第 3 章 应变分析

3.1 位移及其分量

在外荷载、温度或其他因素作用下，弹性体内各点的位置会发生变化。位置变化包括两种情形：一种是整个物体由原来的位置移动到新的位置，另一种是物体内部各点之间距离的变化。前一种变化称为刚体位移，它包括物体的平行移动和转动，后一种称为物体的**变形**。物体的位移常包括这两种情形，本书主要研究物体的变形，涉及的**位移**是指物体内各点的相对位移，而刚性位移将进行特别说明。物体中每点的位移是不同的，因此位移是坐标的函数，如 x、y、z 的函数。在直角坐标系 $Oxyz$ 中，取物体中任意一点 $P(x,y,z)$，变形后这点移至 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，则矢量$\overrightarrow{PP_1}$ 就是物体在变形过程中 P 点的位移，将位移分别投影到 3 个坐标轴上的量，称为位移分量，用 u、v、w 来表示，则各位移分量表示为

$$u = x_1 - x, \quad v = y_1 - y, \quad w = z_1 - z$$

式中的位移分量 u、v、w 应随坐标不同而不同，构成 P 点到达 P_1 点产生的一个位移矢量，因此 u、v、w 不但是 x、y、z 的函数，也必须是单值的，即一个点产生位移后应有一个确定的位置而不能有几个位置。

3.2　应变和应变分量

物体中各点的位移导致其变形(此处讨论小变形情况)，物体的变形状态可用应变来表示。为研究一点的应变，自物体中取一与坐标平面平行的六面体，如图 3.1 所示，此平行六面体在坐标平面上各有一投影面，研究这三个投影面的变形状况就相当于描述了这个六面体的变形。这三个投影平面的变形可从两方面考虑：①每个线段长度的变化，即线段的伸长或缩短；②相邻两线段夹角的改变。

现取 Oxy 平面上的 ABC 投影面来考察其变形，见图 3.2。AB 的长为 $\mathrm{d}x$，AC 的长为 $\mathrm{d}y$，A、B、C 三点的坐标如下：

$$A(x,y),\quad B(x+\mathrm{d}x,y),\quad C(x,y+\mathrm{d}y)$$

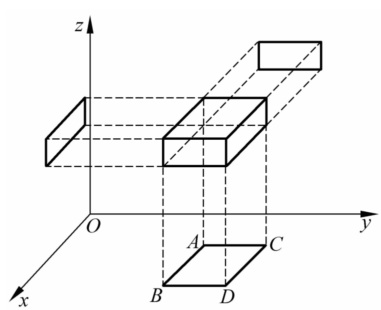

图 3.1

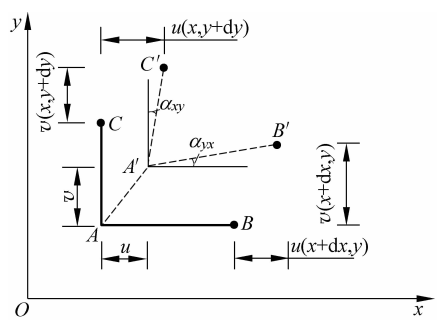

图 3.2

各点发生位移后，A、B、C 点分别移动到了 A'、B'、C' 点，则其相应的坐标如下：

$$A'[x+u(x,y),y+v(x,y)]$$
$$B'[x+\mathrm{d}x+u(x+\mathrm{d}x,y),y+v(x+\mathrm{d}x,y)]$$
$$C'[x+u(x,y+\mathrm{d}y),y+\mathrm{d}y+v(x,y+\mathrm{d}y)]$$

对上述坐标中的各位移，利用泰勒公式在 A 点展开，并略去 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 的高阶小量，则有

$$A'[x+u,y+v]$$
$$B'\left[x+\mathrm{d}x+u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x,y+v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right]$$
$$C'\left[x+u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,y+\mathrm{d}y+v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right]$$

线段 AB 长度的改变量在 x 轴上的投影是

$$\delta(\mathrm{d}x)=A'B'-AB=u(x+\mathrm{d}x,y)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$$

