第3章

空间力系

工程中常见物体所受各力的作用线并不都在同一平面内，而是空间分布的，这样的力系称为**空间力系**(system of forces in space)。如图 3.1 所示的传动轴受力。

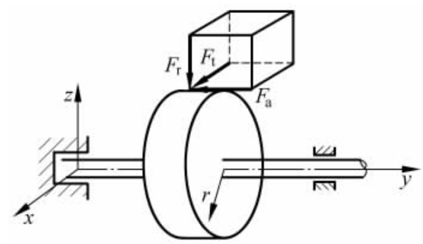


图 3.1

本章将平面力系的基本方法进一步推广，研究空间力系的简化和平衡问题。空间力系又可分为空间汇交力系、空间平行力系及空间任意力系。要解决物体在空间力系作用下的平衡问题，首先要掌握空间力在坐标轴上的投影和力对轴之矩的概念和计算。

3.1 力在空间直角坐标轴上的投影

1. 直接投影法

已知空间力 $\boldsymbol{F}$ 与正交坐标系 $Oxyz$ 三轴间的夹角分别为 α、β、γ，如图 3.2 所示，则力在三个轴上的投影等于力 $\boldsymbol{F}$ 的大小乘以与各轴夹角的余弦，即

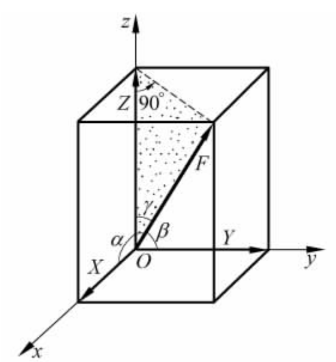


图 3.2

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha \\ Y &= F\cos\beta \\ Z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

2. 二次投影法

当力 $\boldsymbol{F}$ 与坐标轴 Ox、Oy 间的夹角不易确定时，可把力 $\boldsymbol{F}$ 先投影到坐标平面 Oxy 上，得到力 $\boldsymbol{F}_{xy}$，然后再把这个力投影到 x、y 轴上。在图 3.3 中，已知角 γ 和 φ，则力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} X &= F\sin\gamma\cos\varphi \\ Y &= F\sin\gamma\sin\varphi \\ Z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

若以 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 沿直角坐标轴 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 的正交分量，以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 坐标轴方向的单位矢量(图 3.4)，则

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{3.3}$$

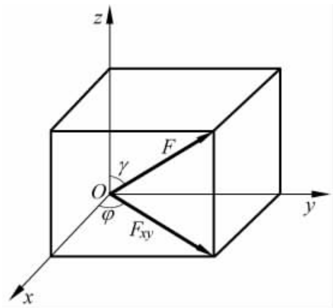


图 3.3

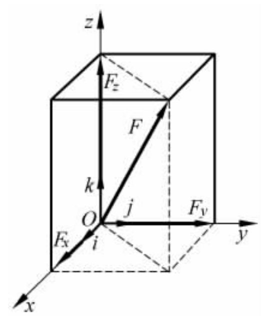


图 3.4

由此，力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影和力沿坐标轴的正交分矢量间的关系可表示为

$$\boldsymbol{F}_x = X\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F}_y = Y\boldsymbol{j}, \boldsymbol{F}_z = Z\boldsymbol{k} \tag{3.4}$$

如果已知力 $\boldsymbol{F}$ 在正交轴系 $Oxyz$ 的三个投影，则力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} &F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ &\cos\alpha = \frac{X}{F}, \cos\beta = \frac{Y}{F}, \cos\gamma = \frac{Z}{F} \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

例 3.1 半径 r 的斜齿轮，其上作用力 $\boldsymbol{F}$，如图 3.5(a)所示。求力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影。

