.4】 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, |\varphi|<\pi$) 的一段图像如图 1-1 所示, 求函数的解析式.

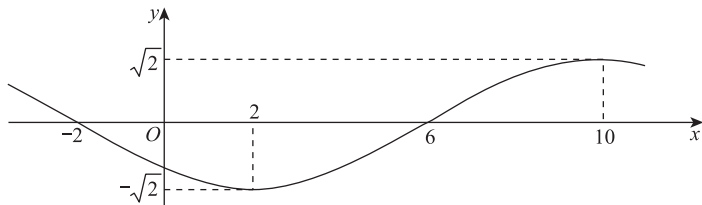


图 1-1

分析 五点法是解这类问题的基本方法, 这里要注意的是零点是递增区间的中心还是递减区间的中心.

解析 由图 1-1 得 $T=16=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=\frac{\pi}{8}$, $A=\sqrt{2}$, 则 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$;

代入点 $(2, -\sqrt{2})$ 得 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=-\sqrt{2}$,

则 $\frac{\pi}{4}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), 得 $\varphi=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$ ($k\in\mathbf{Z}$); 又 $\varphi\in(-\pi, \pi)$, 得 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

故函数的解析式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

评注 (1) 若将点 $(6, 0)$ 代入 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$ 中, 求取的结果是否是一致的呢?

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=0$, 得 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), 即 $\varphi=k\pi-\frac{3\pi}{4}$ ($k\in\mathbf{Z}$); 又 $-\pi<\varphi<\pi$, 则 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$.

而本题中求得 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$, 为什么要舍去 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 呢? 大家要注意, 点 $(6, 0)$ 位于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

($A>0, \omega>0$) 图像的增区间, 据“五点描图法”知 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), 得 $\varphi=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$, 又 $-\pi<\varphi<\pi$,

则 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$. 故函数的解析式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

(2) 一般地, 我们把函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0$) 图像上从左到右的五个关键点依次称为“第一上零点”、“最大值点”、“下零点”、“最小值点”、“第二上零点(在不同时出现两个上零点的情形下, 不区分第一和第二上零点)”. 它们所对应的相位值 $\omega x+\varphi$ 分别为 $0+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi, 2\pi+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$). 利用它们解题时应注意这种对应性, 故评注(1)说明的点 $(6, 0)$ 应为“第一上零点”, 其对应的相位值应为 $\frac{\pi}{8}\times 6+\varphi=0+2k\pi$, 而不是 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), 希望读者注意此点!

变式 1 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (其中 $x\in\mathbf{R}, A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图 1-2 所示.

(1) 求 A, ω, φ 的值;

(2) 已知在函数 $f(x)$ 图像上的三点 M, N, P 的横坐标分别为 $-1, 1, 3$, 求 $\sin\angle MNP$ 的值.

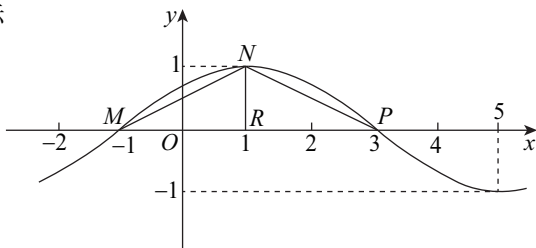


图 1-2

变式 2 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$ ($A > 0, \omega > 0, x \in \mathbf{R}$) 的部分图像如图 1-3 所示.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 $f(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}) = \frac{6}{5}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$ 的值.

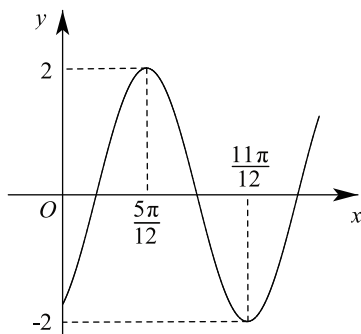


图 1-3

方向三: 给出函数的性质(如奇偶性、单调性、对称性、最值)求解函数解析式(即 A, ω, φ 的确定)

【例 1.5】 设 $f(x) = 4\cos(\omega x - \frac{\pi}{6})\sin\omega x - \cos(2\omega x + \pi)$, 其中 $\omega > 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数, 求 ω 的最大值.

