第 1 章

线性规划基础

线性规划(linear programming,LP)是运筹学的基础部分,是运筹学中兴起较早的一个分支,也是运筹学中应用最广泛的一个部分,其理论和计算方法也较成熟。

20 世纪 30 年代末,苏联数学家康特罗维奇研究交通运输和机械加工等部门的生产管理,于 1939 年写了《生产组织与计划中的数学方法》一书初稿,为线性规划建立数学模型及解法奠定了基础;与此同时,美国的库普曼研究了选择最优化运输方案的方法,建立了“线性规划数学模型”,并取得了重大进展。他们二人由于科学的创举,后来成为诺贝尔经济学奖的获得者。到了 40 年代,线性规划得到进一步应用和发展,在工业/农业生产管理、交通运输的指挥调度、资源开发、商业和银行等领域得到广泛应用,对提高企业的经济效益有显著成效。随着生产规模的扩大和经济事务的繁杂,对线性规划提出了更多的理论要求,又促使这门学科迅速发展和完善。自 1947 年美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)提出了一般线性规划问题求解方法——单纯形法之后,线性规划在理论上趋于成熟,在实用中日益广泛与深入,特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后,线性规划的适用领域更为广泛了,从解决技术问题的最优化设计,到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用,它已成为现代管理科学的重要基础理论。

1.1 线性规划及其数学模型

在生产管理和经营活动中经常提出一类问题,即如何合理有效地利用有限的人、财、物等资源,以便得到最好的经济效果。线性规划是目前应用最广泛的一种系统优化方法,广泛应用于工农业生产和经济管理等领域,其核心思想是以最少的资源消耗取得最大的经济效果,即线性规划是以数学为工具,来研究在一定的人、财、物等资源条件下,用最少的资源耗费,取得最大的经济效果。

下面我们来讨论一个线性规划问题引例,由此引出一个线性规划问题。

1.1.1 线性规划问题引例

【例 1-1】 某公司生产甲、乙两种产品,均需在 A、B、C 三种不同的设备上加工,产品加工所需工时单耗、产品销售后能获得的利润及设备可用工时数如表 1-1 所示。问:如何安排生产计划,才能使该公司获得的总利润最大?

表 1-1　产品生产基础数据表

产品＼单耗＼设备	A	B	C	利润（元/公斤）
甲	3	5	9	70
乙	9	5	3	30
限制工时	540	450	720	

解：这是一个典型的线性规划问题，下面建立该问题的线性规划数学模型。

（1）设甲、乙产品产量分别为 x_1、x_2 公斤　——决策变量，简称变量

（2）设总利润为 Z，则

$$\text{Max } Z = 70x_1 + 30x_2 \quad \text{—— 目标函数}$$

（3）设备可用工时数限制　——约束条件

$3x_1+9x_2 \leqslant 540$　A 设备可用工时约束

$5x_1+5x_2 \leqslant 450$　B 设备可用工时约束

$9x_1+3x_2 \leqslant 720$　C 设备可用工时约束

$x_1, x_2 \geqslant 0$　　非负约束

因此原问题的数学模型为（其中 s. t. 是 subject to 的简写，意为约束条件）：

$$\text{Max } Z = 70x_1 + 30x_2 \quad ①$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leqslant 540 & ② \\ 5x_1 + 5x_2 \leqslant 450 & ③ \\ 9x_1 + 3x_2 \leqslant 720 & ④ \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & ⑤ \end{cases} \tag{1-1}$$

这就是线性规划问题引例的数学模型。因此对于一个实际问题，数学模型就是以适当的数学公式来表达它的内在关系。

1.1.2　数学模型的事理含义

当我们把一个实际问题表达成 LP 数学模型时，一定要注意数学模型中的事理含义及物理量的计量单位。

1. 数学模型的三要素

（1）有一组待确定的决策变量。如例 1-1 中(x_1, x_2)为一个具体行动方案。

一般来说，构成线性规划的问题都有很多具体方案可供选择，但是最优的方案往往只有一个，这是规划问题的一大特点。研究规划的目的和价值就是从很多的可行方案中去求得这个最优方案，使得资源得到充分利用，避免因任意选取其他方案而造成资源的浪费，这样就能够达到最优的经济效果。