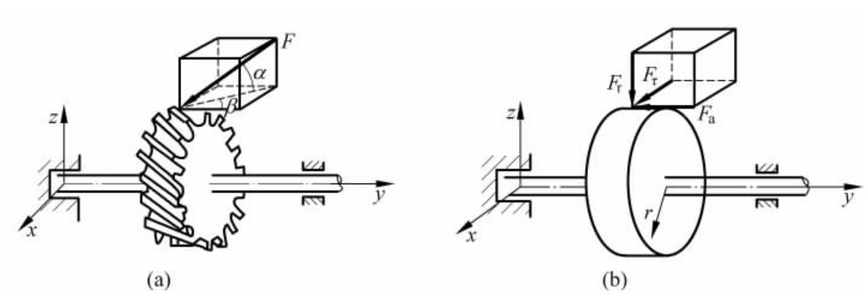


图 3.5

解 用二次投影法求解。由图 3.5(b)得

$$X = F_\tau = F\cos\alpha\sin\beta \quad (圆周力)$$
$$Y = F_a = -F\cos\alpha\cos\beta \quad (轴向力)$$
$$Z = F_r = -F\sin\alpha \quad (径向力)$$

3.2 力对轴之矩

在日常生活中和工程实际中，常常遇到绕轴转动的物体，如门窗、齿轮、传动轴等。**力对轴之矩**(moment of force about an axis)是力使物体绕轴转动效应的度量。

1. 定义

力 $\boldsymbol{F}$ 作用在刚体上 A 点使刚体绕 z 轴转动(图 3.6 (a))。力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴之矩 $M_z(\boldsymbol{F})$等于该力在与 z 轴垂直的平面上的投影 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对轴与平面交点 O 之矩 $M_O(\boldsymbol{F}_{xy})$，即

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \times h = \pm 2S_{\triangle AOb} \tag{3.6}$$

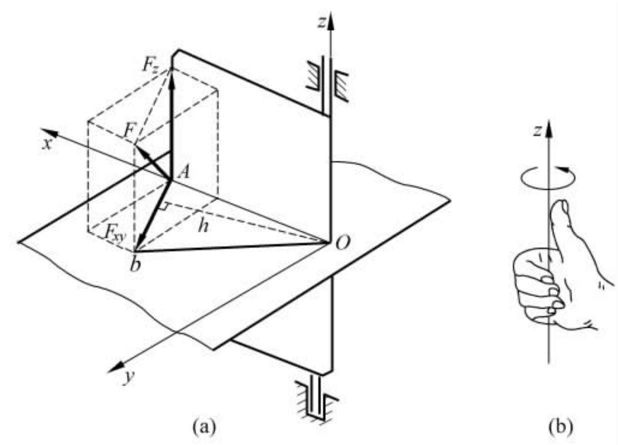


图　3.6

力对轴之矩是代数量，表示力矩的大小和转向，并按右手法则确定其正负号，如图 3.6(b)所示，四指为刚体转动方向，拇指指向与 z 轴一致为正，反之为负。

由上述定义可知：力与 z 轴平行则 $F_{xy}=0$ 或力与 z 轴相交则 $h=0$ 时，力对该轴之矩等于零。

2. 力对轴之矩的解析式

力 $\boldsymbol{F}$ 作用在刚体上的 $A(x,y,z)$点，如图 3.7 所示。

X,Y,Z 分别为力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上投影。由合力矩定理得到力对三轴之矩

$$\left.\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{F}) &= yZ - zY \\ M_y(\boldsymbol{F}) &= zX - xZ \\ M_z(\boldsymbol{F}) &= xY - yX \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