根据定义,AB 线段的正应变为

$$\varepsilon_x=\frac{\delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.1a}$$

同理,y 方向及 z 方向线段的正应变分别为

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.1b}$$

当正应变大于零时,表示线段伸长;反之,则表示线段缩短。

现研究相邻两线段夹角的改变。图 3.2 中,令 α_{yx} 表示 x 方向的线段向 y 方向的转动角度,则

$$\alpha_{yx}\approx\tan\alpha_{yx}=\frac{v(x+\mathrm{d}x,y)-v(x,y)}{\left(x+\mathrm{d}x+u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-(x+u)}$$

$$=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}$$

在微小变形下,$\frac{\partial u}{\partial x}$与 1 相比是一个很小的量,可以略去,于是

$$\alpha_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

同理,α_{xy}表示 y 方向的线段向 x 方向转动的角度,则

$$\alpha_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

线段 AB 与 AC 所夹直角的改变称为**剪切应变**,记作 γ_{xy}。它应是 α_{yx}与 α_{xy}的和,故有

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.2a}$$

同理,可得其余两个剪切应变:

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.2b}$$

应注意:当剪切应变大于零时,表示角度收缩;反之,表示角度张开。

至此讨论了在直角坐标系中对一点形变的描述,即用以下 6 个**应变分量**(又称**工程应变**)来表示:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

一点的应变分量不是张量，而若取 $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\gamma_{ij}$，此时符合张量运算规律，即**应变张量** ε_{ij} 为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

式(3.1)、式(3.2)反映了直角坐标系下位移和应变之间的关系，这是弹性力学中的重要基本方程之一——**几何方程**。若用张量记号，则几何方程为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$$

柱坐标下的几何方程为

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}$$

$$\gamma_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{zr}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}$$

球坐标下的几何方程为

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\cot\theta}{r}u_\theta$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}$$

$$\gamma_{\theta\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}-\frac{\cot\theta}{r}u_\varphi$$

$$\gamma_{\varphi r}=\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_{r}}{\partial\varphi}-\frac{u_{\varphi}}{r}$$

3.3 一点的形变状态

与讨论一点的应力状态相似,本节将用物体内一点 $P(x,y,z)$的应变分量来描述该点邻域内的形变状态。如图 3.3 所示,设过 P 点在 N 方向上取微线段 PN,其长度为 $\mathrm{d}r$,并令其方向余弦为(l,m,n),则线段在各坐标轴上的投影为 $\mathrm{d}x=l\mathrm{d}r,\mathrm{d}y=m\mathrm{d}r,\mathrm{d}z=n\mathrm{d}r$。

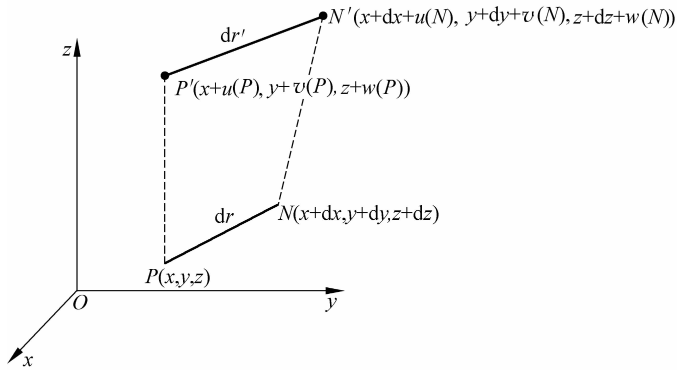

图 3.3

若 P 点的位移为 $u(P)$、$v(P)$、$w(P)$,则 N 点的位移用 P 点位移表示如下:

$$\left.\begin{aligned}u(N)&=u(P)+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\\v(N)&=v(P)+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z\\w(N)&=w(P)+\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

线段 PN 变形后变为 $P'N'$,其长度为 $\mathrm{d}r'$,则由几何关系可知

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}r')^2=&[\mathrm{d}x+u(N)-u(P)]^2+[\mathrm{d}y+v(N)-v(P)]^2\\&+[\mathrm{d}z+w(N)-w(P)]^2\end{aligned}\tag{3.4}$$

