

5.1 概述和分类

物体经光学成像系统映射后就产生像。由于光学成像系统总存在局限性或缺陷,不能使物体的全部信息反映在其图像上,即造成失真,或者已有的图像经某种方法处理后,丢失部分信息或增加噪声干扰,产生了原图像的近似图像,这一物理事实统称为图像退化。也就是说,景物成像过程中可能出现畸变、模糊、失真或混入噪声,使得所成图像降质。

图像复原就是对退化的图像进行处理,使它趋向于原物体的理想图像,即去除或减轻在图像处理过程中造成的图像质量下降,因此与第4章介绍的图像增强技术有相似之处。图像复原和图像增强一样,都是为了改善图像视觉效果,以及便于后续处理。但它又与图像增强不同,图像增强方法更偏向主观判断,而图像复原则是根据图像畸变或退化原因,进行模型化处理。既然图像复原是将降质了的图像恢复成原来的图像,因此这就要求对图像降质的原因有一定的了解。根据图像降质过程的某些先验知识,建立“降质模型”(或称退化模型),再针对降质过程,采取某种处理方法,恢复或重建原来的图像。一般地讲,复原的好坏应有一个规定的客观标准,以便能对复原的结果做出某种最佳的估计。

图像复原是根据退化原因,建立相应的数学模型,从被污染或畸变的图像信号中提取所需要的信息,沿着使图像降质的逆过程恢复图像本来面貌。实际的复原过程是设计一个滤波器,使其能从降质图像 $g(x,y)$ 中计算得到真实图像的估值 $\hat{f}(x,y)$,使其根据预先规定的误差准则,最大限度地接近真实图像 $f(x,y)$ 。从广义上讲,图像复原是一个求逆问题,逆问题经常存在非唯一解,甚至无解。为了得到逆问题的有用解,需要有先验知识以及对解的附加约束条件。

在给定模型的条件下,图像复原技术可分为无约束和有约束两大类。根据是否需要外界干预,图像复原技术又可分为自动和交互的两大类。另外,根据处理所在的域,图像复原技术还可分为频域和空间域两大类。如图5.1给出本章将要介绍的图像恢复模型及方法。

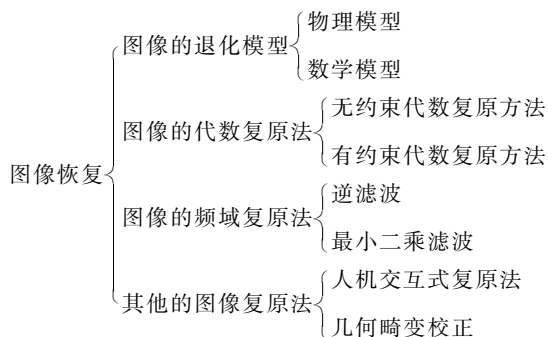


图 5.1 图像复原内容

5.2 图像的退化模型

为了给出图像退化的数学模型,首先要清楚图像降质的原因,即成像过程的数学过程。为了方便描述成像系统,通常把成像系统看成一个线性系统。

5.2.1 图像降质因素

产生图像降质的因素很多,如光学系统的像差、成像过程的相对运动、X射线的散布特性、各种外界因素的干扰以及噪声等。典型原因表现为:

- (1) 成像系统的像差、畸变、带宽有限等造成图像失真;
- (2) 由于成像器件拍摄姿态和扫描非线性引起的图像几何失真;
- (3) 运动模糊,成像传感器与被拍摄景物之间的相对运动,引起所成图像的运动模糊;
- (4) 灰度失真,光学系统或成像传感器本身特性不均匀,造成同样亮度景物成像灰度不同;
- (5) 辐射失真,由于场景能量传输通道中的介质特性如大气湍流效应、大气成分变化引起图像失真;
- (6) 图像在成像、数字化、采集和处理过程中引入的噪声等。

产生图像降质的一个复杂因素是随机噪声。在形成数字图像的过程中,噪声会不可避免地加进来。考虑有噪声情况下的图像复原,就必须知道噪声的统计特性以及噪声和图像信号的相关情况,这是非常复杂的。在实际应用中,往往假设噪声是白噪声,即它的频谱密度为常数并且与图像不相关。这种假设是理想情况,因为白噪声的概念是一个数学上的抽象,但只要在噪声带宽比图像带宽大得多的情况下,此假设还是一个比较可行和方便的模型。同时,还应注意不同的复原技术需要不同的有关噪声的先验信息。

5.2.2 图像退化模型

退化的模型一般可分为4种,如图5.2所示。图5.2(a)和图5.2(b)表示一般的点的非线性退化。在拍摄照片时,由于曝光量和感光密度的非线性关系,便引起这种非线性退化。图5.2(c)和图5.2(d)是一种空间模糊退化模型,它可解释成许多物理图像系统中光经有限窗口从而发生衍射作用所引起的。图5.2(e)和图5.2(f)表示了由于旋转运动所引起的退化模型。事实上,运动还可以是平移或者两者均有。图5.2(g)和图5.2(h)表示由随机噪声引起的退化模型。其中,除了第4种是随机的外,其余3种都是确定性的。除第1种仅具有

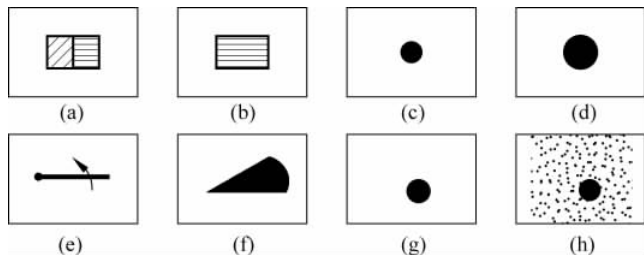


图 5.2 退化模型

移不变性(模糊情况不因图像空间位置和作用时间而改变)外,其余3种均是线性(叠加性和齐次性)移不变的。尽管恢复问题具有病态性质,但如果对恢复过程施加某些约束,仍然可以获得在给定某种准则下的最佳解。

如果将图像的降质过程模型化为一个降质系统(或算子) H ,并假设输入原图为 $f(x,y)$,经降质系统作用后输出的降质图像为 $g(x,y)$,同时引进的随机噪声为相加性噪声 $n(x,y)$ 。如果不是加法性噪声,而是乘法性噪声,可以用对数转换方式将其转化为相加的形式。则降质过程的模型如图5.3所示。用公式表示退化模型为

