

译者引言

(第 1~5 章简介)

本书讲述机电一体化系统的基础知识,给出系统设计(如系统结构、建模以及动态分析等)的主要方法,提出有助于理解有关物理现象的典型动态模型,并且针对一些实例讨论说明机电一体化系统设计与分析的概念和思路。本书包括 380 余幅插图和 50 余个设计示例(均有完整解答),不仅清晰说明了机电系统设计的基本方法和概念,而且便于读者自学这些概念和方法。本书由 Springer 出版社 2010 年出版德文原版,2012 年出版英文翻译版,受到国际学术界广泛好评。

考虑到原书篇幅较长,中译本分为内容相对独立的 2 本:《机电系统设计方法、模型及概念:建模、仿真及实现基础》(原书第 1~5 章,以下简称“建模与仿真篇”)和《机电系统设计方法、模型及概念:实现、控制及分析》(原书第 6~12 章和附录,以下简称“控制与分析篇”)。

“建模与仿真篇”主要阐述多域建模(基于能量,端口或者信号),仿真问题以及两种基本的功能实现(多体动力学和通用机电变送器)。“控制与分析篇”主要内容包括三种具体变送器功能实现方法(即静电、压电以及电磁作用变送器),机电系统的主要控制方法(特别是鲁棒控制方法),随机动态分析以及基于系统预算的设计定量评价。基于“建模与仿真篇”第 5 章的通用机电变送器建模方法,“控制与分析篇”第 6~8 章分别给出了静电、压电以及电磁和电动力变送器的形式化描述,并使用解析动态模型实现物理与技术领域的机电一体化功能,如第 8 章的“电磁动作变送器”和第 9 章的“数字信息处理”。

本书是许多应用领域实际机电系统研发的必备书籍,突出特色包括理论方法和实际应用的紧密结合以及系统性和自足性。本书对机电系统建模、控制及分析例子的背景知识进行了全面阐述,读者无需参考关于应用系统的专门书籍。

基于数学模型可以对机电系统进行动态分析和深入理解。本书给出了建模(第 2 章)、仿真(第 3 章)、控制(第 10 章)、随机动态分析(第 11 章)及系统预算(第 12 章)的一般原理和方法,也着重考虑了机电系统建模的特殊性,如多域建模(第 2 章)和多体动力学(第 4 章)。与其他教材相比,这是一种具有很新视角的表述方式。

很多同类书的论述焦点过早转移到了具体传感器与执行器技术或具体的实现领域。第 5 章说明这样做既不必要也不合理。在第 5 章中,通过使用一种通用变送器模型,讨论了与独立于任何具体物理转换现象的变送器电力耦合和传递特性的共性:力生成、电学性质、因果结构及动态模型。将第 2 章“建模基础”中的三种方法恰当结合起来。从本构方程(即自然定律或基本原理)出发,首先采用欧拉-拉格朗日方程进行基于能量的建模,由此导出一种特殊的二端口参数化(考虑电压源或电流源、有损耗变送器以及刚体或多体负载)和传递函数矩阵形式的模型。这种通用机电变送器是理解电力耦合变送器原理和以后各章中变送器物理原理及其表示的模型框架和方法论。这种表示的广度和适用范围都是全新的。

机电系统的任何实现都包括机械结构和嵌入式信息处理,分别在第 4 章“多体动力学”

和第9章“数字信息处理”中进行了深入的机理建模。从机电一体化的观点来看,能量守恒现象是我们特别感兴趣的,第6~8章详细考虑了三种具有广泛工业应用的静电、压电以及电磁动作变送器的能量守恒原理。虽然这些讨论考虑了领域专门的具体物理与技术(从本构定律到结构实现类型),但与第5章的通用机电变送器模型完全融洽。本书在广度、模型细节以及表述一致性等方面与现有教材完全不同,现有教材往往只深究特殊物理原理或采用特殊模型表示(并不适于面向控制的动态分析)。

深入阅读和研究本书一般需要电气工程、力学、嵌入式信息处理、系统理论及控制理论的基础知识。该书的目标读者除了电气工程、机械工程、机电一体化、计算机科学等专业的教师、研究生和高年级本科生之外,也包括汽车工程、铁道工程、航海工程、航天、电气传动工程、自动化、机床、机器人、医疗设备、微系统等工业领域的机电一体化系统研发人员。

本书许多内容具有明显的跨学科(数学、物理、电子工程、机械工程、控制系统、信号处理、航天、材料等)性质,为了保证对原著技术内容的精准传达,中文译本尽量以直译为主。最后,敬请读者对中译本可能出现的错误纰漏予以批评指正。

此处列出“建模与仿真篇”的目录,供读者参考。

目 录

译者引言	1
第1章 绪论	3
1.1 机电一体化与机电一体化系统	3
1.2 系统设计	8
1.3 基本实例	13
1.3.1 具有自适应光学的望远镜	13
1.3.2 光机电遥感相机	22
1.4 本书内容简介	27
本章参考书目	30
第2章 建模基础	33
2.1 系统工程背景	33
2.2 具有结构化分析的系统建模	38
2.2.1 定义	39
2.2.2 顺序原则	40
2.2.3 结构化分析的建模要素	41
2.2.4 产品实例:自动调焦照相机	45
2.2.5 其他建模方法	50
2.3 机电系统建模范式	52
2.3.1 广义功率与能量	53
2.3.2 基于能量的建模:拉格朗日形式化	57
2.3.3 基于能量的建模:汉密尔顿方程	61

2.3.4	多端口建模：基尔霍夫网络	62
2.3.5	多端口建模：键合图	72
2.3.6	能量/多端口建模：端口汉密尔顿系统	72
2.3.7	信号耦合网络	74
2.3.8	模型的因果性	77
2.3.9	机电系统的模块化建模	82
2.4	微分代数方程组	92
2.4.1	DAE 系统简介	92
2.4.2	DAE 指标检验	93
2.4.3	DAE 指标约简	96
2.5	混杂系统	97
2.5.1	混杂系统的一般结构	97
2.5.2	混杂现象	99
2.5.3	网络状态模型	100
2.6	线性系统模型	103
2.6.1	非线性状态空间模型的局部线性化	104
2.6.2	非线性 DAE 系统的局部线性化	106
2.6.3	LTI 系统的传递函数与频率响应	107
2.7	频率响应的实验确定	110
2.7.1	一般考虑	110
2.7.2	方法	111
2.7.3	通过噪声激励的频率响应测量	112
	本章参考文献	114
第 3 章	仿真问题	118
3.1	系统工程背景	118
3.2	数值积分的基础	119
3.2.1	微分方程的数值积分	119
3.2.2	稳定性的概念	120
3.2.3	数值稳定性	121
3.3	刚性系统	124
3.4	弱阻尼系统	127
3.5	高阶线性系统	129
3.5.1	通用的数值积分方法	129
3.5.2	通过状态转移矩阵的求解方法	130
3.5.3	仿真解的精度	131
3.6	DAE 系统的数值积分	133
3.6.1	显式积分法	133
3.6.2	隐式积分法	134
3.6.3	指标-2 系统的量化	136
3.6.4	具有一致性的初值	137