式中各量均为代数量。

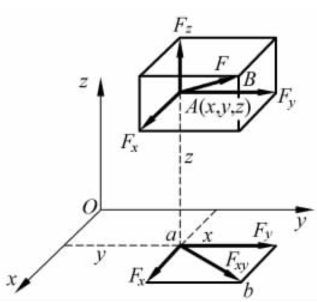


图　3.7

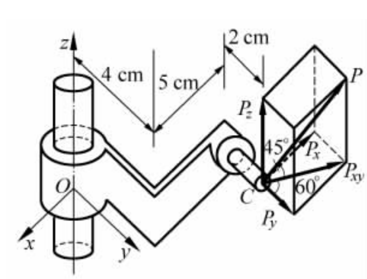


图　3.8

例 3.2 图 3.8 所示 $\boldsymbol{P}$ 作用在 C 点。已知：C 点在 Oxy 平面内，$P=2000$ N。求：力 $\boldsymbol{P}$ 在三轴的投影与对三轴之矩。

解 应用二次投影法求力在轴上的投影

$$\left.\begin{aligned} X &= -P\cos45^\circ\sin60^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2}P \\ Y &= P\cos45^\circ\cos60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}P \\ Z &= P\sin45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}P \end{aligned}\right\}$$

力 P 的作用点 C 坐标分别为：$x=-5$ cm，$y=6$ cm，$z=0$。利用式(3.7)，求力 P 对三轴之矩：

$$M_x = yZ - zY = 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}P = 84.8\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = zX - xZ = -(-5)\times\frac{\sqrt{2}}{2}P = 70.7\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = xY - yX = -5\times\frac{\sqrt{2}}{4}P - 6\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}P\right) = 38.2\ \text{N}\cdot\text{m}$$

3.3 空间力系的平衡方程及其应用

由平面任意力系的简化结果，推导出其平衡方程：$\sum X=0$，$\sum Y=0$，$\sum M_O=0$。从物理意义上说明，该平面力系对物体的移动效应和转动效应均为零，使物体处于平衡状态。把平面力系推广到空间力系，空间任意力系作用下平衡，则沿空间坐标 x，y，z 三轴线的移动效应和绕 x，y，z 三轴线的转动效应均为零，得到其 6 个平衡方程

$$\left.\begin{aligned} &\sum X=0, \sum Y=0, \sum Z=0 \\ &\sum M_x=0, \sum M_y=0, \sum M_z=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

即，空间任意力系平衡的充要条件为所有各力在每一个轴上投影的代数和等于零，且对于每一个坐标轴之矩的代数和也等于零。

空间任意力系的平衡条件包含各种空间特殊力系的平衡条件。下列为空间特殊力系的平衡方程。

1. 空间汇交力系

空间力系中各力作用线汇交于一点，称为空间汇交力系，其平衡方程为

$$\sum X=0, \sum Y=0, \sum Z=0 \tag{3.9}$$

2. 空间平行力系

设物体受一空间平行力系作用，如图 3.9 所示。令 z 轴与这些力平行，则力系对于 z 轴的矩等于零，力系在 x，y 轴上的投影为零。因此，空间平行力系只有三个平衡方程，即

$$\sum Z = 0,\ \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\ \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0 \tag{3.10}$$

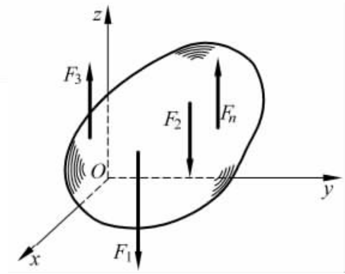


图 3.9

例 3.3 图 3.10(a)所示,重 $P=1000$ N 的均质薄板用止推轴承 A、径向轴承 B 和绳索 CE 支持在水平面上,可以绕水平轴 AB 转动,今在板上作用一力偶,其力偶矩为 M,并设薄板平衡。已知 $a=3$ m,$b=4$ m,$h=5$ m,$M=2000$ N·m,试求绳子的拉力和轴承 A、B 的约束反力。

解 (1) 研究均质薄板,受力分析,受力图如图 3.10(b)所示。

(2) 选坐标系 $Axyz$,列出平衡方程:

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0: M - F_{By} \times 4 = 0$$

$$F_{By} = 500 \text{ N}$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0: -P \times \frac{a}{2} + F_C \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$$

$$F_C = 707 \text{ N}$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0: -F_{Bz} \times b + P \times \frac{b}{2} - F_C \times \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0$$

$$F_{Bz} = 0$$

$$\sum Z = 0: F_{Bz} + F_{Az} - P + F_C \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F_{Az} = 500 \text{ N}$$

$$\sum X = 0: F_{Ax} - F_C \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = 0$$

$$F_{Ax} = 400 \text{ N}$$

$$\sum Y = 0: -F_{By} + F_{Ay} - F_C \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} = 0$$

$$F_{Ay} = 800 \text{ N}$$

约束反力的方向如图 3.10(b)所示。

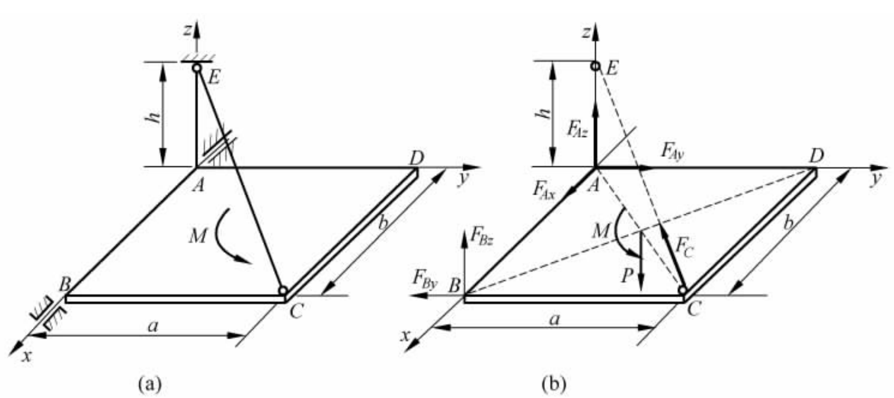


图 3.10

3.4 重心和形心

1. 重心概念及其坐标公式

物体各部分所受重力的合力的作用点称为物体的**重心**（center of gravity）。如将重为 P 的物体分成许多体积为 V_i、重为 P_i 的微块，有 $P=\sum P_i$。取图 3.11 坐标系，重心 C 和微块坐标（x_i，y_i，z_i）如图 3.11 所示。由合力矩定理得重心坐标公式：

$$x_C=\frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}\quad Y_C=\frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}\quad Z_C=\frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}\tag{3.11}$$

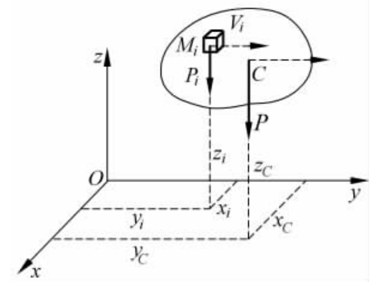


图 3.11

如果物体均质，单位体积的重量 γ 为常数，以 V_i 表示微块体积，物体总体积为 $V=\sum V_i$。将 $P_i=\gamma V_i$，$P=\gamma V$ 代入式(3.11)，得

$$x_C=\frac{\sum V_i x_i}{V},\ y_C=\frac{\sum V_i y_i}{V},\ z_C=\frac{\sum V_i z_i}{V}\tag{3.12}$$

式(3.12)实际上表达的是物体的形状中心，即**形心**（centroid）位置的计算公式。可见，均质物体的重心恰好就是该物体的形心。

工程中常采用薄壳结构，例如厂房的顶壳、薄壁容器、飞机机翼等，薄壳厚度 t 与其表面积 S 相比是很小的。若薄壳是均质等厚的，将其分成许多微块，面积为 S_i，体积为 $V_i=S_i t$，代入式(3.12)，则其重心公式为

$$x_C=\frac{\sum S_i x_i}{S},\ y_C=\frac{\sum S_i y_i}{S},\ z_C=\frac{\sum S_i z_i}{S}\tag{3.13}$$