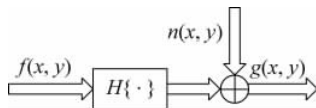


图 5.3 降质过程的模型

$$g(x,y) = H[f(x,y)] + n(x,y) \quad (5.1)$$

先假设 $n(x,y)=0$,则 H 具有如下4个性质。

(1) 线性: 如果令 k_1 和 k_2 为常数, $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 为两幅输入图像,则有

$$H[k_1 f_1(x,y) + k_2 f_2(x,y)] = k_1 H[f_1(x,y)] + k_2 H[f_2(x,y)] \quad (5.2)$$

(2) 相加性: 如果式(5.2)中的 $k_1=k_2=0$,则有

$$H[f_1(x,y) + f_2(x,y)] = H[f_1(x,y)] + H[f_2(x,y)] \quad (5.3)$$

(3) 一致性: 如果假设式(5.2)中的 $f_2(x,y)=0$,则有

$$H[k_1 f_1(x,y)] = k_1 H[f_1(x,y)] \quad (5.4)$$

式(5.4)指出线性系统对常数与任意输入乘积的响应等于常数与该输入的响应的乘积。

(4) 位置(空间)不变性: 如果对任意的 $f(x,y)$ 以及 a 和 b ,则有

$$H[f(x-a, y-b)] = g(x-a, y-b) \quad (5.5)$$

式(5.5)指出线性系统在图像任意位置的响应只与在该位置的输入值有关,而与位置本身无关。

5.2.3 图像退化模型的离散形式

为了便于计算机处理,必须将模型离散化。本节先讨论一维情况,然后再推广到二维情况。

1. 一维离散退化模型

在暂时不考虑噪声项的情况下,设 $f(x)$ 为具有 A 个采样值的离散输入函数, $h(x)$ 为具有 B 个采样值的退化系统冲激响应,则系统的离散输出函数 $g(x)$ 为输入 $f(x)$ 和冲激响应 $h(x)$ 的卷积。即

$$g(x) = f(x) * h(x) \quad (5.6)$$

根据对离散卷积公式的分析,此卷积的结果会产生交叠误差。为了避免交叠误差,应将 $f(x)$ 和 $h(x)$ 用添零延伸的方法扩展成周期为 $M=A+B-1$ 的周期函数 $f_e(x)$ 和 $h_e(x)$ 。即有

$$f_e = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \end{cases}$$

$$h_e = \begin{cases} h(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B \leq x \leq M-1 \end{cases}$$

此时,输出为

$$g_e(x) = f_e(x) * h_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m) h_e(x-m) \quad (5.7)$$

其中, $x=0,1,2,\dots,M-1$ 。因为假设 $f_e(x)$ 和 $h_e(x)$ 都是周期性函数,故 $g_e(x)$ 也是周期性函数。

式(5.7)还可以变为矩阵的形式,具体为

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f} \quad (5.8)$$

其中, $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 均是 M 维列向量,表示为

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ f_e(2) \\ \vdots \\ f_e(M-1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_e(0) \\ g_e(1) \\ g_e(2) \\ \vdots \\ g_e(M-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{H}$ 为 $M \times M$ 阶矩阵,表示为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(-1) & h_e(-2) & \cdots & h_e(-M+1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(-1) & \cdots & h_e(-M+2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(-M+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix}$$

因为 $h_e(x)$ 是周期性函数,故有 $h_e(x) = h_e(M+x)$ 。利用此性质,上式可写为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(M-1) & \cdots & h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix}$$

从上式可看出,矩阵的每一行都是前一行向右循环移位的结果。这就是说:在一行中最右端的元素等于下一行中最左端的元素,并且此循环性一直延伸到最末一行之尾,又回到第一行之首,因此, $\mathbf{H}$ 的循环是完善的。在方阵中,如果具有这种向右循环移位的性质,则称为循环矩阵。应特别注意的是, $\mathbf{H}$ 的循环性质是假设 $h_e(x)$ 为周期性之后才得到的。

2. 二维离散退化模型

设输入的数字图像 $f(x,y)$ 和冲激响应 $h(x,y)$ 分别具有 $A \times B$ 和 $C \times D$ 元素。为避免交叠误差,用添零延伸的方法,将它们扩张为 $M \times N$ 个元素,其中 $M \geq A+C-1, N \geq B+D-1$ 。则

$$f_e(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & 0 \leq x \leq A-1, 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1, B \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$h_e(x,y) = \begin{cases} h(x,y) & 0 \leq x \leq C-1, 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1, D \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

如果将扩展函数 $f_e(x,y)$ 和 $h_e(x,y)$ 作为二维周期函数处理,即在 x 和 y 方向上,周期分别为 M 和 N ,则输出的降质数字图像为

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) h_e(x - m, y - n)$$

其中, $x=0, 1, 2, \dots, M-1, y=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

$g_e(x, y)$ 具有与 $f_e(x, y)$ 和 $h_e(x, y)$ 相同的周期, 如果考虑噪声项, 只要在上式的基础上, 加上一个 $M \times N$ 的扩展的离散噪声项 $n(x, y)$, 就可得到完整的二维离散降质模型

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) h_e(x - m, y - n) + n_e(x, y)$$

其中, $x=0, 1, 2, \dots, M-1, y=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

同一维情况相似, 可用矩阵表达式表示二维离散降质模型。它表示为

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (5.9)$$

其中, $\mathbf{g}, \mathbf{f}, \mathbf{n}$ 为 $M \times N$ 维列向量, 这些列向量是由 $M \times N$ 维的函数矩阵, $g_e(x, y), f_e(x, y)$ 和 $n_e(x, y)$ 的各个行堆积而成。如

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_e(0, 0) \\ f_e(0, 1) \\ \vdots \\ f_e(0, N-1) \\ f_e(1, 0) \\ f_e(1, 1) \\ \vdots \\ f_e(1, N-1) \\ \vdots \\ f_e(M-1, 0) \\ f_e(M-1, 1) \\ \vdots \\ f_e(M-1, N-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{n}$ 的形式与 $\mathbf{f}$ 相似, 这里就不重复介绍了。 $\mathbf{H}$ 为 $MN \times MN$ 维矩阵, 此矩阵是一个十分庞大的矩阵, 它包括 M^2 个部分, 每一部分的大小为 $N \times N$ 。它可用 $M \times M$ 的分块循环矩阵来表示

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_0 & H_{M-1} & H_{M-2} & \cdots & H_1 \\ H_1 & H_0 & H_{M-1} & \cdots & H_2 \\ H_2 & H_1 & H_0 & \cdots & H_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{M-1} & H_{M-2} & H_{M-3} & \cdots & H_0 \end{bmatrix}$$