3.7 混杂现象仿真的实现方法	137
3.7.1 不连续性的处理	138
3.7.2 事件检测	138
3.8 仿真实例：理想单摆	139
本章参考书目	143
第4章 功能实现：多体动力学	145
4.1 系统工程背景	145
4.2 多体系统	146
4.3 物理学基础	148
4.3.1 运动学与动力学	148
4.3.2 刚体	149
4.3.3 自由度与约束	153
4.4 多体系统的时域模型	158
4.4.1 系统设计中的模型层次	158
4.4.2 多体系统运动方程	159
4.4.3 MBS 状态空间模型	162
4.5 固有振荡	163
4.5.1 守恒多体系统的特征值问题	163
4.5.2 特征模态(本征模, Eigenmodes)	164
4.5.3 耗能多体系统	167
4.6 频域响应特性	170
4.7 测量与驱动位置	176
4.7.1 一般的多质体振荡器	176
4.7.2 多质体振荡器的零点	177
4.7.3 同位测量与驱动	180
4.7.4 非同位测量与驱动	181
4.7.5 反谐振	183
4.7.6 MBS 零点迁移	183
本章参考书目	188
第5章 功能实现：通用机电变速器	189
5.1 系统工程背景	189
5.2 一般的通用变速器模型	191
5.2.1 系统配置	191
5.2.2 建模方法	193
5.3 无负载通用变速器	197
5.3.1 基于能量的模型	197
5.3.2 ELM 变速器本构方程	205
5.3.3 ELM 二端口模型	206
5.4 负载通用变速器	212
5.4.1 基于能量的模型	212

5.4.2	非线性运动方程·····	212
5.4.3	平衡点位置：工作点·····	215
5.4.4	基于信号的变送器线性模型·····	218
5.4.5	传递矩阵·····	220
5.4.6	关于响应特性的讨论·····	221
5.5	有损变送器·····	224
5.5.1	变送器的一般特性·····	224
5.5.2	非线性模型：平衡点位置·····	226
5.5.3	基于信号的线性模型·····	228
5.5.4	带有耗能电阻的二端口本构方程·····	229
5.5.5	线性动态分析·····	230
5.5.6	一般的阻抗与导纳反馈·····	233
5.6	机电耦合系数·····	238
5.6.1	一般意义与特性·····	238
5.6.2	计算 ELM 耦合系数的模型·····	239
5.6.3	关于 ELM 耦合系数的讨论·····	243
5.7	带多体负载的变送器·····	246
5.7.1	频率响应·····	246
5.7.2	阻抗反馈与导纳反馈·····	249
5.8	机电谐振器·····	251
5.9	机电振动发电·····	253
5.10	自传感执行器·····	255
5.10.1	工作原理·····	255
5.10.2	基于信号的自传感解决方案·····	256
5.10.3	模电自传感解决方案·····	257
	本章参考书目·····	261
	中英文词汇表·····	267

第 6 章 功能实现：静电变送器

背景：静电是已知的最古老的电的表现形式。然而，直至 20 世纪末，作为微电子机械系统(MEMS)的关键组成部分，静电原理才获得了其真正的工程意义。由于这种原理只能得到物理受限、微尺度的力生成，其许多可能的传感器与执行器应用也只能在微尺度上实现。静电变送器建造相对容易(只需一些构成电极的导电材料)，因而格外受欢迎。所以，仅使用一点弹性(机动)空间(wiggle room)和空气作为电介质(dielectric)，即能以最小体积构建能移动最小质体的高精度、高动态机电系统。非常有趣的是，从 20 世纪 90 年代开始，与这类设备实现有关的很多现象才成为深入科学研究的主题。所以，未来这类机电系统一定会带来许多惊人的科技成果。

本章内容：本章讨论静电变送器行为特性的基本物理现象与技术特点。首先，在静电换能原理下，建模与仿真篇第 5 章中通用机电变送器的广义模型得以具体化。接着，详细考虑了不同的变送器配置(相对于电极表面的横向与纵向运动，使用电压源或电流源的控制)。详细讨论了对静电变送器稳态和动态行为有根本重要性的拉入(pull-in)效应的产生。讨论集中于各种差动变送器配置(梳状结构、静电轴承等)。详细考虑了实际梳状结构的动态与构造，这种结构使我们能用紧凑结构实现一种重要物理实现技术——力倍增(force multiplication)。

6.1 系统工程背景

静电变送器 使用静电现象的动力变送器是机电系统的标准组件之一，它们被用来生成力和动量(执行器)，也可用于运动测量(传感器)。然而，由于其能量密度较低，只能产生微弱的力。但是，静电原理易于微型化，因此几乎专用于微电子机械系统(microelectromechanical systems, MEMS)。从实现的观点来看，由于与电磁或压电原理相比，静电原理无须专用材料，因此特别适于微系统。至多电极需要一些导电材料(如硅)，而这些材料已是微系统技术标准材料的一部分。所以，这类变送器能在最小体积内实现最小质体的高精度动态运动。静电变送器需要直流电压源形式的辅助电能。

系统工程意义 从系统工程的观点来看，静电现象可实现的“力或力矩生成”和“机械状态测量”两种功能分别代表机电系统的执行器和传感器(见图 6.1)。这两种任务关注的是因果传递特性。为实现紧凑结构，通常将变送器元件直接集成到机械结构中。因此，除了线性和动态特性等通常的功能性质之外，与传递特性有关的结构参数依赖性在控制器设计中也起着重要作用。

机电现象 静电变送器能够储存电荷。这种存储能力可以由一种配置的电容来描述。合适的配置包括导电电极和一个封入的非导电介质(电介质)。作用在存储电荷之间的静电力可以通过活动电极传递到机械结构。电容、静电力方向和大小都取决于变送器配置的几何结构和材料性质。所以，系统设计关心的是如下模型关系：

- 电容随几何结构和材料而变化；
- 静电力随几何结构、材料及电学输入而变化；
- 包括机械动力反馈的传递特性。

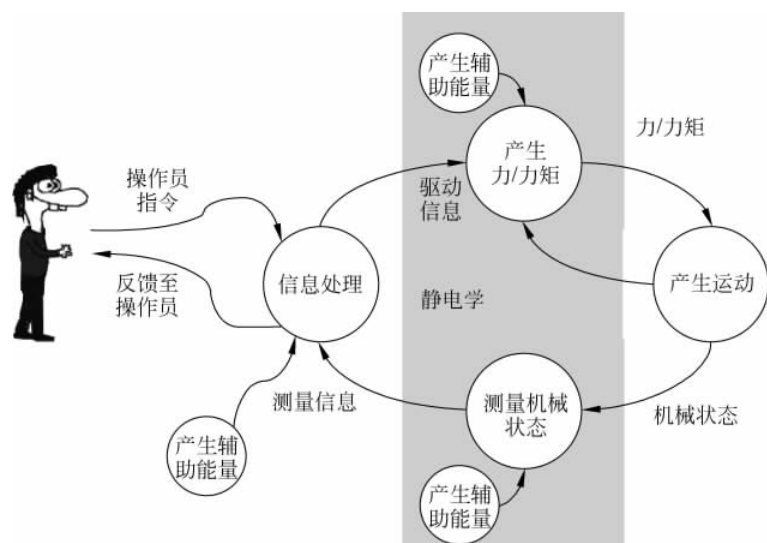


图 6.1 机电系统功能分解：使用静电学的功能实现

6.2 物理基础

静电场 通常理解的静电场是由静止电荷产生的，例如无电流场的条件¹。这种静电场存在于被绝缘介质隔开的电极之间。对于可自由移动的电极，一般选用空气作为绝缘介质。此处考虑的机电现象中，电极间绝缘体中的电场模式更为重要。