线段 PN 的正应变为

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}r'-\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}\tag{3.5}$$

将式(3.3)、式(3.5)代入式(3.4),则有

$$(\mathrm{d}r+\varepsilon\mathrm{d}r)^2=\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\right]^2+\left[\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z\right]^2+\left[\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}z\right]^2$$

将 $\mathrm{d}x=l\mathrm{d}r,\mathrm{d}y=m\mathrm{d}r,\mathrm{d}z=n\mathrm{d}r$ 代入上式，整理后有

$$(1+\varepsilon)^2=\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)l+\frac{\partial u}{\partial y}m+\frac{\partial u}{\partial z}n\right]^2+\left[\frac{\partial v}{\partial x}l+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)m+\frac{\partial v}{\partial z}n\right]^2+\left[\frac{\partial w}{\partial x}l+\frac{\partial w}{\partial y}m+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)n\right]^2$$

展开上式并略去偏微商及 ε 的二阶小量，可得

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\frac{\partial u}{\partial x}l^2+\frac{\partial v}{\partial y}m^2+\frac{\partial w}{\partial z}n^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)lm+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)mn+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)nl\\&=\varepsilon_x l^2+\varepsilon_y m^2+\varepsilon_z n^2+\gamma_{xy}lm+\gamma_{yz}mn+\gamma_{zx}nl\end{aligned}\tag{3.6}$$

从式(3.6)可以看出，弹性体内一点任一方向的长度变形可由此点的六个应变分量描述。

若 PN 在 x 轴上或与 x 轴平行，则有 $l=1,m=n=0$，得 $\varepsilon=\varepsilon_x$。

现在求过 P 点的两直线角度的变化。

如图 3.4 所示，两线段 OA 和 OB 的长度分别为 $\mathrm{d}r$ 和 $\mathrm{d}r'$，相应的方向余弦分别为(l,m,n)和(l',m',n')。经变形后，OA 变为 O_1A_1，OB 变为 O_1B_1，相应的长度是 $\mathrm{d}r_1$ 和 $\mathrm{d}r_1'$，方向余弦为(l_1,m_1,n_1)和(l_1',m_1',n_1')。

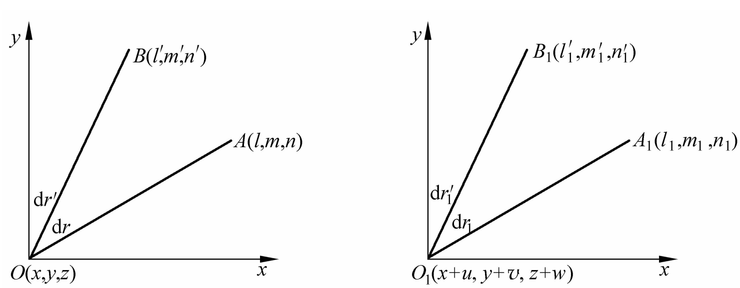

图 3.4

各点坐标如下：

$$O(x,y,z),\quad O_1(x+u,y+v,z+w),$$
$$A(x+l\mathrm{d}r,y+m\mathrm{d}r,z+n\mathrm{d}r),\quad A_1(x_1,y_1,z_1)$$

式中，

$$x_1=x+l\mathrm{d}r+u(x+l\mathrm{d}r,y+m\mathrm{d}r,z+n\mathrm{d}r)$$

$$= x + l\mathrm{d}r + u + \mathrm{d}r\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$y_1 = y + m\mathrm{d}r + v + \mathrm{d}r\left(l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$z_1 = z + n\mathrm{d}r + w + \mathrm{d}r\left(l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

线段 O_1A_1 的方向余弦应为 $\mathrm{d}r_1$ 在各坐标轴的投影长度与 $\mathrm{d}r_1$ 的比值,即

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{(\mathrm{d}r_1)_x}{\mathrm{d}r_1} = \frac{x_1 - (x+u)}{\mathrm{d}r_1} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r_1}\left[l\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}r}{(1+\varepsilon)\mathrm{d}r}\left[l\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right] \\
&= \left[l\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right]\left(1 - \varepsilon + 2\frac{\varepsilon^2}{2!} - \cdots\right)
\end{aligned}$$