其中, 每个分块 $\mathbf{H}_j$ 是由扩展函数 $h_e(x, y)$ 的第 j 行组成, 即

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} h_e(j, 0) & h_e(j, N-1) & h_e(j, N-2) & \cdots & h_e(j, 1) \\ h_e(j, 1) & h_e(j, 0) & h_e(j, N-1) & \cdots & h_e(j, 2) \\ h_e(j, 2) & h_e(j, 1) & h_e(j, 0) & \cdots & h_e(j, 3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_e(j, N-1) & h_e(j, N-2) & h_e(j, N-3) & \cdots & h_e(j, 0) \end{bmatrix}$$

5.2.4 运动模糊的退化模型

当成像传感器与被摄景物之间存在足够快的相对运动时,所摄取的图像就会出现“运动模糊”,即运动模糊是成像系统与物体间相对运动所造成的物像模糊。假设这种运动只是物函数 $f(x, y)$ 相对成像系统的移动,则这种运动模糊的数学模型比较容易建立,且这种模糊具有普遍性。

设 $\Delta x(t), \Delta y(t)$ 分别表示为 x 和 y 方向的移动分量,感光胶片上任一点的总曝光量是快门开闭时间 T 内的积分,则运动模糊图像可表示为

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - \Delta x(t), y - \Delta y(t)] dt \quad (5.10)$$

为讨论方便,假定物体仅在 x 方向做匀速直线运动,且令在曝光时间 T 内的总移动量为 a ,物体沿 x 方向的变化分量为 $\Delta x(t) = at/T$,则式(5.10)可改写为

$$g(x, y) = \int_0^T f\left[x - \frac{a}{T}t\right] dt = g(x) \quad (5.11)$$

令 $t_1 = at/T$, 则

$$g(x, y) = g(x) = \int_0^a f(x - t_1) \frac{T}{a} dt_1 = f(x) * h(x) \quad (5.12)$$

从卷积运算式中可以看出

$$h(x) = \frac{T}{a} \quad 0 \leq x \leq a \quad (5.13)$$

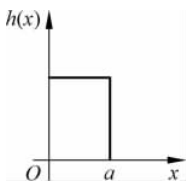


图 5.4 点扩散函数

式(5.13)就是沿 x 方向造成运动模糊的点扩散函数。该扩散函数一个矩形函数,如图 5.4 所示。即

$$h(x) = \begin{cases} \frac{T}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5.14)$$

式(5.14)为运动物体沿 x 方向移动时的图像退化模型。

5.3 图像的代数复原法

图像的代数复原算法是由 Andrews 和 Hunt 等人提出的,它是基于离散退化系统模型,即

$$g = Hf + n \quad (5.15)$$

其中, g, f 和 n 都是 N^2 维列向量, H 为 $N^2 \times N^2$ 维的矩阵。

5.3.1 无约束代数复原方法

改写式(5.15),取图像噪声为

$$n = g - Hf$$

如果 $n=0$ 或对噪声一无所知,则可以用下述方法把复原问题当作一个最小二乘问题来解决。

令 $e(\hat{f})$ 为 $\hat{f}$ 和 f 向量间的差值,则式(5.15)可改写为

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} + \mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}}) \quad (5.16)$$

或

$$\mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}}) = \mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}$$

定义 $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}})$ 的范数平方为

$$\|\mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}})\|^2 = \mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}})^T \mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}})^T (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) \quad (5.17)$$

$\|\mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}})\|^2$ 可以视为误差项 $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}})$ 的一种度量。可以这样来选择 $\hat{\mathbf{f}}$, 使它被 $\mathbf{H}$ 模糊(退化)后所得的结果与观察到的图像 $\mathbf{g}$ 之差在均方意义下尽可能的小。由于 $\mathbf{g}$ 本身是由 $\mathbf{f}$ 经过 $\mathbf{H}$ 模糊所得到的, 可以想象, 这是一种令人满意的方法。若 $\mathbf{f}$ 和 $\hat{\mathbf{f}}$ 这两者被 $\mathbf{H}$ 模糊的结果十分近似, 则 $\hat{\mathbf{f}}$ 很可能就是 $\mathbf{f}$ 的最佳估计。

所谓无约束复原就是对式(5.17)求最小二乘解, 即求 $\hat{\mathbf{f}}$, 使得对应的误差向量的平方取最小值。

若令目标函数

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{f}}) = \|\mathbf{e}(\hat{\mathbf{f}})\|^2 = (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}})^T (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) \quad (5.18)$$

则无约束复原就是求 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{f}})$ 的最小值。由此可见, 除了使目标函数最小外, 并无其他限制条件, 可以称为无约束代数复原方法。

令 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{f}})$ 的导数等于零, 则

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\hat{\mathbf{f}})}{\partial \hat{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{H}^T (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) = 0 \quad (5.19)$$

求得

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g} \quad (5.20)$$

其中, $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ 称为矩阵 $\mathbf{H}$ 的广义逆, 由于 $\mathbf{H}$ 是 $N \times N$ 的方阵, 因此

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} \quad (5.21)$$

式(5.21)给出了逆滤波器, 即为无约束条件下的代数复原解。

5.3.2 有约束代数复原方法

考察式(5.15)的复原模型, 影响图像复原的因素包括噪声干扰 $\mathbf{n}$, 成像系统的传递函数 $\mathbf{H}$ 。后者包含图像传感器中光学和电子学的影响。如果先抛开噪声, 按照式(5.15), 要恢复原图像 $\mathbf{f}$, 需要对矩阵 $\mathbf{H}$ 求逆, 即

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}$$

数学上要求这个逆矩阵存在并且唯一。但事实上, 即使模糊图像上存在非常小的扰动时, 在恢复结果图像中, 都会产生完全不可忽视的强扰动, 可表示为

$$\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{g} + \epsilon] = \mathbf{f} + \delta$$

其中, ϵ 为任意小的扰动, $\delta \gg \epsilon$ 。无论是成像系统, 数字化器, 还是截断误差, 对采集到的数字化图像产生一定扰动, 几乎是不可避免的。

至于噪声, 由于其随机性, 使得模糊图像 $\mathbf{g}$ 可以由无限种可能情况, 因而也导致了恢复

的病态性。

还存在另外一种可能,即逆矩阵 $\mathbf{H}^{-1}$ 不存在,但确实还存在和 $\mathbf{f}$ 十分近似的解,这称为恢复问题的奇异性。

为克服复原问题中的病态性质,常需要在恢复过程中对运算施加某种约束,从而在一组可能的结果中选择一种,这就是有约束条件的复原方法。

在一般情况下,考虑噪声存在下的极小化过程需要求式 $\mathbf{n} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}$ 两端范数相等的约束,即

$$\|\mathbf{n}\|^2 = \|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{f}}\|^2 \quad (5.22)$$