通用变速器 真实配置中的电场计算是一项复杂任务，但已超出本书的讨论范畴。本部分讨论简单的基本配置——通用静电变速器——该配置使用均匀场模式，演示系统工程相关的关系和作用。这些简单配置在初始设计和真实配置中都是实用的。当然，对于实际系统，持续的设计改进，将会在后续阶段中引入更多精确的场模型。对于上述内容及相关的更多详细潜在物理原理展示，读者请参考相关专著（如 Jackson 1999）。

麦克斯韦静电场方程：此处适用的基本物理关系由各向同性绝缘体中静电场（电极间无电荷流动）的麦克斯韦方程²所定义。这些方程的积分形式³如下（其中 s 表示区域 A 的边界曲线）：

¹ 一个更完整的假设是假设不存在或几乎不存在时变磁场，即局部恒定磁场的存在不会改变这里给出的结果。

² 詹姆斯·克拉克·麦克斯韦，1831—1879，苏格兰物理学家。以他命名的方程及相关修正首次将当时所知的电磁现象的大量经验规律总结为描述电磁学的统一的公理化结构（1865 年左右有几种版本）。

³ 麦克斯韦方程以积分形式将不同位置的物理量（即作用在区域内的量与作用在该区域边缘的其他量联系起来（远距离作用）。与积分形式相比，微分方程 $\text{curl } \vec{E} = 0, \text{div } \vec{D} = \rho$ （相应量的旋度为零、散度为 ρ ）只将作用于相同位置和相同时间的量联系起来（近距离作用）。由于描述变速器时几何形状十分重要，此处和第 8 章应用的是积分形式。

场方程：

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (6.1)$$

连续性方程：

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_C \quad (6.2)$$

材料方程：

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (6.3)$$

上式中的量包括：

- 场强 $\vec{E}$ [V/m]；
- 通量密度 $\vec{D}$ [As/m²]；
- 存储在区域 A 中的电荷 q_C [As]；
- 介电常数(或电容率, dielectric constant, permittivity) $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ [A · s/(V · m)], $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ A · s/(V · m), $\epsilon_r \geq 1$ 与材料有关。

使用公式(6.1), 可以构建如下关系

(图 6.2)。

- 静电场的标量势场 $\varphi(\vec{r})$ [V]¹

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (6.4)$$

- 电势微分(电张力或电压²) u_C [V]

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \varphi(P_1) - \varphi(P_2) \\ &=: u_C \end{aligned} \quad (6.5)$$

电容器：如图 6.2 所示的配置可以在电极中储存电荷。这种一般布局被称为电容器。由于电极的平面形状, 如图 6.2 所示的配置也被称为平电容器 (plate capacitor)。

这种很规则的配置的一个特性在于, 对于各向同性电介质, 电极间隙中的场力线 (field lines) 是均匀且平行的 (即材料性质与方向无关)。

电容：式(6.2)中, 电容电极储存的电荷与电场强度成正比, 且从式(6.5)可之, 电荷也与加在电极间的电压成正比, 据此得到前述标量关系：

$$q_C = C \cdot u_C \quad (6.6)$$

该比例常数被称为电极结构下的电容 C [As/V]。其计算如下：

$$C = \frac{q_C}{u_C} = \frac{\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \epsilon \frac{\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (6.7)$$

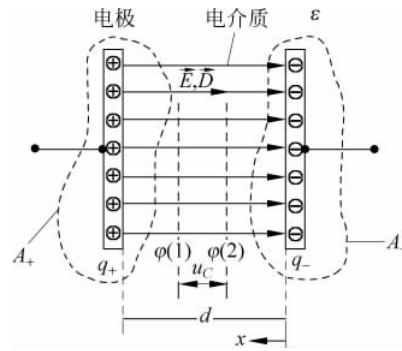


图 6.2 两个平面电极 (planar electrodes) 之间的静电场 (平行极板电容器, 均匀场)

¹ 注：从式(6.1)的无旋度性质, 可得 $\nabla\varphi = \vec{0}$ 。

² 也称为极化电压, 因为电场在非金属中通过电介质极化 (dielectric polarization) 进行传播。

电容取决于材料绝缘特性(ϵ)和电极尺寸。

平行板极电容器(plate capacitor)的电容：对于具有移动电极的平板电容器(图 6.2 中 x 为距离静止位置的位移),设式(6.7)中电场匀质(homogenous field),则可得基本电容关系如下:

$$C(x) = \frac{q_c}{u_c} = \frac{\|\vec{D}\| A}{\|\vec{E}\| (d-x)} = \frac{\epsilon \|\vec{E}\| A}{\|\vec{E}\| (d-x)} = \frac{\epsilon A}{d-x} \quad (6.8)$$

其中 A 表示平板电极的面积。

6.3 通用静电变送器

6.3.1 系统结构

电极结构 实现变送器功能的静电力的产生可以通过多种途径获得。其本质在于可动电极将机械能转化为电能,或者电能转化为机械能。该可动电极能与合适的机械结构连接以接受力的作用。图 6.3 展示了电极配置的原理图,其中,运动发生于垂直电极的方向(对应可变的电极间距)。通常条件下,给定电极间距条件下,电极的纵向运动也是可行的。

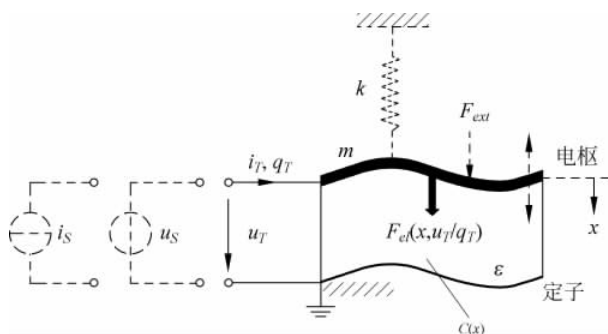


图 6.3 单机械自由度通用静电变送器的工作原理(电极做一维运动,其运动方向与电极表面垂直)。虚线表示电压源或电流源的外部负载和一个弹性悬挂

绝缘体 通常,绝缘介质为空气,气隙的几何决定了电极可能的运动范围以及可用的变送器行程(transducer travel)。

悬挂 鉴于静电力的优点,运动电极必须弹性地悬挂(除了差动变送器,见 6.6.4 节)。

6.3.2 静电变送器本构方程

基本的静电本构方程 如图 5.7(b)所示的电能量变量 q_T 和电功率变量 $\dot{\phi}_T = u_T$ 的基本关系由式(6.6)给出(通过电场耦合),即

$$q_T = C(x) \cdot \dot{\phi}_T = C(x) \cdot u_T \quad (6.9)$$

ELM 变送器本构方程 结合 5.3.2 节中的结果(见表 5.3),由式(6.9)的本构关系可直接导出不同坐标下静电变送器的 ELM 变送器本构方程:

• PSI 坐标

$$\begin{cases} F_{el,\Psi}(x, u_T) = \frac{1}{2} \frac{\partial C(x)}{\partial x} u_T^2 \\ i_T(x, \dot{x}, u_T, \dot{u}_T) = C(x) \cdot \dot{u}_T + \frac{\partial C(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \cdot u_T \end{cases} \quad (6.10)$$