分析 函数的值域、单调性的确定需将函数化为 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的形式, 再按原理进行.

解析 (1) $f(x) = 4\cos(\omega x - \frac{\pi}{6})\sin\omega x - \cos(2\omega x + \pi) = 4(\cos\omega x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\omega x \cdot \frac{1}{2})\sin\omega x + \cos 2\omega x$
 $= (2\sqrt{3}\cos\omega x + 2\sin\omega x)\sin\omega x + \cos 2\omega x = 2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x + 2\sin^2\omega x + \cos 2\omega x$
 $= \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1 - \cos 2\omega x + \cos 2\omega x = \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1.$

因为 $\sin 2\omega x \in [-1, 1]$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$.

(2) **解法一:** 由(1)知 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1$, 又 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数,

$$\text{得 } [-3\omega\pi, \omega\pi] \subseteq [2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}] (\omega > 0), \text{ 故 } \begin{cases} -3\omega\pi \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \omega\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} \omega \leq \frac{1}{6} - \frac{2k}{3} \\ \omega \leq \frac{1}{2} + 2k \end{cases}, k \in \mathbf{Z},$$

又 $\omega > 0$, 可得 $0 < \omega \leq \frac{1}{6}$. 则 ω 的最大值为 $\frac{1}{6}$.

解法二: 由(1)知 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1$ ($\omega > 0$) 在区间 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数, 由含原点的增区间的

对称性可知函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上也为增函数, 故 $\frac{T}{2} \geq 3\pi$, 即 $T \geq 6\pi$, 得 $\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} \geq 6\pi$,

故 $0 < \omega \leq \frac{1}{6}$. 则 ω 的最大值为 $\frac{1}{6}$.

评注 一般地, 若 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 为奇函数, 在 $[\theta_1, \theta_2]$ 上为增函数, 其中 $\theta_1 < 0 < \theta_2$, 若 $\max\{|\theta_1|, |\theta_2|\} = \theta$, 则 $\theta \leq \frac{T}{4}$, 即可求出 ω 的范围.

变式 1 (2014 江西文 16) 已知函数 $f(x) = (a + 2\cos^2 x)\cos(2x + \theta)$ 为奇函数, 且 $f(\frac{\pi}{4}) = 0$, 其中

$a \in \mathbf{R}, \theta \in (0, \pi)$.

(1) 求 a, θ 的值;

(2) 若 $f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -\frac{2}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 求 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

方向四: 图像变换问题

解法突破: 函数 $f(x) = \sin x$ $\xrightarrow{\text{向左平移 } \varphi (\varphi > 0) \text{ 个单位}}$ $y = \sin(x + \varphi)$ $\xrightarrow{\text{横坐标伸缩到原来的 } \frac{1}{\omega} (\omega > 0) \text{ 倍}}$ $y = \sin(\omega x + \varphi)$ $\xrightarrow{\text{横坐标不变, 纵坐标伸缩到原来的 } A \text{ 倍} (A > 0)}$ $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 或 函数 $f(x) = \sin x$ $\xrightarrow{\text{横坐标伸缩到原来的 } \frac{1}{\omega} (\omega > 0) \text{ 倍}}$ $y = \sin \omega x$ $\xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\varphi}{\omega} \text{ 个单位, 纵坐标不变}}$ $y = \sin \omega \left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right) = \sin(\omega x + \varphi)$ $\xrightarrow{\text{横坐标不变, 纵坐标伸缩到原来的 } A \text{ 倍}}$ $y = A \sin(\omega x + \varphi)$.

注: 无论函数图像变换的次序如何, 相位的变换只针对“ x ”而言.