于是,有约束条件的复原可以这样实现:令 $\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{f}$ 的线性算子,约束复原问题可看成是使形式为 $\|\mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}}\|^2$ 的函数,在式(5.22)的约束条件下求极小值问题。因此,采用拉格朗日乘数法的修正函数(目标函数) $T(\hat{\mathbf{f}}, \lambda)$,其表达式为

$$\begin{aligned} T(\hat{\mathbf{f}}, \lambda) &= \|\mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}}\|^2 + \lambda \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2 \\ &= (\mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}})^T(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}}) + \lambda(\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}})^T(\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) - \mathbf{n}^T\mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.23)$$

求 $T(\hat{\mathbf{f}}, \lambda)$ 对 $\hat{\mathbf{f}}$ 的偏导数,并令其为零,则有

$$\frac{\partial T(\hat{\mathbf{f}}, \lambda)}{\partial \hat{\mathbf{f}}} = 2\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{f}} - 2\lambda\mathbf{H}^T(\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) = 0$$

解得

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \gamma\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{g} \quad (5.24)$$

这就是有约束最小二乘代数复原解的一般公式。例如,如果约束条件是要求复原后的图像 $\hat{\mathbf{f}}$ 与模糊后的图像 $\mathbf{g}$ 的能量保持不变,即要求

$$\mathbf{f}^T\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}^T\mathbf{g} = C(\text{常量}) \quad (5.25)$$

则求目标函数 $T(\hat{\mathbf{f}})$ 的最小值,就是求 $T(\hat{\mathbf{f}}, \lambda)$ 函数在式(5.25)条件下的最小值,即求辅助函数

$$\begin{aligned} T(\hat{\mathbf{f}}, \lambda) &= T(\hat{\mathbf{f}}) + \lambda(\mathbf{f}^T\hat{\mathbf{f}} - C) \\ &= (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}})^T(\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) + \lambda(\mathbf{f}^T\hat{\mathbf{f}} - C) \end{aligned}$$

对 $\hat{\mathbf{f}}$ 求导数,令其为零,则有

$$\frac{\partial T(\hat{\mathbf{f}}, \lambda)}{\partial \hat{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{H}^T\mathbf{g} + 2\mathbf{H}^T\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} + 2\lambda\hat{\mathbf{f}} = 0$$

解得

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{g} \quad (5.26)$$

其中, $\mathbf{I}$ 为单位方阵。根据式(5.24)和式(5.26)可知,当 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ 或 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵时,两式相同。运算时,调整常数 λ 直到满意为止。

若令 $\gamma = 0, \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, 则式(5.24)就变为式(5.21),称这种情况为伪逆滤波器。

5.4 图像的频域复原法

5.4.1 逆滤波

逆滤波复原方法也称反向滤波法。根据图像退化模型,其基本原理如下

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

这显然是一个卷积表达式,由傅里叶变换的卷积定理可知式(5.27)成立。

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v) \quad (5.27)$$

其中, $G(u, v)$ 、 $H(u, v)$ 、 $N(u, v)$ 和 $F(u, v)$ 分别是退化图像 $g(x, y)$ 、点扩散函数 $h(x, y)$ 、噪声 $n(x, y)$ 和原图 $f(x, y)$ 的傅里叶变换。由式(5.27)可得

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad (5.28)$$

在噪声未知和不可分离的情况下,可近似取

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad (5.29)$$

对式(5.29)取傅里叶逆变换,便可得恢复后的图像,即

$$f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[F(u, v)] = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{G(u, v)}{H(u, v)}\right] \quad (5.30)$$

这意味着,如果已知退化图像的傅里叶变换和滤波传递函数,则可以求得原图的傅里叶变换,经逆傅里叶变换就可求得原图 $f(x, y)$ 。这里, $G(u, v)$ 除以 $H(u, v)$ 起到了反向滤波的作用,这就是逆滤波复原的基本原理。

利用式(5.28)和式(5.29)进行复原处理时可能会发生如下情况:在 u, v 平面上有些点或区域会产生 $H(u, v) = 0$ 或 $H(u, v)$ 非常小。在这种情况下,即使没有噪声,也无法精确地恢复 $f(x, y)$ 。另外,在噪声存在时,在 $H(u, v)$ 的邻域内, $H(u, v)$ 的值可能比 $N(u, v)$ 的值小得多,因此由式(5.28)得到的噪声项可能会非常大,这样也会使 $f(x, y)$ 不能正确恢复。

一般来说,逆滤波法不能正确地估计 $H(u, v)$ 的零点,因此必须采用一个折中的方法加以解决。实际上,逆滤波不使用 $1/H(u, v)$,而是采用另外一个关于 u, v 的函数 $M(u, v)$ 。它的处理框图如图 5.5 所示。

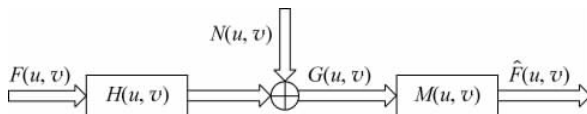


图 5.5 逆滤波处理框图

在没有零点且也不存在噪声的情况下,有

$$M(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \quad (5.31)$$

图 5.5 所示的模型包括退化和恢复运算。退化和恢复总的传递函数可用 $H(u, v)$ $M(u, v)$ 来表示,此时有

$$\hat{F}(u, v) = [H(u, v)M(u, v)]F(u, v) \quad (5.32)$$

其中, $\hat{f}(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 的估计值, $\hat{F}(u, v)$ 是 $\hat{f}(x, y)$ 的傅里叶变换。 $H(u, v)$ 称为输入传递函数, $M(u, v)$ 称为处理传递函数。 $H(u, v)M(u, v)$ 称为输出传递函数。

一般情况下, $H(u, v)$ 的幅度随着离 u, v 平面原点的距离的增加而迅速下降, 而噪声项 $N(u, v)$ 的幅度变化比较平缓。在远离 u, v 平面的原点时 $N(u, v)/H(u, v)$ 的值就会变得很大, 而对于大多数图像而言 $F(u, v)$ 却很小, 在这种情况下, 噪声反而占优势, 自然无法满意恢复出原图。这一规律说明, 应用逆滤波时仅在原点邻域内采用 $1/H(u, v)$ 才能有效。换句话说, $M(u, v)$ 满足

$$M(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & u^2 + v^2 \leq w_0^2 \\ 1 & u^2 + v^2 > w_0^2 \end{cases} \quad (5.33)$$

w_0 的选择应该将 $H(u, v)$ 的零点排除在此邻域之外。图 5.6 给出利用逆滤波恢复的实验结果, 其中图 5.6(a) 为原图, 图 5.6(b) 为降质模糊后的图像, 图 5.6(c) 是在原点附近复原的结果 (不包括 $H(u, v)$ 过分小的数值), 即利用式 (5.33) 恢复的结果, 而图 5.6(d) 是离原点较远的区域内复原的结果。从实验结果可以看出, 图 5.6(d) 无法正确恢复出原图“5”的样子, 而图 5.6(c) 尽管有振铃现象, 但能恢复出原图“5”的样子。