• Q 坐标

$$\begin{cases} F_{el,Q}(x, q_T) = \frac{1}{2} \frac{1}{C(x)^2} \frac{\partial C(x)}{\partial x} q_T^2 \\ u_T(x, q_T) = \frac{1}{C(x)} \cdot q_T \end{cases} \quad (6.11)$$

式(6.10)和式(6.11)描述了无负载条件下的静电力曲线及其动态特性,表示为两个终端变量(假设是独立的)之一的函数。

静电力 由式(6.10)和式(6.11)可见,充电电极之间的力——静电力 F_{el} ——是单向的,独立于电学终端变量的极性。

所以,给定一个电极配置的已知几何参数化电容 $C(x)$,可以直接使用关系式(6.10)和式(6.11)来直接计算静电变送器力。

力的方向 通常,静电变送器力的方向定义如下:

命题 6.1 静电力方向(Jackson 1999) 静电力的方向总使配置的电容增大。

平行板极电容器中的静电力 为了确定一个用于说明性静电力曲线,考虑图 6.4 中的简单板极变送器,假设其中的右边电极是可动的。根据式(6.8)和式(6.10),作用于该电极上的力是可变变送器电压 u_T 的函数,由下式给出:

$$F_{el}(x, u_T) = \frac{1}{2} u_T^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon A}{d-x} \right) = \frac{1}{2} u_T^2 \frac{\epsilon A}{(d-x)^2} \quad (6.12)$$

代入电容电压公式(6.12)(或式(6.11))中式(6.8)对应的变送器电荷表达式,可得前文例 2.1 中提到的库仑力:

$$F_{el}(q_T) = \frac{1}{2} \frac{q_T^2}{\epsilon A} \quad (6.13)$$

注意,与式(6.12)中与电压有关的静电力相比,板极变送器中与电荷有关的库仑力与电极间距无关。

推广: 界面力(forces at boundary surfaces) 图 6.4 中的每个电极会在导体和绝缘体之间产生一个界面。式(6.12)和式(6.13)描述了这些边界表面力的相互作用。

该概念可以推广至静电场中不同电介质之间的界面。通常来说,有以下命题成立:

性质 6.1 界面力的方向(Jackson 1999)

作用在边界面上的合力总是垂直于界面。力的方向与场的方向无关且总是朝向介电常数小的电介质(绝缘体)。

使用例子中的平行电极配置,图 6.5 展示了两个实践重点: 一个沿曲面法线方向,另一个平行于电场。无论对于哪一种条件对应的都是简单几何结构,因而容易计算合力。

边界面与场垂直(平行电极) 图 6.5(a)中,可想象两种电介质 ϵ_1, ϵ_2 之间有一个金属薄片。该薄片不会影响电场,电荷只能通过静电感应在其上产生(Jackson 1999)。该虚拟电极上的力可以通过式(6.13)直接计算得到:

$$\begin{cases} F_{el,1} = \frac{1}{2} \frac{q_T^2}{\epsilon_1 A}, & F_{el,2} = \frac{1}{2} \frac{q_T^2}{\epsilon_2 A} \\ F_{el,\Sigma} = F_{el,1} - F_{el,2} = \frac{1}{2} \frac{q_T^2}{A} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \end{cases} \quad (6.14)$$

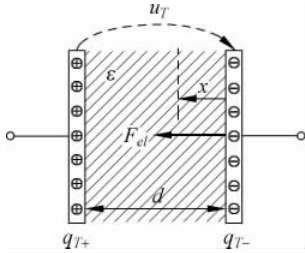


图 6.4 两个带电电极之间的静电力(平行板极变速器)

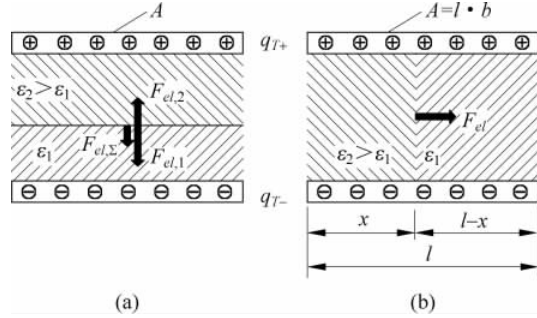


图 6.5 平板电容器电介质中的界面力
(a) 界面与场垂直；(b) 界面与场平行

对于 \$\epsilon_2 > \epsilon_1\$，图示的合力 \$F_{el,\Sigma}\$ 方向为正，指向 \$\epsilon_1\$。这与电容配置的增大性原理完全一致，例如，此时电介质 \$\epsilon_2\$ 有增大的趋势。

边界面与场平行(平行电极) 图 6.5(b)显示了场力线与边界面平行的另一种情形。对该配置，考虑两个并联分电容产生的总电容，通过式(6.10)中的基本力学关系获得力：

$$\begin{cases} C = C_1 + C_2 = \frac{1}{d}(\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2) \rightarrow C(x) = \frac{\epsilon_1 b l}{d} + \frac{b}{d} x (\epsilon_2 - \epsilon_1) \\ F_{el} = \frac{1}{2} u_T^2 \frac{\partial C(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} u_T^2 \frac{b}{d} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \end{cases} \quad (6.15)$$

\$\epsilon_2 > \epsilon_1\$ 时的力方向与上述命题一致，并揭示了一个值得注意的性质。若电介质 1 由空气组成 (\$\epsilon_1 \approx \epsilon_0\$)，则可动电介质 2 (\$\epsilon_2\$) 将一直被拉入到平电容器中。对于这样的配置，只有一个中心电介质可以处于稳定的静止位置。

6.3.3 ELM 二端口模型

局部线性化 静电力本构方程(6.10)和(6.11)总是关于独立电学端变量 \$u_T\$ 和 \$q_T\$ 二次型非线性函数，关于电枢位移 \$x\$ 一般也是非线性的。因此，对于小信号分析，应于稳态工作点附近进行局部线性化。不失一般性，可能的稳态工作点可定义为

$$x_R, \dot{x}_R = 0, \quad u_{T,R}, \dot{u}_{T,R} = 0, \quad \text{或者} \quad q_{T,R}, \dot{q}_{T,R} = 0 \quad (6.16)$$

其中，对于一个具体的电极配置，非零稳态应该由 \$C(x)\$ 公式计算并由式(6.16)确定(见后续章节的例子)。

二端口导纳形式 使用变速器本构公式(6.10)并应用 5.3.3 节中所验证的结论，可导出二端口无负载静电变速器的导纳形式

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{el,\Psi}(s) \\ \Delta I_T(s) \end{pmatrix} = Y_{el}(s) \cdot \begin{pmatrix} \Delta X(s) \\ \Delta U_T(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{el,U} & K_{el,U} \\ s \cdot K_{el,U} & s \cdot C_R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X(s) \\ \Delta U_T(s) \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

其中与工作点有关的变速器参数为：

- 静电电压迟滞

$$k_{el,U} := \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} \bigg|_{\substack{u=u_{T,R} \\ x=x_R}}$$

- 电压系数

$$K_{el,U} := u \frac{\partial C(x)}{\partial x} \bigg|_{u=u_{T,R}, x=x_R} \quad (6.18)$$