如果物体是均质等截面的细长线段，其横截面积 A 与其总长度 l 相比是很小的，取微段的长度 l_i，体积 $V_i=Al_i$，代入式(3.12)，则其重心公式为

$$x_C=\frac{\sum l_i x_i}{l},\ y_C=\frac{\sum l_i y_i}{l},\ z_C=\frac{\sum l_i z_i}{l}\tag{3.14}$$

2. 确定物体重心位置的方法

1）对称物体

具有对称面、对称轴和对称中心的形状规则的均质物体，其重心一定在对称面、对称轴和对称中心上。

2）组合物体

常用分割法确定重心位置。将物体分成若干形状简单、重心位置易求出的物体，由式(3.12)、式(3.13)、式(3.14)求解。

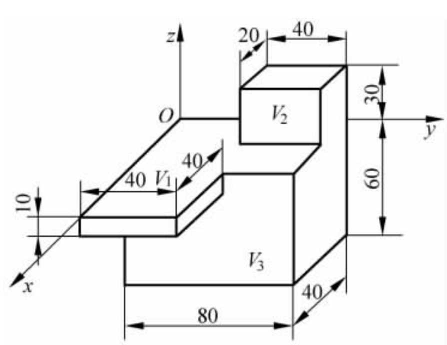


图 3.12

例 3.4 均质块尺寸如图 3.12 所示，求其重

心的位置。

解　均质物体的重心为形心。将该均质块视为三个简单六面体的组合，其形心位置 $C(x_C,y_C,z_C)$可采用式(3.12)计算

第一块六面体，体积 $V_1=40\times40\times10\ \text{mm}^3$，其形心坐标$(60,20,-5)$，

第二块六面体，体积 $V_2=40\times30\times20\ \text{mm}^3$，其形心坐标$(10,60,15)$，

第三块六面体，体积 $V_3=80\times40\times60\ \text{mm}^3$，其形心坐标$(20,40,-30)$，

$$x_C=\frac{\sum V_ix_i}{V}=\frac{40\times40\times10\times60+20\times40\times30\times10+80\times40\times60\times20}{40\times40\times10+20\times40\times30+80\times40\times60}=21.72\ \text{mm}$$

$$y_C=\frac{\sum V_iy_i}{V}=\frac{40\times40\times10\times20+20\times40\times30\times60+80\times40\times60\times40}{40\times40\times10+20\times40\times30+80\times40\times60}=40.69\ \text{mm}$$

$$z_C=\frac{\sum V_iz_i}{V}=\frac{40\times40\times10\times(-5)+20\times40\times30\times15+80\times40\times60\times(-30)}{40\times40\times10+20\times40\times30+80\times40\times60}=23.62\ \text{mm}$$