（2）有一个明确的目标要求（Max 或 Min）。如例 1-1 中要求利润 Z 最大。

显然，任取一种计划产量 x_1 和 x_2 值（只要满足全部约束条件）的可行方案，都会提供

一定数量的利润，但不一定是最大，因此目标要求与待定的决策变量的取值紧密相关，也就是说目标值是决策变量的函数，故称为目标函数。另外目标要求依具体问题的性质不同而不同，本例中要求总利润，因此越大越好，用符号 Max 表示；有的情况下可能是计算费用或时间，此时越小越好，用符号 Min 表示。

人们常把线性规划研究的问题归纳为两类：第一类是某项任务确定后，如何统筹安排，尽量以最少的资源去完成这项任务；第二类是现有一定数量的资源，怎样安排和使用它们，使完成的任务最多，创造的财富最大。实际上这两类问题是同一个问题的两个方面或两种提法，本质都是寻求整个问题的某项整体指标的最优解。

(3) 存在一组约束条件。如例 1-1 中 A、B、C 三种设备可用工时的约束。

它们也是用决策变量的线性方程来表示的，约束条件反映规划的客观限制。在产品生产过程中，资源往往是有限的，约束条件确定规划的实现范围，即确定了所求变量的变化域。

2. 数学模型中系数的含义

(1) 目标函数中决策变量的系数 C_j，称为价值系数。

如例 1-1 中的 70、30 就是价值系数，表示单位产品提供的利润(元/公斤)。在具体问题中有明确的经济含义和计量单位。

(2) 约束条件左边决策变量前的系数 a_{ij}，称为约束条件系数。

在具体问题中也有明确的经济含义和计量单位，如例 1-1 中的 3、5、9 和 9、5、3 就是约束条件系数(本例中为单耗)，表示单位产品的设备工时消耗量(小时/公斤)。

(3) 约束条件右边的常数 b_i，称为限制常数。

如例 1-1 中的 540、450、720 就是限制常数，表示设备 A、B、C 现有最大的可用工时。在具体问题中它有明确的含义和计量单位。

1.1.3　数学模型解的名称

在线性规划数学模型(1-1)中，一般我们能够找到决策变量很多个解，即有很多种方案，将所有约束条件用图形绘出，如图 1-1 所示。以下定义几种解的名称。

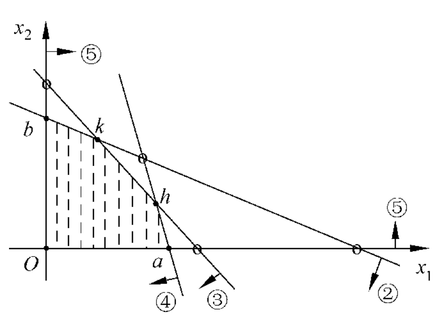

图 1-1　数学模型的可行解域

(1) 可行解

凡满足所有约束条件②、③、④、⑤的所有解称为可行解，它们对应可行方案。所有可

行解的集合构成可行解域,即图中阴影部分。可行解域中的任何一点称为可行点,对应一个可行方案,这个点的坐标$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$构成一个列向量,称为可行向量。

(2) 最优解

凡使得目标函数 Z 值达到最优(最大或最小)的可行解称为最优解。最优解一般情况下是唯一存在的,但在一些特殊的规划问题中,可能有无穷多个最优解或者不存在最优解。

(3) 基本解

所有约束条件直线的交点对应的解称为基本解,如图 1-1 中所有实心点和空心点对应的解。

(4) 基本可行解

可行解域边界上的约束条件直线的交点对应的解称为基本可行解,即图 1-1 中所有的实心点对应的解。它满足两个条件:其一是基本解,即约束条件直线的交点对应的解;其二是可行解,即满足所有的约束条件,在可行解域内。