- 静止电容

$$C_R := C(x) \big|_{x=x_R}$$

二端口混合形式 通过相同的方法,使用变送器本构公式(6.11)可导出无负载静电变送器的二端口混合形式

$$\begin{pmatrix} \Delta F_{el,Q}(s) \\ \Delta U_T(s) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{el}(s) \cdot \begin{Bmatrix} \Delta X(s) \\ \Delta I_T(s) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{el,I} & \frac{K_{el,I}}{s} \\ -K_{el,I} & \frac{1}{s \cdot C_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X(s) \\ \Delta I_T(s) \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

其中与工作点有关的变送器参数为:

- 静电电流刚度(electro static current stiffness)

$$k_{el,I} := \frac{q^2}{C^2(x)} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{C(x)} \left(\frac{\partial C(x)}{\partial x} \right)^2 \right] \bigg|_{q=q_{T,R}, x=x_R} \quad (6.20)$$

- 电流系数

$$K_{el,I} := q \frac{1}{C^2(x)} \frac{\partial C(x)}{\partial x} \bigg|_{q=q_{T,R}, x=x_R}$$

静止电容 C_R 由式(6.18)定义。

二端口参数之间的关系 容易证实下列导纳、混合形式参数关系成立(见表 5.4):

$$\begin{aligned} k_{el,U} &= k_{el,I} + C_R K_{el,I}^2, & K_{el,U} &= C_R K_{el,I} \\ k_{el,I} &= k_{el,U} - \frac{K_{el,U}^2}{C_R}, & K_{el,I} &= \frac{K_{el,U}}{C_R} \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.3.4 负载静电变送器

机械悬挂 由于静电力的单向作用(与电学端子变量呈二次关系,而且力的方向总是增加变送器电容),电枢电极的弹性悬挂是必不可少的(见图 6.3)。悬架的弹簧弹力必须补偿变送器的力。本节和后续几节将计算静止位置,并分析几种常用电极配置的稳态特性。

线性动态模型 线性动态模型可基于 5.4.4 节的广义模型,即式(6.17)、(6.19),轻松获得。一个电压驱动和电流驱动变送器的信号流图分别如图 6.6 和图 6.7 所示(参见图 5.15 和图 5.16)。

ELM 耦合系数 应用 5.6 节中的关系可得静电变送器 ELM 耦合系数的依赖于工作点的一般公式(仅用于弹性悬挂电枢电极):

$$k_{el}^2 = \frac{1}{1 + \frac{C_R}{K_{el,U}^2} (k - k_{el,U})} = \frac{C_R \cdot K_{el,I}^2}{k - k_{el,I}} \quad (6.22)$$

变送器刚度: 静电软化式 (6.18)、(6.20)中差动静电变送器有如下四个值得注意的性质:

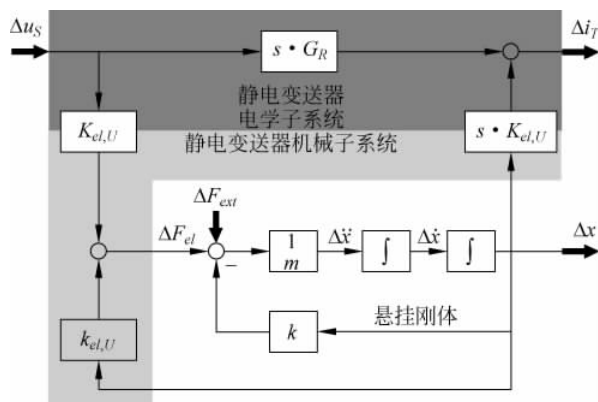


图 6.6 电压驱动负载静电变送器(electrostatic transducer)的信号流程图
(在稳定工作点附近的线性化模型,无损耗,理想电压源,机械负载:
弹性悬挂刚体(elastically suspended rigid body),参见图 6.3)

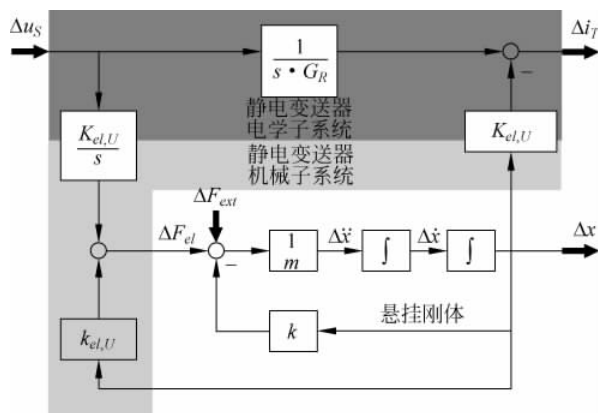


图 6.7 电流驱动负载静电变送器的信号流程图(在稳定工作点附近的线性化模型,无损耗,
理想电流源,机械负载:弹性悬挂刚体,参见图 6.3)

- 电流驱动变送器的刚度 $k_{el,T}$ 总是小于电压驱动变送器的刚度 $k_{el,U}$ 。
- 一般而言,由于所有刚度都大于 0,导致(5.4.3 节中所述)总体刚度减小($k - k_{el}$)(此处即为静电软化)。
- 在一定条件下,电流驱动差动变送器的刚度会变为 0 或负值。
- 刚度随静止位置(或施加到变送器上的电气控制)而改变。这可认为是在包括静电变送器的系统控制器设计中的一种参数变化。另一方面,与静电软化结合起来,这意味着工作点处不稳定的危险(参见拉入(pull-in))。

6.3.5 结构原理

表 6.1 展示了具有一维机械自由度的变送器的若干变种配置。根本上,这些配置可分为电极间距可变、不可变型两种。

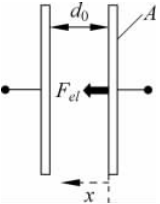
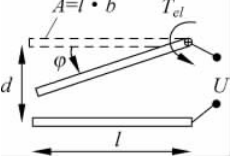
电极间距可变 表 6.1 中的 A 型和 B 型具有可变的电极间距,且利用垂直于电极面的

力。因此,运动自由度与电场平行。值得指出的是,对于倾斜变送器(B型),电极间隙中的电场不再是均匀的,其描述更加复杂。此处列出的两种近似可以用于粗略估计。近似1(对应于A型)计算出的力比实际略小。在本质上,力与电极间距的平方成反比。

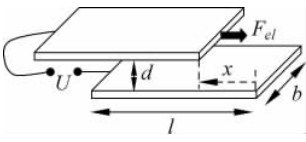
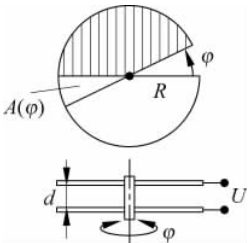
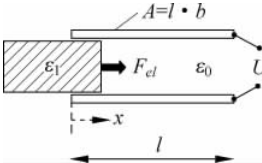
电极间距恒定 对于固定的极间距,可以变化电极重叠区域或电介质。在C型和D型中,只要电极未完全重叠,恒定的平动或转动动力将作用于电容器的板极上。同样,力沿着使电容最大化的方向。在E型中利用了作用于电介质边界面的力。同样地,恒定的静电力将持续作用直到电介质完全充满电极间隙。