例 3.5　试求图 3.13 所示平面图形形心位置，尺寸单位为 mm。

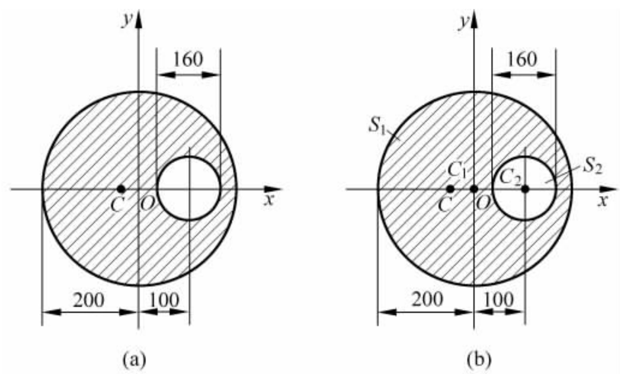


图　3.13

解　将图形看成大圆 S_1 减去小圆 S_2，形心为 C_1 和 C_2；在图示坐标系中，x 轴是图形对称轴，则有 $y_C=0$。两个图形的面积和形心：

$$S_1=\pi\times200^2=40000\pi\ \text{mm}^2,x_{C1}=0$$

$$S_2=\pi\times80^2=6400\pi\ \text{mm}^2,x_{C2}=100\ \text{mm}$$

采用式(3.13)计算图形的形心坐标：

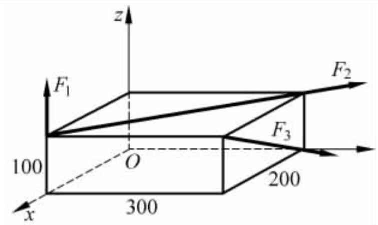
$$x_C=\frac{\sum S_ix_i}{\sum S_i}=\frac{-6400\pi\times100}{40000\pi-6400\pi}=-19.05\ \text{mm}$$

$$y_C=0$$

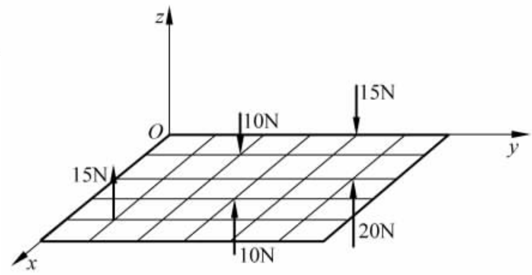
习题

3.1　力系中 $F_1=100$ N，$F_2=300$ N，$F_3=300$ N，力作用线的位置如图所示。求力系在各轴上的投影及力系对各轴之矩，图中尺寸单位为 mm。

3.2　一平行力系由5个力组成，力的大小和作用线的位置如图所示，图中小正方格的边长为10 mm，求平行力系的合力。

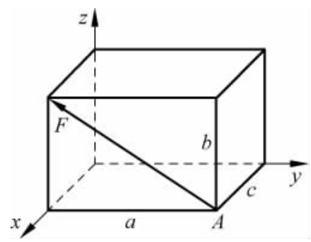


习题3.1图



习题3.2图

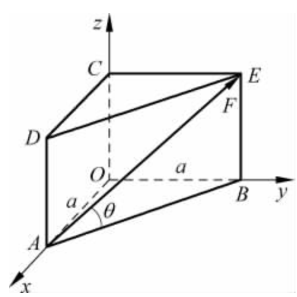
3.3　如图所示，在边长为a、b、c的长方体的点A，作用有力F，求力F对x、y、z轴之矩$M_x(F)$、$M_y(F)$、$M_z(F)$。



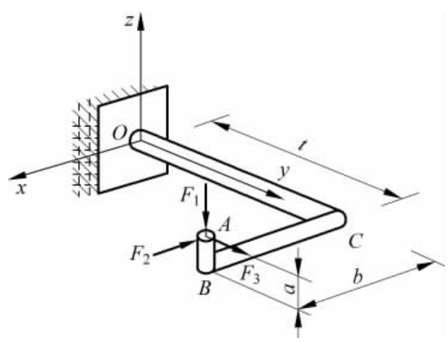
习题3.3图

3.4　如图所示，正三棱柱的底面为等腰三角形，$OA=OB=a$，在平面$ABED$内有一沿对角线AE作用的力F，力F与AB边的夹角$\theta=30°$，求此力对坐标轴之矩$M_x(F)$、$M_y(F)$、$M_z(F)$。

3.5　构件$ABCO$如图所示，其中AB段与z轴平行，BC段与x轴平行，CO段与y轴重合，$AB=a$，$BC=b$，$OC=l$，力F_1、F_2和F_3作用在A点，F_1与z轴平行，F_2与x轴平行，F_3与y轴平行，$F_1=F_2=F_3=F_4$。试求：该力系对x、y和z轴之矩。