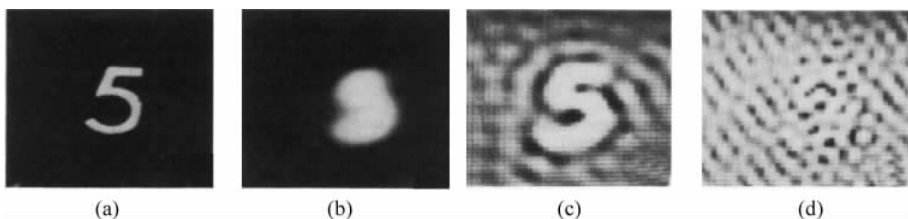


图 5.6 利用逆滤波进行图像恢复示例

5.4.2 最小二乘滤波

最小二乘滤波也就是维纳滤波, 它是使原图 $f(x, y)$ 及其恢复图像 $\hat{f}(x, y)$ 之间的均方误差最小的复原方法。它是一种约束复原, 除了要求了解关于降质模型的传递函数的情况外, 还需知道 (至少在理论上) 噪声的统计特性和噪声与图像的相关情况。

最小二乘方滤波法的基本原理就是 5.3.2 节的有约束代数复原方法, 即式 (5.24) 是最小二乘方滤波复原的基础, 问题的核心是如何选择一个合适的变换矩阵 Q 。选择 Q 类型的不同, 可得到不同类型的最小二乘方滤波复原方法。如选用图像 $f(x, y)$ 和噪声 $n(x, y)$ 的相关矩阵 R_f 和 R_n 来表示 Q , 就可得到维纳滤波复原方法。

假设 R_f 和 R_n 分别为原图 $f(x, y)$ 和噪声 $n(x, y)$ 的相关矩阵, 定义为

$$\begin{aligned} R_f &= E\{ff^T\} \\ R_n &= E\{nn^T\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

其中, $E\{\cdot\}$ 表示数学期望运算, R_f 的第 ij 个元素用 $E\{f_i f_j\}$ 表示, 它是 f 的第 i 个和第 j 个元素之间的相关。同样, R_n 的第 ij 个元素的 $E\{n_i n_j\}$ 给出了在 n 中相应的第 i 个和第 j 个元素之间的相关。因为 f 和 n 的元素是实数, 则

$$E\{f_i f_j\} = E\{f_j f_i\} \quad E\{n_i n_j\} = E\{n_j n_i\}$$

因此, $\mathbf{R}_f$ 和 $\mathbf{R}_n$ 均为实对称矩阵。对大多数的图像函数, 像素之间的相关不会延伸到图像中 20~30 个点的距离之外。因而, 典型的相关矩阵在主对角线附近将有一个非零元素带, 而在右上角和左下角的区域将为零。

假设任意两像素的相关性, 只与像素的距离有关, 而和它们所在的位置无关时, 可以证明 $\mathbf{R}_f$ 和 $\mathbf{R}_n$ 近似为分块循环矩阵。因此, 可利用一个 $\mathbf{H}$ 的特征向量组成的 $\mathbf{W}$ 矩阵对它们进行对角线化。设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为 $\mathbf{R}_f$ 和 $\mathbf{R}_n$ 相应的对角矩阵, 则

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1} \quad \mathbf{R}_n = \mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{W}^{-1} \quad (5.35)$$

如前所述, 矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 中的诸元素分别为相关矩阵 $\mathbf{R}_f$ 和 $\mathbf{R}_n$ 中诸元素的傅里叶变换。用 $\mathbf{S}_f(u, v)$ 和 $\mathbf{S}_n(u, v)$ 表示 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 矩阵中各元素, 而 $\mathbf{R}_f$ 和 $\mathbf{R}_n$ 中的各元素是 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{n}$ 中各元素之间的自相关函数。由信息论可知, 随机向量的自相关函数的傅里叶变换是随机向量的功率谱密度。因此 $\mathbf{S}_f(u, v)$ 和 $\mathbf{S}_n(u, v)$ 分别是 $\mathbf{f}(x, y)$ 和 $\mathbf{n}(x, y)$ 的谱密度。

如果我们选择线性算子 $\mathbf{Q}$ 满足如下关系

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{R}_n$$

将此式代入式(5.24)得

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

根据循环矩阵对角化以及式(5.35), 可得

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{W}\mathbf{D}^* \mathbf{D}\mathbf{W}^{-1} + \gamma \mathbf{W}\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{W}^{-1})^{-1} \mathbf{W}\mathbf{D}^* \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g} \quad (5.36)$$

$\mathbf{D}$ 中的对角线元素对应 $\mathbf{H}$ 中块元素的傅里叶变换。* 表示共轭。

如将式(5.36)两边左乘 $\mathbf{W}^{-1}$, 并进行某些矩阵变换, 则式(5.36)可变为

$$\mathbf{W}^{-1} \hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{D}^* \mathbf{D} + \gamma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g} \quad (5.37)$$

式(5.37)中的元素可写成下列形式

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(u, v) &= \left[\frac{\mathbf{H}^*(u, v)}{|\mathbf{H}(u, v)|^2 + \gamma [\mathbf{S}_n(u, v) / \mathbf{S}_f(u, v)]} \right] \mathbf{G}(u, v) \\ &= \left\{ \frac{1}{\mathbf{H}(u, v)} \cdot \frac{|\mathbf{H}(u, v)|^2}{|\mathbf{H}(u, v)|^2 + \gamma [\mathbf{S}_n(u, v) / \mathbf{S}_f(u, v)]} \right\} \mathbf{G}(u, v) \end{aligned} \quad (5.38)$$