几何缩放(gemometric scaling) 为了了解静电力的数量级,考虑B型变送器配置在显微镜镜片中的一个典型应用。对于一个 $500\mu\text{m}\times 500\mu\text{m}$ 面积的镜片,电极间距为 $20\mu\text{m}$,工作电压为 100V ,会产生静电力 $F_d\approx 30\mu\text{N}$ 。这个极小的力完全足以移动一个毫克级的硅片。然而,由于式(6.12)和(6.15)的力关系,将电极几何缩放 λ 倍并不影响生成的力,但是如果假设密度均匀,要移动的质量将增大为 λ^3 倍。力的显著增大只能通过工作电压的绝对增加或电极间距的相对减小而实现。显然,这两种做法均存在技术限制。最大工作电压由绝缘体的绝缘强度和实际操作约束决定。减小电极间距和增大侧向尺寸则受限于制造水平,因此对于限制运动范围的条件该技术是不可行的。

表 6.1 具有单个机械自由度 x 或 φ 的通用静电变送器

变送器类型	变送器模型
A 平行板极变送器,横向 电极间距可变 	$x < d_0$ $C(x) = \frac{\epsilon A}{d_0 - x}$ $F_{el}(x, U) = \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon A}{(d_0 - x)^2}$
B 倾斜板极变送器 (tip-plate transducer) 电极间距可变 	$l \gg d$ $C(\varphi) = -\frac{\epsilon b}{\varphi} \ln\left(1 - \frac{l\varphi}{d}\right)$ $T_{el}(\varphi, U) = \frac{\epsilon A}{2} U^2 \left[\frac{\ln\left(1 - \frac{l\varphi}{d}\right)}{l\varphi^2} + \frac{1}{d\varphi\left(1 - \frac{l\varphi}{d}\right)} \right]$ $\varphi \ll 1$ 时的近似 1: $C(\varphi) \approx \frac{\epsilon A}{d - \frac{1}{2}\varphi}$ $T_{el}(\varphi, U) \approx \frac{\epsilon A l}{2} U^2 \frac{1}{\left(d - \frac{1}{2}\varphi\right)^2}$ $\varphi \ll 1$ 时的近似 2: $C(\varphi) \approx \frac{\epsilon b l}{d} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{l\varphi}{d} + \frac{1}{3} \left(\frac{l\varphi}{d}\right)^2 \right]$ $T_{el}(\varphi, U) \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon b l^2}{d^2} U^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{l\varphi}{d} \right]$

续表

	变速器类型	变速器模型
C	平行板极变速器,纵向 可变面积(variable area) 	$0 \leq x \leq l$ $C(x) = \frac{\epsilon b(l-x)}{d}$ $F_{el}(U) = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon b}{d} U^2$
D	旋转电容器 可变面积 	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $C(\varphi) = \frac{\epsilon R^2}{2d} \varphi$ $T_{el}(U) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon R^2}{2d} U^2$
E	线性变速器(linear transducer) 可变电介质 	$0 \leq x \leq l$ $C(x) = \frac{\epsilon_0 b l}{d} + \frac{b}{d} x (\epsilon_1 - \epsilon_0)$ $F_{el}(U) = \frac{1}{2} \frac{b}{d} (\epsilon_1 - \epsilon_0) U^2$

这些特性行也在宏观尺度上解释了静电变速器原理在极端条件下的应用限制(例如,电气测量设备中的针形静电计(Jackson 1999))。现在,随着微系统技术的发展,静电变速器机电整合应用才取得了突破。只有基于静电原理所制造的微尺度结构,其产生的极其微小的力才能真正地得到利用。(Senturia 2001)

6.4 具有电压驱动与可变电极间距的变速器

6.4.1 一般动态模型

变速器类型 可变电极间距的变速器的电枢能以垂直于电极表面的方向移动,并具备由表 6.1 中所示的 A 型和 B 型配置。

构形方程(configuration equations) 由于电极间距可变且电场均匀,下述关于变速器电容和静电力生成的数学描述适用于电压驱动条件:

$$\begin{cases} C_T(x) := \frac{a}{\beta - x}, & C_0 := C_T(0) = \frac{a}{\beta} \\ \rightarrow \frac{\partial C_T(x)}{\partial x} = \frac{a}{(\beta - x)^2}, & F_{el}(x, u_T) = \frac{1}{2} u_T^2 \frac{a}{(\beta - x)^2} \end{cases} \quad (6.23)$$

稳态特性

静止位置 应用式(5.40),可由下面的三次方程得到静态激励 $u_T(t)=U_0, F_{ext}(t)=F_0$ 的静止位置 x_R :

$$\frac{2}{\alpha}(kx_R - F_0)(\beta - x_R)^2 = U_0^2 \quad (6.24)$$

式(6.24)的三个可能解中只有一个(下面将说明)产生了根本稳定的静止位置,也仅对特定的配置(参见拉入现象)。对于进一步的考虑,使用二元组 (x_R, F_0) 对静止位置进行参数化被证明是很方便的¹。

拉入现象(pull-in phenomenon) 在稳态条件下,对于一个衰减的机械激励 $F_{ext}=0$,弹簧弹力 $F_F=kx_R$ 和静电力 $F_{el}(x_R, U_0)$ 必须相互平衡。这与静止位置条件(式(6.24))精确吻合。然而,只有当作用在电极上的合力 $F_\Sigma = F_F - F_{el}$ 的微分刚度 $\partial F_\Sigma / \partial x$ 为正时才能产生稳定的静止位置。在最优条件下,只存在一个稳定静止位置,见图 6.8(参考图 5.13)。

对于 $x_R = \beta/3$, 由于 $\partial F_\Sigma / \partial x = 0$, 故系统边界稳定; 对于 $x_R > \beta/3$, 静电力则取决于梯度。此时,由于没有中和力存在,可动电极将被拉向静止电极,该现象被称为拉入现象。

因此,该临界静止位移被称为拉入位移(见图 6.8)

$$x_{pi} = \frac{\beta}{3} \quad (6.25)$$

基于式(6.25)、(6.24),拉入电极位移 x_{pi} 对应的静止电压 U_{pi} (即,拉入电压)由下式定义:

$$U_{pi} = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{\beta^3}{\alpha} k} \quad (6.26)$$

所以,对于避免拉入的稳定工作,稳态工作点满足

$$x_R < x_{pi}, \quad \text{或等价地} \quad U_0 < U_{pi} \quad (6.27)$$

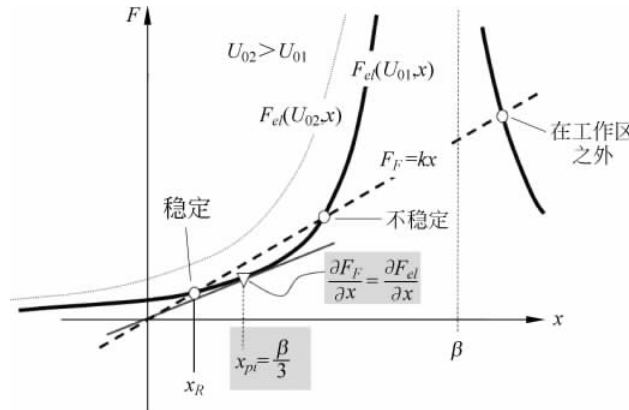


图 6.8 拉入: 机械激励 $F_{ext}=0$ 时的稳态力曲线

¹ 相应的 U_0 可由式(6.24)确定。为此,将静止位移 x_R 视作一个操作参数(operational parameter)比使用源电压的描述性更强。

因此,由于拉入的威胁,当使用电压驱动时,只允许三分之一的电极间隙(electrode gap)可用于定向运动(targeted motions)。6.4.2节将描述一种通过电学方法增大运动范围的可能性。