【例 1.6】 已知向量 $m = (\sin x, 1), n = \left(\sqrt{3}A \cos x, \frac{A}{2} \cos 2x\right) (A > 0)$, 函数 $f(x) = m \cdot n$ 的最大值为 6.

(1) 求 A ;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再将所得图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 求 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{24}\right]$ 上的值域.

分析 本题是用向量的数量积给出三角函数, 对题目条件直接翻译便可得出答案.

解析 (1) $f(x) = m \cdot n = \sqrt{3}A \sin x \cos x + \frac{A}{2} \cos 2x = A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x\right) = A \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $A > 0$, $f(x)$ 的最大值为 6, 知 $A = 6$.

(2) 由 (1) 得, $f(x) = 6 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到

$y = 6 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 6 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像,

再将得到的图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到 $g(x) = 6 \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{24}\right]$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$, 得 $\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$,

故 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{24}\right]$ 上的值域为 $[-3, 6]$.

评注 条件要求的每种变换对应一种解析式, 按要求依次变换便得所求解析式.

变式 1 已知函数 $f(x) = (\sin 2x + \cos 2x)^2 - 2 \sin^2 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若函数 $y = g(x)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到的, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时,

求 $y=g(x)$ 的最大值和最小值.

方向五:与平面向量的综合

解法突破:三角函数与向量知识的综合,一般都是由向量的坐标形式进行数量积运算得出三角函数式,然后对函数式进行恒等变换去解决提出的问题.

【例 1.7】 已知向量 $\mathbf{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x, \sin\omega x)$, $\mathbf{b}=(-\cos\omega x-\sin\omega x, 2\sqrt{3}\cos\omega x)$, 设函数 $f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\lambda(x\in\mathbf{R})$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称, 其中 ω, λ 为常数, 且 $\omega\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $y=f(x)$ 的图像经过点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{5}\right]$ 上的取值范围.

分析 这里由数量积得出三角函数式, 按三角函数知识求解.

解析 (1) 因为 $f(x)=\sin^2\omega x-\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\lambda=-\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x+\lambda$
 $=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\lambda$. 由直线 $x=\pi$ 是 $y=f(x)$ 图像的一条对称轴, 可得 $\sin\left(2\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\pm 1$,
 所以 $2\omega\pi-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$, 即 $\omega=\frac{k}{2}+\frac{1}{3}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $\omega\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)(k\in\mathbf{Z})$, 所以 $k=1$, 故 $\omega=\frac{5}{6}$.
 所以 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{6\pi}{5}$.

(2) 由 $y=f(x)$ 的图像过点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, 得 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, 即 $\lambda=-2\sin\left(\frac{5}{6}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$,
 即 $\lambda=-\sqrt{2}$. 故 $f(x)=2\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}$, 由 $0\leq x\leq\frac{3\pi}{5}$, 有 $-\frac{\pi}{6}\leq\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{5\pi}{6}$,
 所以 $-\frac{1}{2}\leq\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1$, 得 $-1-\sqrt{2}\leq 2\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}\leq 2-\sqrt{2}$,
 故函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3\pi}{5}\right]$ 上的取值范围为 $[-1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}]$.

评注 本题实质是三角函数问题, 还是利用三角函数恒等变形化为一个角的三角函数, 再求出性质.

变式 1 (2013 陕西文 16) 已知向量 $\mathbf{a}=\left(\cos x, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b}=(\sqrt{3}\sin x, \cos 2x)$, $x\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

变式 2 (2013 辽宁文 17) 设向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3} \sin x, \sin x)$, $\mathbf{b} = (\cos x, \sin x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (1) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 求 x 的值;
- (2) 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.

核心考点二 解三角形

方向一: 合理选取正弦定理、余弦定理解三角形, 已知边角关系式求解边或角及面积

解法突破: 解三角形要具备三个条件, 且其中至少有一个与边有关.