当 $\gamma=1$ 时, 方括号中的项就是维纳滤波器。当 $\gamma=0$ 是便为前面所说的逆滤波。

如图 5.7 给出逆滤波和维纳滤波处理的结果。图 5.7(a) 是一张骨牌在不同信噪比条件下所发生的与水平呈 45° 角的直线运动模糊图像, 从上到下分别表示最大亮度和噪声振幅之比为 1:1、1:10 和 1:100 的情况。图 5.7(b) 是图 5.7(a) 的傅里叶变换图像。图 5.7(c) 是用逆滤波复原的结果。图 5.7(d) 是用维纳滤波复原的结果。图 5.7(e) 为图 5.7(d) 的傅里叶变换图像。由图 5.7 不难看出, 当信噪比较小小时, 逆滤波无法复原原图, 而当信噪比较大时, 即使逆滤波, 也能给出满意的复原结果。但无论在哪种情况下, 维纳滤波都比逆滤波效果好。

图 5.8 给出利用无约束条件的滤波即逆滤波以及限制条件的最小二乘方滤波进行处理的实验结果。图 5.8(a) 为原图, 图 5.8(b) 为模糊和加噪后的图像, 图 5.8(c) 为利用逆滤波恢复的结果, 图 5.8(d) 为利用限制条件的最小二乘方滤波复原的结果。从实验结果可以看出, 利用限制条件的滤波复原效果要好于无约束条件的滤波复原的结果。

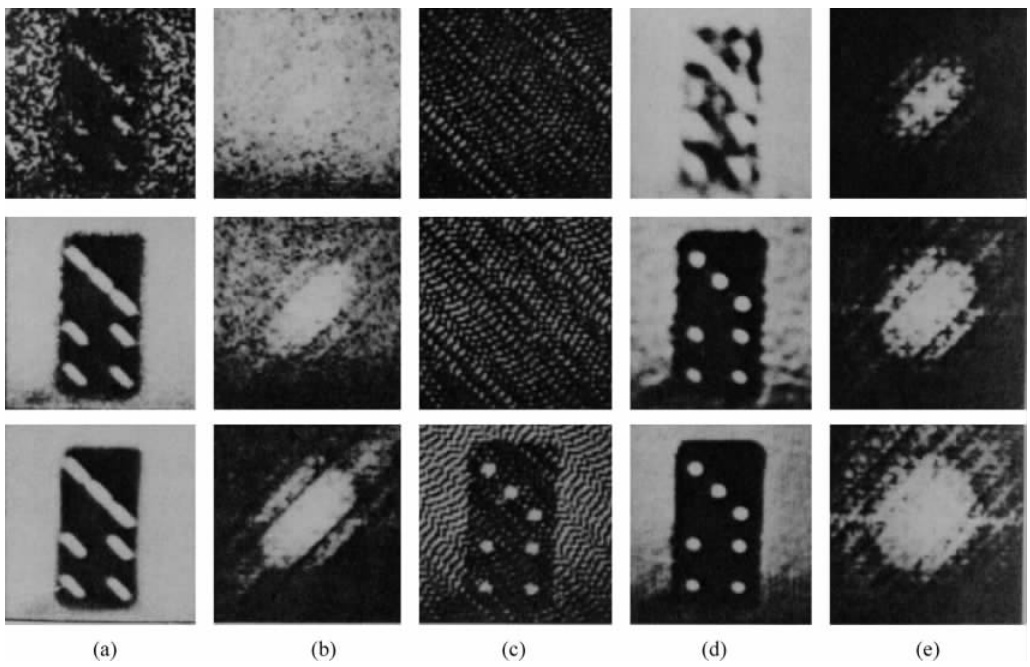


图 5.7 逆滤波和维纳滤波对模糊图像复原的示例

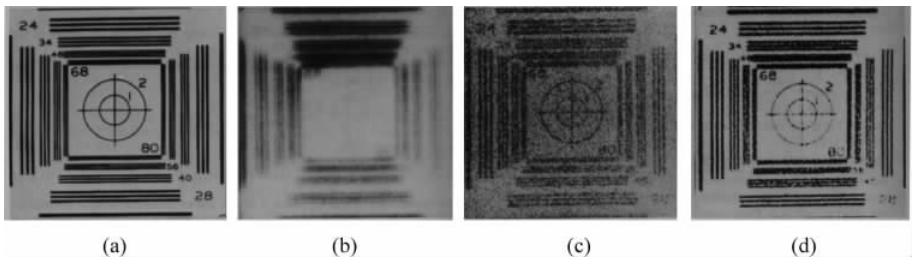


图 5.8 无约束滤波和限制滤波复原实验结果

5.5 其他的图像复原法

本节主要讨论人机交互式复原方法和图像几何畸变校正方法两种复原方法。

5.5.1 人机交互式复原法

除了用严格的分析方法进行图像复原外,在许多实际应用中,常常将人的直观感觉和数字计算机的灵活性进行巧妙的结合,以实现图像复原,这就是人机交互式的复原。对叠加有相干噪声的图像进行交互式复原是最简单的一种。所谓相干噪声,即两维正弦干扰噪声,它可以由振幅 A 和两个频率分量 u_0 、 v_0 加以描述,即

$$n(x,y) = A\sin(u_0x + v_0y)$$

其傅里叶变换为

$$N(u, v) = -\frac{jA}{2} \left[\delta\left(u - \frac{u_0}{2\pi}, v - \frac{v_0}{2\pi}\right) - \delta\left(u + \frac{u_0}{2\pi}, v + \frac{v_0}{2\pi}\right) \right] \quad (5.39)$$

于是当图像仅由原图像叠加了上述噪声而退化时,即当

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y)$$

时,模糊图像的傅里叶变换为

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

如果噪声幅度足够大, (u_0, v_0) 离开频率坐标平面原点较远,而图像信号的变换 $F(u, v)$ 又较小时,变换图像 $G(u, v)$ 将含有两个成镜像对称的亮点。只要在这两点处作用一个带阻滤波器,则对滤波后的频域图像取傅里叶逆变换,便可得到消除相干噪声后的复原图像。

如图 5.9 给出了滤除正弦干扰的示例,图 5.9(a)是含有相干噪声的图像,图 5.9(b)是其傅里叶谱图像,其上有较明显的两个亮点,可以通过交互式的方法即在两个亮点处用半径为 1 的带阻滤波器,然后再取傅里叶逆变换,得到复原图像 5.9(c)。由图 5.9 可以看出,条状噪声已经被消除。