静态机械激励时的拉入极限 图 6.9 展示了一个附加静止机械力 F_0 存在时的实用的力曲线。可见,由于弹簧力曲线上出现了大小为 $-F_0$ 的变化,静止位置和拉入极限变为

$$\tilde{x}_{pi} = \frac{1}{3} \left(\beta + \frac{2}{k} F_0 \right), \quad \tilde{U}_{pi} = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{(k\beta - F_0)^3}{ak^2}} \quad (6.28)$$

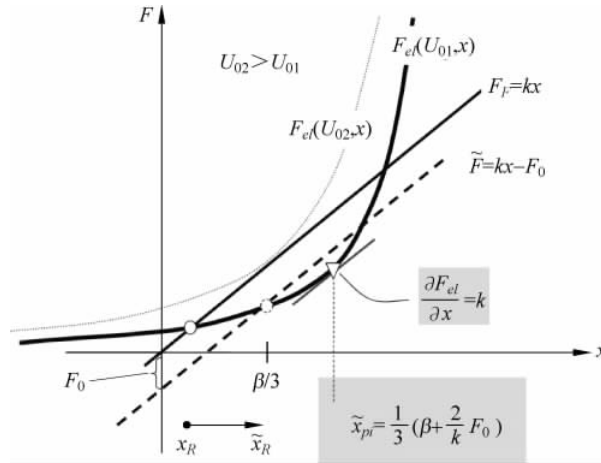


图 6.9 拉入：静态机械激励 $F_{ext} = F_0 = \text{const} \neq 0$ 时的稳态力曲线

动态特性

变速器参数 将式(6.23)中的 $C_T(x)$ 代入式(6.18),并定义相对静止位移 $X_R := x_R/\beta$,可得依赖于工作点的二端口参数:

- 静电电压刚度

$$k_{el,U} := \frac{2(k \cdot X_R - F_0/\beta)}{1 - X_R} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

- 电压系数

$$K_{el,U} := \frac{\sqrt{2C_0(k \cdot X_R - F_0/\beta)}}{1 - X_R} \quad (6.29)$$

- 静止电容

$$C_R := C_0 \frac{1}{1 - X_R} \left[\frac{\text{As}}{\text{V}} \right]$$

传递函数矩阵 依据式(6.29)和表 5.8,可得传递矩阵 $\mathbf{G}(s)$ 为

$$\begin{pmatrix} \Delta X(s) \\ \Delta I_T(s) \end{pmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{pmatrix} \Delta F_{ext}(s) \\ \Delta U_S(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{x/F,U} \frac{1}{\{\Omega_U\}} & V_{x/u} \frac{1}{\{\Omega_U\}} \\ V_{i/F} \frac{s}{\{\Omega_U\}} & V_{i/u,s} \frac{\{\Omega_0\}}{\{\Omega_U\}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta F_{ext}(s) \\ \Delta U_S(s) \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

上式中的各参数分别为

$$\begin{cases} k_{T,U} = k - k_{el,U}, & \Omega_U^2 = \frac{k_{T,U}}{m}, & \Omega_0^2 = \frac{k}{m}, & \text{其中 } \Omega_U < \Omega_0 \\ V_{x/F,U} = \frac{1}{k_{T,U}}, & V_{x/u} = V_{i/F} = \frac{K_{el,U}}{k_{T,U}}, & V_{i/u} = C_R \frac{k}{k_{T,U}} \end{cases} \quad (6.31)$$

值得指出,电学端传递函数(电学导纳)的反谐振由机械本征频率 Ω_0 给出。由于该零点依次等于电流驱动下的变送器极点,对应这种驱动配置差动变送器的刚度显然为 0。该性质将在下一节中进一步讨论。

静电软化与增益变化 式(6.31)中的变送器刚度 $k_{T,U}$ 取决于工作点,即它随静止位移 x_R 按照下式变化:

$$k_{T,U} = \frac{k(1 - 3X_R) + 2F_0/\beta}{(1 - X_R)}$$

随着 x_R 增大, $k_{T,U}$ 接近于 0(静电软化); 对于拉入条件, $k_{T,U}=0$ (参见式(6.25)和(6.28))。

这进而意味着,式(6.31)中传递函数的增益,在接近拉入(吸合)电枢位移(pull-in armature displacement)处迅速增大。一方面,这意味着增大的变送器灵敏度取决于工作点。另外,如果要將变送器用作闭环中一个执行器,则必须在控制器设计中仔细考虑这种极端的参数变化。

特征多项式: 变送器的稳定性 传递函数 $G(s)$ 的特征多项式 $\Delta_U(s)$ 是稳定性分析的重要组成部分。

$$\Delta_U(s) = s^2 + \Omega_U^2 = s^2 + \frac{k_{T,U}}{m} = s^2 + \frac{k(1 - 3X_R) + 2F_0/\beta}{m(1 - X_R)} \quad (6.32)$$

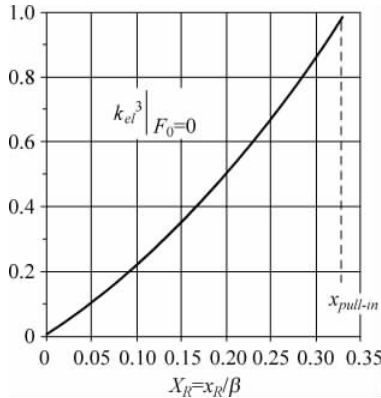


图 6.10 $F_0=0$ 时具有可变电极间距的电压驱动静电板极变送器 ELM 耦合系数 k_{el}^2 与静止位移(rest displacement) x_R 之间的函数关系

基于式(6.32)的稳定性限制,可精确地再次获得前文中的拉入条件(6.25)和(6.28)($s=0$ 时存在双极点,即, $k_{T,U}=0$)。

ELM 耦合系数 将变送器参数式(6.29)代入式(6.22),可得电压驱动平变送器的 ELM 耦合系数

$$k_{el}^2 = \frac{2(kX_R - F_0/\beta)}{k(1 - X_R)} = \frac{k_{el,U}}{k} \quad (6.33)$$

依据式(6.33),ELM 耦合系数本质上取决于变送器相对运动的几何特性,即相对零电压电极间距 β 的静止位移 x_R 。在某些条件下,静止机械激励 F_0 会产生额外的偏移量。式(6.33)等式右侧则使 ELM 耦合系数与变送器刚度相互联系。

图 6.10 展示了 ELM 耦合系数在 $F_0=0$ 时关于稳定静止位移 x_R 的函数变化曲线。当静止位移逐渐增大时,使用的机械能显然也增大。然而,此时静电软化也将使变送器趋向不稳定。因此,为了防止拉入效应,只能选择带严格范围限制的运动条件对应的大耦合因子。