展开上式,略去偏微商及 ε 的二阶微量,可得

$$\left.\begin{aligned}
l_1 &= \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n \\
m_1 &= \frac{\partial v}{\partial x}l + \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y}\right)m + \frac{\partial v}{\partial z}n \\
n_1 &= \frac{\partial w}{\partial x}l + \frac{\partial w}{\partial y}m + \left(1 - \varepsilon + \frac{\partial w}{\partial z}\right)n
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

同理,可算得 m_1、n_1。

对于 O_1B_1 线段,同样有

$$\left.\begin{aligned}
l_1' &= \left(1 - \varepsilon' + \frac{\partial u}{\partial x}\right)l' + \frac{\partial u}{\partial y}m' + \frac{\partial u}{\partial z}n' \\
m_1' &= \frac{\partial v}{\partial x}l' + \left(1 - \varepsilon' + \frac{\partial v}{\partial y}\right)m' + \frac{\partial v}{\partial z}n' \\
n_1' &= \frac{\partial w}{\partial x}l' + \frac{\partial w}{\partial y}m' + \left(1 - \varepsilon' + \frac{\partial w}{\partial z}\right)n'
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

式(3.7)和式(3.8)中,ε 和 ε' 分别为 OA 和 OB 的正应变,其值可由式(3.6)求得。

若 θ 为 OA 和 OB 的夹角,变形后 O_1A_1 和 O_1B_1 的夹角为 θ_1,由几何知识则有

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\theta = ll' + mm' + nn' \\
&\cos\theta_1 = l_1l_1' + m_1m_1' + n_1n_1' \\
&\cos\theta_1 - \cos\theta = l_1l_1' + m_1m_1' + n_1n_1' - ll' - mm' - nn' \\
&\qquad = 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') + \gamma_{xy}(lm' + l'm) \\
&\qquad\quad + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{zx}(nl' + n'l) \\
&\qquad\quad - (\varepsilon + \varepsilon')\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

与式(3.6)相似,一点的任意两直线夹角的改变可由该点的六个应变表示。

至此,一点邻域内的变形情况完全可以用 6 个应变分量进行确定。感兴趣的读者可推出两个相互垂直的线段夹角的改变量。

3.4　主应变与体积应变

物体在变形过程中,过一点的线段 PA 只沿着它原来的方向伸长或缩短时,如图 3.5 所示,该方向的应变称为**主应变**,或者说在变形过程中该线段的方向保持不变,则线段在该方向上的伸长量或缩短量就是主应变。主应变的方向称为**应变主方向**。

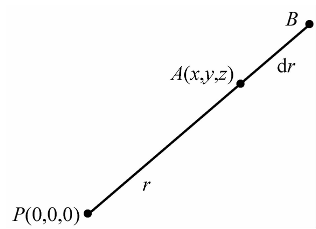

图 3.5

由式(3.6)来计算 ε 的极值时,可求出一点的主应变。设 ε_N 为主应变,它是一个未定常数,又有 $l^2+m^2+n^2=1$,可将式(3.6)变形如下:

$$\varepsilon-\varepsilon_N=\varepsilon_x l^2+\varepsilon_y m^2+\varepsilon_z n^2+\gamma_{xy}lm+\gamma_{yz}mn+\gamma_{zx}nl-\varepsilon_N(l^2+m^2+n^2)$$

现在选择方向求出 ε 的极值,即对 l、m、n 求导并令其为零:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\varepsilon-\varepsilon_N)}{\partial l}&=2(\varepsilon_x-\varepsilon_N)l+\gamma_{xy}m+\gamma_{zx}n=0\\\frac{\partial(\varepsilon-\varepsilon_N)}{\partial m}&=\gamma_{xy}l+2(\varepsilon_y-\varepsilon_N)m+\gamma_{yz}n=0\\\frac{\partial(\varepsilon-\varepsilon_N)}{\partial n}&=\gamma_{zx}l+\gamma_{zy}m+2(\varepsilon_z-\varepsilon_N)n=0\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