正弦定理可用来解决如下问题:

- (1) 知两角一边求其他边或角;
- (2) 知两边一对角求另一对角 (知小角求大角两解, 知大角求小角一解) 及其他边角.

余弦定理可用来解决如下问题:

- (1) 知三边求角;
- (2) 知两边及夹角求第三边;
- (3) 知两边一对角, 求第三边 (在三角形内角为特殊角时, 还可以使用正弦定理求出第二个角后, 利用内角和定理 ($A+B+C=\pi$) 获得第三个角, 然后再次使用正弦定理求出第三边).

【例 1.8】 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\tan B = \frac{1}{2}$, $\tan C = \frac{1}{3}$ 且 $c = 1$.

- (1) 求 $\tan(B+C)$;
- (2) 求 a 的值.

分析 本题 (1) 因为是有关正切问题, 所以选用 $\tan(B+C)$ 公式; (2) 中边的计算是知一边求另一边, 用正弦定理.

解析 (1) $\tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1.$

(2) 由 $\tan A = \tan[\pi - (B+C)] = -\tan(B+C) = -1$, $A \in (0, \pi)$, 得 $A = \frac{3\pi}{4}$.

据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sin C}$, 又 $\tan C = \frac{1}{3}$, $C \in (0, \pi)$, 得 $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

则 $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{5}.$

评注 本题思路较简单, 直接套用公式即可.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\sin B \cos A = \sin(A+C)$.

- (1) 求角 A ;

(2) 若 $BC=2$, $\triangle ABC$ 的面积是 $\sqrt{3}$, 求 AB .

变式 2 (2013 湖北文 18) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c .

已知 $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

【例 1.9】 (2014 湖南文 19) 如图 1-4 所示, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $DA \perp AB$, $DE = 1$, $EC = \sqrt{7}$, $EA = 2$, $\angle D = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BEC = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 $\sin \angle CED$ 的值;

(2) 求 BE 的长.

分析 第(1)问在 $\triangle CDE$ 中, 已知两边与一角求第三边, 利用余弦定理;

第(2)问, 利用两角和差求 $\cos \angle AEB$, 再解 $\text{Rt} \triangle ABE$.

解析 (1) 在 $\triangle CDE$ 中, 由余弦定理知 $EC^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE \cdot$

$\cos \angle D$,

根据已知条件得 $7 = CD^2 + 1 - 2CD \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 故 $CD^2 + CD - 6 = 0$,

解得 $CD = 2$ 或 -3 (负值舍去).

在 $\triangle CDE$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{CE}{\sin \angle D} = \frac{CD}{\sin \angle DEC}$,

$$\text{即 } \sin \angle DEC = \frac{CD \cdot \sin \frac{2\pi}{3}}{CE} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

(2) 由题意可知 $0 < \angle DEC < \frac{\pi}{3}$, 故 $\cos \angle DEC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle DEC} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,

又 $\angle AEB = \frac{2\pi}{3} - \angle DEC$, 所以 $\cos \angle AEB = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \angle DEC\right) = -\frac{1}{2}\cos \angle DEC + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \angle DEC$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

在 $\text{Rt} \triangle EAB$ 中, $\cos \angle AEB = \frac{EA}{BE} = \frac{2}{BE} = \frac{\sqrt{7}}{14}$, 故 $BE = 4\sqrt{7}$.

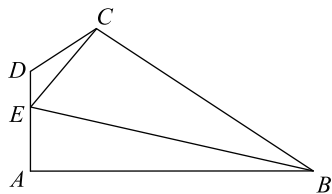


图 1-4

评注 在四边形中考查解三角形不常见,需要充分挖掘隐含条件,同时注意对已证结论的使用.

变式 1 (2014 新课标 II 文 17) 四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补, $AB = 1, BC = 3, CD = DA = 2$.

- (1) 求角 C 和边 BD ;
- (2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

方向二:三角形中边角互化

解法突破: 此类问题一般题设都是边、角混合的等式,解题突破口是利用正、余弦定理将边(角)化为角(边),列方程、解方程可得所求.