6.4.2 使用串联电容增大运动范围

几何运动限制 拉入现象略微减小了电压驱动变送器的运动范围。图 6.11(a)中的变

送器至多仅能在 $x_{pi} = \beta/3$ 以内操作。如果希望电枢移动至 $x_{\max} = \beta$, 未充电的电极间距就必须增大至 3β (图 6.11(b))。然而, 依据式(6.26), 对比图 6.11a 中的原始设计, 空气间隙增大 3 倍将导致实现该运动范围所需的控制电压增加为 $\sqrt{3^3} \approx 5$ 倍。而增大间隙将使总电容更小, 因此, 需要考虑一种基于原始平电容连接的阵列, 该扩展版本见图 6.11(c)。

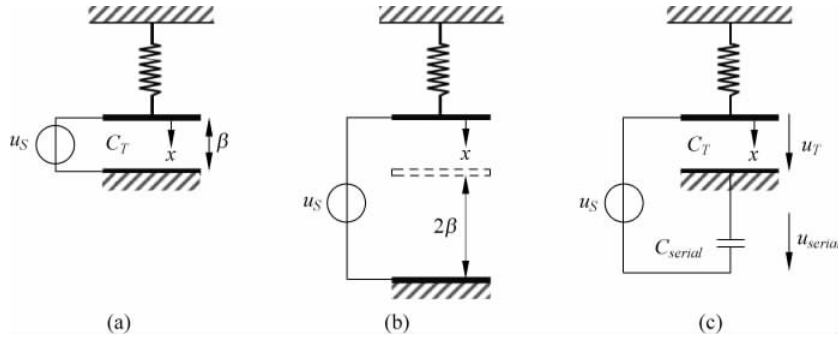


图 6.11 电压驱动板极变速器

(a) 电极间距 β ; 电极行程 $0 \leq x < \beta/3$; (b) 电极间距增大为 3β ; 电极行程增大为 $0 \leq x < \beta$; (c) 电极间距 β , 但使用串联电容 C_{serial} ; 电极行程增大为 $0 \leq x < \beta$

串联电容 既维持原来电极几何尺寸又增大电极的稳定运动范围的可行方法是使用图 6.11(c) (Seeger 和 Crary 1997, Chan 和 Dutton 2000) 中所示的串联电容。这使得整个电极可在 β 范围内活动。

图 6.11(c) 中阵列的总电容计算如下

$$C_{\Sigma}(x) = \frac{C_T \cdot C_{\text{serial}}}{C_T + C_{\text{serial}}} = \frac{\alpha}{\beta + \frac{\alpha}{C_{\text{serial}}} - x} = \frac{\alpha}{\hat{\beta} - x} \quad (6.34)$$

基于式(6.34), 可看出未充电的变速器电极间距虚拟地增加为 $\hat{\beta}$ 。且不影响系统性能, 拉入极限现可通过 $\hat{\beta}$ 计算。

因此, 为了得到图 6.11(a) 中所示的静电电枢活动范围 β , 串联电容应在下式范围内选择

$$C_{\text{serial}} \geq \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} C_0$$

机理 串联电容的工作机理是为驱动电压提供一个分压器, 即

$$u_T = \frac{C_{\text{serial}}}{C_T + C_{\text{serial}}} u_S = \frac{\beta - x}{\frac{\alpha}{C_{\text{serial}}} + \beta - x} u_S$$

因此, 由于电压源 u_S 增大, 导致位移 x 和电容 C_T 增大, 则变速器上的极化电压 u_T 会自动减小(通过电反馈)。静电力此时将服从下列规律

$$F_{el}(x, u_S) = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{(\beta - x)^2} \left[\frac{(\beta - x)}{\left(\frac{\alpha}{C_{\text{serial}}} + \beta - x \right)} u_S \right]^2 = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{C_{\text{serial}}} + \beta - x \right)^2} u_S^2$$

优缺点和局限性 通过电学方法增大电枢行程保持了变速器的紧凑几何结构。然而, 由于这种方法的分压器特性, 与直接变速器控制相比该方法需要更高的控制电压。此外, 寄生电容仍会限制变速器的稳定运行 (Chan 和 Dutton 2000)。

6.4.3 使用串联电阻的被动阻尼

带电压源和串联电阻的变送器 图 6.12 展示了基于电压驱动平变送器和串联电容构成的变送器布局结构。建模与仿真篇 5.5 节已详细讨论了有损基本变送器的动态特性；这些动态特性可于该变送器类型得到具体体现。如前文所述，机械能通过机电耦合中的电气回路逐渐耗散，导致机械单质体振荡器存在被动阻尼。因此，电阻值应被作为一个重要的设计自由度加以考虑。

稳态特性 稳态时变送器电流为 0 (电压平衡, $u_T = u_S$)。因此，与无损平变送器相比，静止点或拉入条件没有变化。

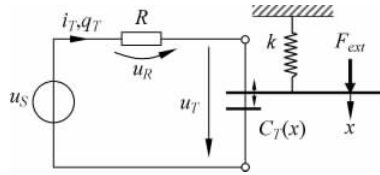


图 6.12 具有串联电阻和可变电极间距的电压驱动静电极变送器

小信号动态特性 为了计算稳定静止位置 (U_0, x_R) 处的变送器线性化模型，可直接使用表 5.7 和表 5.8 中的值以及式 (6.17) 或 (6.29) 中的 ELM 二端口导纳参数，经过几步计算可得¹：

$$\begin{pmatrix} \Delta X(s) \\ \Delta I_T(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{x/F,U} \frac{[\tilde{\omega}_Z]}{\tilde{N}(s)} & V_{x/U} \frac{1}{\tilde{N}(s)} \\ V_{i/F} \frac{s}{\tilde{N}(s)} & V_{i/U} \cdot s \frac{\{\tilde{\Omega}_0\}}{\tilde{N}(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta F_{ext}(s) \\ \Delta U_S(s) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{N}(s) := \left(1 + 2 \tilde{d}_U \frac{s}{\tilde{\Omega}_U} + \frac{s^2}{\tilde{\Omega}_U^2} \right) \left(1 + \frac{s}{\tilde{\omega}_U} \right), \quad \tilde{\omega}_Z := \frac{1}{R \cdot C_R} \quad (6.35)$$

式中增益均与式 (6.31) 中无损变送器的增益相等²。

此时可观察到极点的位置。由于电路为 RC 输入，除了表示机械固有频率阻尼的复数极点对 $\{\tilde{d}_U, \tilde{\Omega}_U\}$ 之外，还有附加的实数极点 $[\tilde{\omega}_U]$ 出现。

随电阻而变化的根轨迹 5.5.5 节讨论了极点 $\{\tilde{d}_U, \tilde{\Omega}_U\}$ 和 $[\tilde{\omega}_U]$ 对抗阻 R 的依赖特性。此时，图 5.24(a) 中所示的根轨迹准确表达了电气反馈预期的阻尼特性。

最大阻尼 定义 $X_R := x_R/\beta$ ，从第 5.5.5 节可知，变送器固有频率的最大可达阻尼为

$$d_{\max} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1 - X_R}{1 - 3X_R + \frac{2F_0}{k\beta}}} - 1 \right] \quad (6.36)$$

最优电阻可以通过第 5.5.5 节获得，即

¹ 这些方程容易通过计算机代数程序 (如 MAPLE 和 MATHEMATICA) 求解。也可以使用这些方程容易地找到传递矩阵的闭式方程，是其他电极配置物理参数的函数。

² 这不难预计，因为上述解释给出的带电阻变送器稳态值与无损变送器时相同。