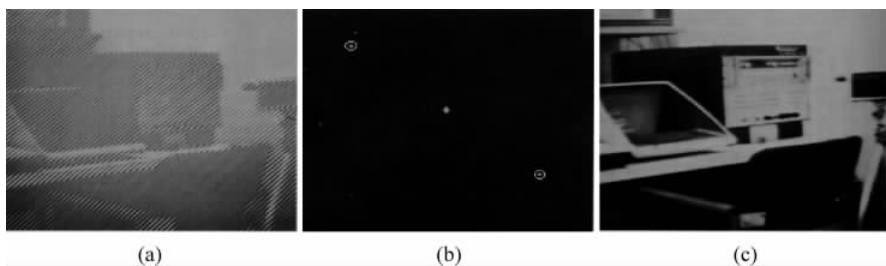


图 5.9 交互式滤除相干噪声

但在实际中被单一的正弦噪声干扰所模糊的图像毕竟很少。一类常常遇到的模糊图像是通过数据遥测、传输、接收和再现的图像,如航天飞行器的传真照片等。在这类图像中,存在着共同的干扰模式。它们通常是发生在弱信号接收、放大、显示的电子电路中,在显示屏上再现时,往往会夹杂明显的二维周期性干扰信号。如图 5.10 所示,图 5.10(a)是带有二维周期干扰的火星地形图片,可以看出,它的干扰模式和图 5.9(a)非常相似,只是更为精细,因而也更难消除。它的傅里叶谱如图 5.10(b)所示,其中若干对星状分布表示了不止一个正弦干扰。

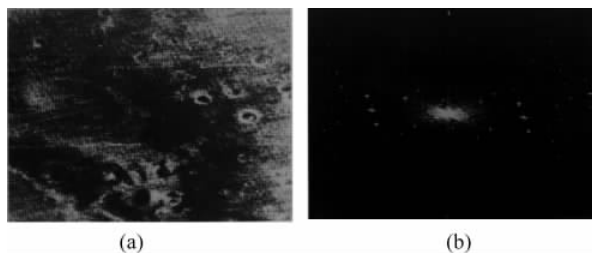


图 5.10 二维周期性干扰的火星图片及其傅里叶谱

一个实用的方法是:首先孤立并抽取那些主要干扰成分,然后从模糊图像中把经过加权处理的这部分干扰信号减掉。孤立并抽取主要干扰成分可以通过人机交互式完成。首先

根据显示图像的傅里叶变换,判断主要干扰成分所在位置,然后通过键盘等在该处作用一个传递函数为 $H(u,v)$ 的高通滤波器,于是该处抽取的干扰信号的傅里叶变换为

$$P(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

其傅里叶逆变换 $p(x,y)$ 便是空间域的主要干扰成分。

从模糊图像中减去 $p(x,y)$ 便是复原图像 $f(x,y)$ 。然而,由于所求的干扰只是真实干扰的一种近似,且含有有用的图像信息,因此在实际处理时,将取复原图像为

$$f(x,y) = g(x,y) - w(x,y)p(x,y) \quad (5.40)$$

其中, $w(x,y)$ 是加权函数或调制函数。它的选取在某种意义下使 $f(x,y)$ 为最佳。

一种选择方法是使 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 周围的一个指定的邻域内,方差为最小。如取 (x,y) 周围的领域为 $(2X+1) \times (2Y+1)$ 。 $w(x,y)$ 的最佳选取可归结为使局部方差

$$\sigma^2(x,y) = \frac{1}{(2X)(2Y)} \sum_{m=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y [f(x+m,y+n) - \bar{f}(x,y)]^2 \quad (5.41)$$

为最小。 $\bar{f}(x,y)$ 表示 $f(x,y)$ 在该小邻域中的局部均值。如果假设 $w(x,y)$ 在该小邻域内为常数,并令

$$\frac{\partial \sigma^2(x,y)}{\partial w(x,y)} = 0$$

可解得

$$w(x,y) = \frac{\overline{g(x,y)p(x,y)} - \overline{g(x,y)} \cdot \overline{p(x,y)}}{\overline{p^2(x,y)} - \overline{p(x,y)}^2} \quad (5.42)$$

于是,只需要根据式(5.42)计算出 $w(x,y)$,再利用式(5.40)便可求得复原图像。

图 5.11(a) 为图 5.10(a) 中 $P(u,v)$ 的频谱图相应的干扰 $p(x,y)$ 的图像,图 5.11(b) 是利用上述方法复原后的图像。

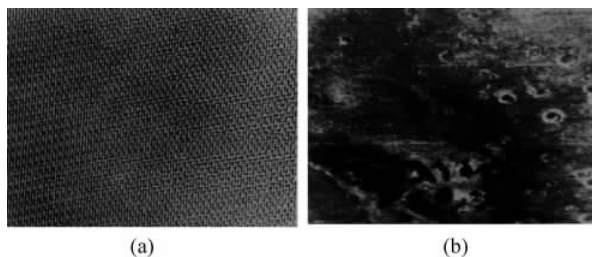


图 5.11 人机交互复原的示例

5.5.2 几何畸变校正

在图像的获取或显示过程中往往会产生几何畸变,例如,成像系统有一定的几何非线性。这主要是由于视像管摄像机以及阴极射线管显示器的扫描偏转系统有一定的非线性,因此会造成如图 5.12 所示的枕形畸变或桶形畸变。图 5.12(a) 为原图,图 5.12(b) 和图 5.12(c) 为畸变图像。

由成像系统引起的几何畸变的校正有两种方法:一种是预畸变法,这种方法是采用与畸变相反的非线性扫描偏转法,用来抵消预计的图像畸变;另一种是所谓的后验校正方法,

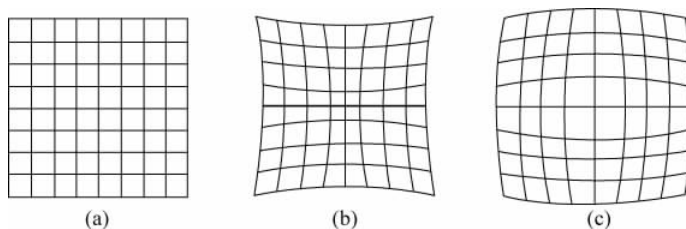


图 5.12 几何畸变

这种方法是用多项式曲线在水平和垂直方向上去拟合每一畸变的网格,然后求得逆变换得到校正函数。用这个校正函数即可校正畸变的图像。图像的空间几何畸变及其校正过程如图 5.13 所示。

对图像的几何畸变校正主要包括两步。

(1) 空间变换: 对图像平面上的像素进行重新排序以恢复原空间关系。

(2) 灰度插值: 对空间变换后的像素赋予相应的灰度值以恢复原位置的灰度值。

设原图像为 $f(x, y)$, 受到几何畸变的影响变成 $g(x', y')$ 。这里 (x', y') 表示畸变图像的坐标, 它已不是原坐标 (x, y) 。上述变化可表示为

$$x' = s(x, y) \quad y' = t(x, y) \quad (5.43)$$

其中, $s(x, y)$ 和 $t(x, y)$ 代表产生几何畸变图像的两个空间变换。对线性畸变, $s(x, y)$ 和 $t(x, y)$ 可写为

$$\begin{aligned} s(x, y) &= k_1x + k_2y + k_3 \\ t(x, y) &= k_4x + k_5y + k_6 \end{aligned} \quad (5.44)$$