【例 1.10】 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \sin A \sin B + b \cos^2 A = \sqrt{2}a$.

- (1) 求 $\frac{b}{a}$ 的值;
- (2) 若 $c^2 = b^2 + \sqrt{3}a^2$, 求角 B 的大小.

分析 (1) 已知等式两边的边或三角函数次数相同,考虑用正弦定理;(2) 题中有平方关系,考虑用余弦定理.

解析 (1) 由 $a \sin A \sin B + b \cos^2 A = \sqrt{2}a$, 据正弦定理边化角得, $\sin^2 A \sin B + \sin B \cos^2 A = \sqrt{2} \sin A$, 即 $\sin B(\sin^2 A + \cos^2 A) = \sqrt{2} \sin A$, 即 $\sin B = \sqrt{2} \sin A$, 则 $\frac{\sin B}{\sin A} = \sqrt{2} = \frac{b}{a}$, 即 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$.

(2) 由(1)知 $b = \sqrt{2}a$, 代入 $c^2 = b^2 + \sqrt{3}a^2 = (2 + \sqrt{3})a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}a^2$, 得 $c = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$,

由余弦定理知 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + (2 + \sqrt{3})a^2 - 2a^2}{2a \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$.

评注 本题(1)问按常规做法易得;(2)问注意边之间关系需要统一,只有这样才能求出 $\cos B$ 的值,注意这些特别的数字,如: $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

变式 1 (2013 江西文 17) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A \sin B + \sin B \sin C + \cos 2B = 1$.

- (1) 求证: a, b, c 成等差数列;
- (2) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

变式 2 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $\frac{\cos A - 2\cos C}{\cos B} = \frac{2c - a}{b}$.

(1)求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

(2)若 $\cos B = \frac{1}{4}, b = 2$,求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$.

变式 3 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三内角 A, B, C 的对边, $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C - b - c = 0$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $a = 2, \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,求 b, c .

方向三:解三角形中的取值范围及最值问题

解法突破:三角函数中的最值问题一般都是利用代数变换化为所求量的函数式,用求函数最值的方法(如二次函数法、基本不等式法)求解.

【例 1.11】 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且满足 $\frac{2c - b}{a} = \frac{\cos B}{\cos A}$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $a = 2\sqrt{5}$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

分析 (1)边、角混合式子,先统一边或角的等式(方程)求解;(2)围绕列面积函数式这一目标可化为边或角求解.

解析 (1)因为 $\frac{2c - b}{a} = \frac{\cos B}{\cos A}$,由正弦定理得 $\frac{2\sin C - \sin B}{\sin A} = \frac{\cos B}{\cos A}$,即 $2\sin C \cos A - \sin B \cos A = \sin A \cos B$,所以 $2\sin C \cos A = \sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$,在 $\triangle ABC$ 中, $\sin C \neq 0$,所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,又因为 $A \in (0, \pi)$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2)**解法一:**因为 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,且 $a = 2\sqrt{5}$,得 $b^2 + c^2 - 20 = bc \geq 2bc - 20$,

则 $bc \leq 20$ (当且仅当 $b = c$ 时,取“=”).所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq 5\sqrt{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $5\sqrt{3}$.

解法二: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \sqrt{3}R^2 \sin B \sin C$,又 $A = \frac{\pi}{3}$,得 $B + C = \frac{2\pi}{3}, C = \frac{2\pi}{3} - B$,

则 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}R^2 \sin B \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \sqrt{3}R^2 \sin B \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos B - \cos \frac{2\pi}{3} \sin B\right) = \sqrt{3}R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B \cos B + \frac{1}{2} \sin^2 B\right)$
 $= \sqrt{3}R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2B + \frac{1 - \cos 2B}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \left[\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\right],$

当 $2B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $B = \frac{\pi}{3}$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \left[\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right]^2 \times \frac{1}{4} = 5\sqrt{3}$.