由于 ε_N 与 l、m、n 无关,求 $(\varepsilon-\varepsilon_N)$ 的极值,就是求 ε 的极值。当 ε 达到极值时,主应变的方向余弦 (l,m,n) 应满足式(3.10),由于 l、m、n 不能同时为零,所以式(3.10)对于 l、m、n 的非零解的条件为

$$\begin{vmatrix}2(\varepsilon_x-\varepsilon_N) & \gamma_{xy} & \gamma_{zx}\\ \gamma_{xy} & 2(\varepsilon_y-\varepsilon_N) & \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & 2(\varepsilon_z-\varepsilon_N)\end{vmatrix}=0$$

将此式展开得

$$\varepsilon_N^3-I_1\varepsilon_N^2-I_2\varepsilon_N-I_3=0\tag{3.11}$$

式中,I_1、I_2、I_3 **为应变张量的第一、第二、第三不变量**。此处应变不变量所

用符号与应力的不变量相同,目的是强调张量的运算规律。具体用应变分量表示为

$$
\left.\begin{aligned}
I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\
I_2 &= \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x \\
&= \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) - \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x \\
I_3 &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} - \varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y\varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z \\
&\quad + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z\gamma_{xy}^2)
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}
$$

由方程(3.11)可解出三个实根,分别记为 ε_1、ε_2、ε_3,称为**主应变**,其相应的方向余弦根据式(3.10)及条件 $l^2+m^2+n^2=1$ 求得,方法同应力主方向的求法。

由代数知识可以证明方程(3.11)一定存在三个实根。因此,有如下结论:

(1) 主应变都是实数。

(2) 主方向彼此正交。

(3) 当方程(3.11)有二重根时,相应的主方向是不确定的,满足式(3.10)的平面内的任何两个正交方向都可选为主方向,而第 3 个方向与该平面垂直。若方程(3.11)有 3 重根,即 3 个根相等,则过 P 点的任意 3 个彼此垂直的方向都可选作应变主方向,显然,此时该点邻域内的变形为均匀膨胀或均匀收缩。

体积应变即弹性体在变形前、后单位体积的改变。考察一正平行六面微元体,其体积为 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。由于剪切变形所引起体积的改变是高阶微量,可略去不计。单位体积的改变可认为仅由于边 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 的伸长或缩短而引起。变形后这个平行六面微元体的体积为

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}x(1+\varepsilon_x)\mathrm{d}y(1+\varepsilon_y)\mathrm{d}z(1+\varepsilon_z)$$

单位体积的改变为 θ:

$$\theta = \frac{\mathrm{d}x(1+\varepsilon_x)\cdot\mathrm{d}y(1+\varepsilon_y)\cdot\mathrm{d}z(1+\varepsilon_z) - \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

略去高阶微量得

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{3.13}$$

即**体积应变等于应变张量的第一不变量**。体积应变还可用位移表示为

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.14}$$

3.5　协 调 方 程

几何方程中六个应变分量由三个位移分量确定。从数学方面考虑，六个应变分量之间存在一定的关系。从物理性质方面考虑，变形在弹性范围内，弹性体介质变形前后都应是连续的，而且变形前的任一点在变形后有一确定位置，即不产生缝隙，也不会有重叠现象。这就要求描述一点变形的六个应变分量必须遵从一定的规律，即它们之间有一定的约束要求，这些约束关系就是**变形的协调方程**。下面推导这些方程。

由几何方程得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

将上两式相加得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{3.15a}$$

类似地可得另外两个相似方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned}\right\} \tag{3.15b}$$

又

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

上面的第二式、第三式相加，减去第一式，并对 z 求导有

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \tag{3.15c}$$

类似地还可得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) &= 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x}\right) &= 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{3.15d}$$

变形协调方程可用张量表示为

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$