对一般的(非线性)二次畸变, $s(x, y)$ 和 $t(x, y)$ 可写为

$$\begin{aligned} s(x, y) &= k_1 + k_2x + k_3y + k_4x^2 + k_5xy + k_6y^2 \\ t(x, y) &= k_7 + k_8x + k_9y + k_{10}x^2 + k_{11}xy + k_{12}y^2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

如果知道 $s(x, y)$ 和 $t(x, y)$ 的解析表示, 则就可以通过逆变换来恢复图像。在实际中通常是不知道其解析表示的, 为此需要在恢复过程的输入图(畸变图)和输出图(校正图)上找一些位置确切、已知的点(约束对应点), 然后再利用这些点建立两幅图像间其他像素空间位置对应关系。如图 5.14 所示, 给出了一个畸变图上的四边形区域和在校正图上与其对应的四边形区域。这两个四边形区域的顶点可作为对应点。设在四边形区域内的几何畸变过程可用一对双线性等式表示, 即

$$\begin{aligned} s(x, y) &= k_1x + k_2y + k_3xy + k_4 \\ t(x, y) &= k_5x + k_6y + k_7xy + k_8 \end{aligned} \quad (5.46)$$

将式(5.46)代入式(5.43), 得到

$$\begin{aligned} x' &= k_1x + k_2y + k_3xy + k_4 \\ y' &= k_5x + k_6y + k_7xy + k_8 \end{aligned} \quad (5.47)$$

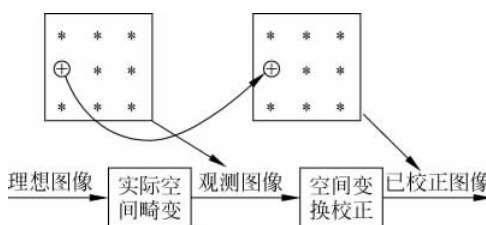


图 5.13 图像的空间几何畸变及校正过程

由图 5.14 可知,2 个四边形区域共有 4 组(8 个)已知对应点,所以上面公式中的 8 个系数 $k_i, i=1,2,\dots,8$ 可以全部解得。

尽管实际数字图像中的 (x,y) 总是整数,但由式(5.47)算得的 (x',y') 值可能不是整数。畸变图 $g(x',y')$ 是数字图像,其像素值仅在坐标为整数处有定义,所以在非整数处的像素值就要用其周围的一些整数处的像素来计算。这就叫灰度插值。如图 5.15 所示,图 5.15(a)是理想的原始不畸变图像,图 5.15(b)是实际采集的畸变图。几何校正就是要将畸变图恢复成原始图。由图 5.15 可知,由于畸变,原图中整数坐标点 (x,y) 映射到畸变图中的非整数坐标点 (x',y') ,而 g 在该点是没有定义的,由前面所讨论的空间变换可将应在原图 (x,y) 处的点 (x',y') 变换回原图 (x,y) 处,根据第 2 章中所描述的灰度级插值方法估计出点 (x',y') 的灰度值以赋值给原图 (x,y) 处的像素。

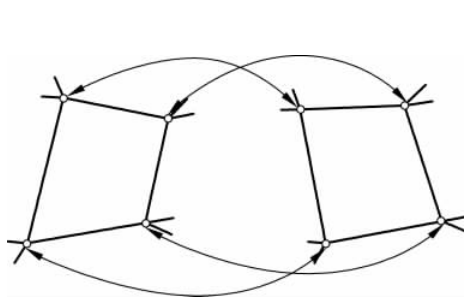


图 5.14 畸变图和校正图的对应点

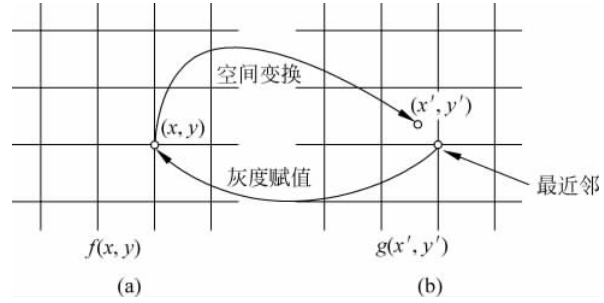


图 5.15 灰度插值示意图

如图 5.16 给出几何畸变校正的实验结果,其中图 5.16(a)表示标准正方形网格的桶形畸变图,图 5.16(b)则是利用空间变换和灰度插值算法消除几何畸变后的图形。图 5.16(c)是一幅发生几何畸变的图像,图 5.16(d)是校正后的图像。从图 5.16 可以看出,校正后的图像从视觉上更真实。

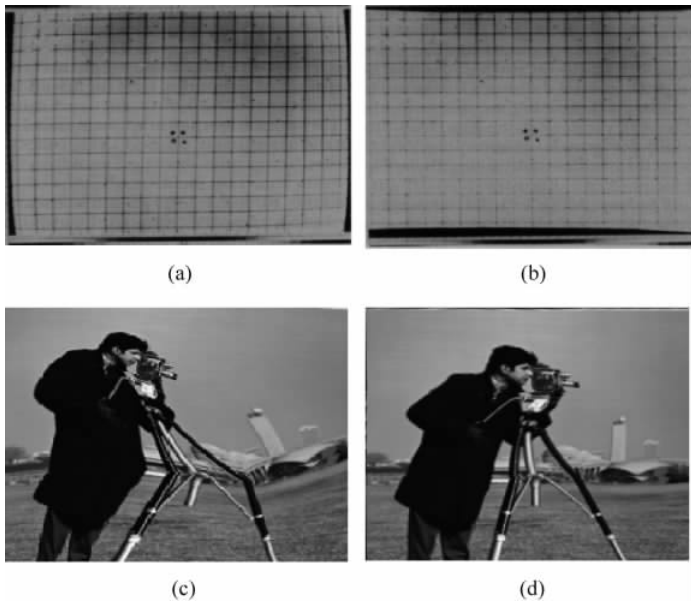


图 5.16 几何畸变校正的实验结果

习 题

1. 思考并试述图像复原的基本过程及难点。
2. 什么是无约束代数复原？什么是有约束代数复原？
3. 逆滤波复原的基本原理是什么？并从网上搜索其主要难点。
4. 思考并试描述最小二乘复原法。
5. 编写程序实现几何畸变校正。