评注 列面积函数式究竟化为边还是角由条件决定, 这里化为角的话思路简单, 运算较繁, 不如巧妙运用基本不等式简便.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 A, B, C 成等差数列.

(1) $b = \sqrt{13}, a = 3$, 求 c 的值;

(2) 设 $t = \sin A \sin C$, 求 t 的最大值.

变式 2 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且满足 $a^2 - 2bc \cos A = (b + c)^2$.

(1) 求角 A 的值;

(2) 若 $a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

三角函数核心预测题

【预测题一】

如图 1-5 所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的顶点在原点, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边交半个单位圆于点 A , 且 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, 将角 α 的终边绕原点逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 交单位圆于点 B , 过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C .

(1) 若点 A 的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求点 B 的横坐标;

(2) 求 $\triangle AOC$ 的面积 S 的最大值.

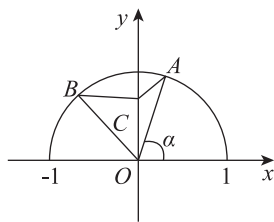


图 1-5

【预测题二】

已知函数 $f(x) = \sin x - a \cos x$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 设 $g(x) = f(x) \cdot f(-x) + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$, 求 $g(x)$ 的单调递增区间.

【预测题三】

已知函数 $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} + 2 \sin x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(3) 若 $f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $\theta \in (0, \pi)$, 求 $\cos \theta$ 的值.

【预测题四】

已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

【预测题五】

已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2 x - \cos^2 x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及图像的对称轴方程;
- (2) 设函数 $g(x) = [f(x)]^2 + f(x)$, 求 $g(x)$ 的值域.

【预测题六】

已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 其部分图像如图 1-6 所示.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 求函数 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调区间和最大值及相应 x 的值.

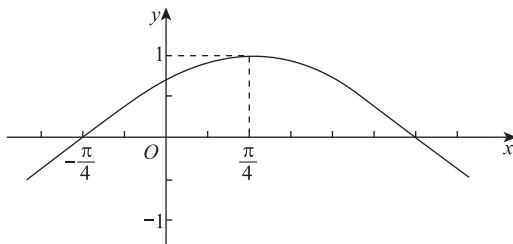


图 1-6

【预测题七】

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi, \omega > 0$) 为偶函数, 且函数 $y = f(x)$ 的图像的两相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

- (1) 求 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值;
- (2) 将函数 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 再将得到的图像上各点的横坐标伸长到原来的 4 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

【预测题八】

将函数 $y = \sin \omega x \cos \varphi - \cos \omega x \sin \varphi$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的图像上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变), 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $y = f(x)$ 的图像, 若函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$, 且相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

- (1) 求 ω, φ 的值;
- (2) 若锐角 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 成等差数列, 求 $f(A)$ 的取值范围.

【预测题九】

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, 向量 $m = (2\sin B, 2 - \cos 2B)$, $n = (2\sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}), -1)$, $m \perp n$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 $a = \sqrt{3}, b = 1$, 求 c 的值.

【预测题十】

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, b + c = 6, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 求 $\sin(A + \frac{\pi}{4}) \sin(B + C + \frac{\pi}{4})$ 的值.

【预测题十一】

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,已知 $c=2, C=\frac{\pi}{3}$.

- (1)若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$,求边 a, b ;
(2)若 $\sin C + \sin(B-A) = 2\sin 2A$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

【预测题十二】

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知 $\cos C + (\cos A - \sqrt{3}\sin A)\cos B = 0$.

- (1)求角 B 的大小;
(2)若 $a+c=1$,求 b 的取值范围.

【预测题十三】

在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,且 $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$.

- (1)求角 A 的大小;
(2)设 $a=\sqrt{3}$, S 为 $\triangle ABC$ 的面积,求 $S+3\cos B\cos C$ 的最大值,并指出此时 B 的值.