习题3.4图

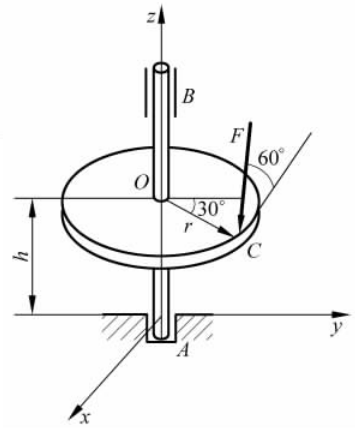


习题3.5图

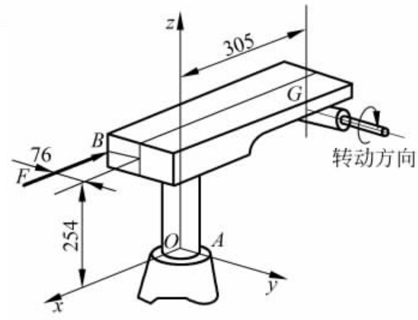
3.6　水平圆盘的半径为r，外缘C点有一作用力F。力F位于圆盘C处的切平面内，且与C处圆盘切线夹角为60°，其他尺寸如图所示。求力F对x，y，z轴之矩。

3.7　图示结构由立柱、支架和电动机组成，总重$P=300$ N，重心位于与立柱垂直中心线相距305 mm的G点，立柱固定在基础A上，电动机按图示方向转动，并驱动力矩$M=190$ N·m带动机器转动，力$F=250$ N作用在支架B。求支座A的约束反力，图中尺寸单位为mm。

3.8　如图所示，$F_1=100\sqrt{2}$ N、$F_2=200\sqrt{3}$ N，分别作用在正方体的顶点A和B处。求(1)此力系向O点简化的结果；(2)其最终简化结果。

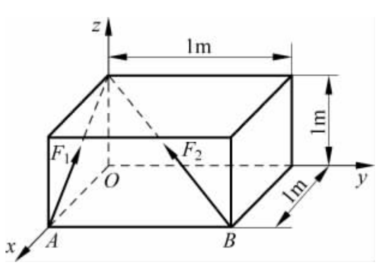


习题 3.6 图

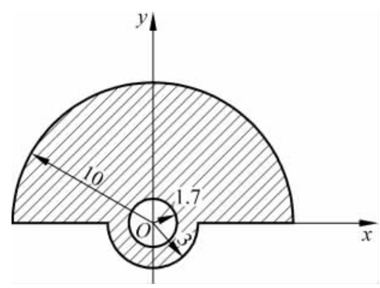


习题 3.7 图

3.9　振动沉桩器中的偏心块尺寸如图所示，单位为 cm。求其重心。



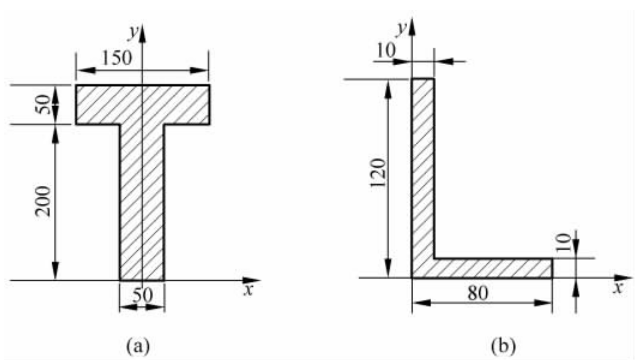
习题 3.8 图



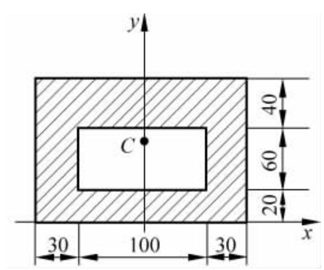
习题 3.9 图

3.10　试求图示两平面图形形心 C 的位置，图中尺寸单位为 mm。

3.11　求图示平面图形形心位置，尺寸单位为 mm。



习题 3.10 图



习题 3.11 图