1.1.4 数学模型的一般形式

综上所述,从结构上看,线性规划数学模型包括目标函数、约束条件和变量非负约束三个部分,完整的表达式为

$$\text{Max(Min)}\ Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_m \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{1-2}$$

如果式(1-2)中的方程(包括目标函数和约束条件)均是线性方程,则称之为线性规划;如果式(1-2)中的方程出现非线性方程,则称之为非线性规划。

1.1.5 线性规划问题求解过程

利用线性规划求解实际问题可归结为以下三个步骤。

第一步,将实际问题转化为数学模型(数学公式),这一步叫建模。

第二步,求解数学模型的最优解,有以下两种方法。

方法一:图解法,适合于两个变量的 LP 数学模型。

方法二:单纯形法,适合于任意个变量的 LP 数学模型。

第三步,将数学模型的最优解转化为原问题的最优方案。

1.2 线性规划问题的建模

建模是解决线性规划问题极为重要的环节。从实践的角度来讲,一个正确数模的建成,标志着问题的解决已接近完成,答案在计算机上由线性规划程序运行就会很快获得。

一个正确数模的建立要求建模者熟悉规划问题的生产和管理内容，明确目标要求和错综复杂的约束条件，要通过大量的调查和统计资料获取原始可靠的数据。建立一个较复杂的实际模型，这些要求是要花费相当大的工作量的。对于初学者来说怎样从问题的内容出发分析和认识问题，善于从数学模型这个角度有条理地表述出来，掌握建模过程是十分重要的。

线性规划适于解决的问题面很广，因此不可能有一个统一的建模标准，这就使建模成为一种带技巧性的工作。即使如此，建模过程还是有一定规律的，即通过对实际问题的分析和理解，明确哪些是决策变量，目标要求是什么，有哪些限制条件，也就是抓住数学模型的三个基本要素：决策变量、目标函数和约束条件。列出相应的方程式，即得问题的数学模型。归结为以下三个步骤。

第一步，分析问题的要求，确定决策变量。

第二步，找出问题目标要求，确定目标函数。

第三步，分析决策变量所受的限制，列出约束条件。

本节通过几个例子来说明建模过程，同时介绍不同类型的问题，以便使读者对线性规划的应用领域和它的现实意义有进一步的认识。

1.2.1 资源合理利用问题

资源合理利用是企业编制生产计划时经常考虑的实际问题。其任务是企业(也可以是一个地区，甚至整个国家)如何规划和调配它的有限资源以达到生产的目的，并使企业获取最大的利润；或使资源、材料耗费最少，从而使生产成本为最小。现举简例说明。

【例 1-2】 某厂生产 A、B 两种产品，都需用煤、金属材料、电力等资源。制造 1 吨 A 产品需用煤 6 吨，金属材料 80 公斤，电力 50 千瓦；制造 1 吨 B 产品需用煤 8 吨，金属材料 50 公斤，电力 10 千瓦。现该厂仅有煤 540 吨，电力 2000 千瓦，金属材料 4000 公斤可供利用，其他资源可以充分供应。又知：A、B 产品能得到利润分别为 6 千元/吨和 5 千元/吨。问：在现有这些资源限制条件下，应生产多少吨 A 和 B 产品，使企业获得利润最大？试建立该问题的数学模型。

解：这是一个资源合理利用问题，将问题转化为表 1-2，辅助建模。

表 1-2 产品生产基础数据表

资源 / 单耗 / 产品	煤（吨）	金属材料（公斤）	电力（千瓦）	利润（千元/吨）
A（x_1 吨）	6	80	50	6
B（x_2 吨）	8	50	10	5
资源限制	540	4000	2000	

(1) 确定决策变量。要求回答的是 A、B 产品的生产量，设用 x_1 和 x_2(单位：吨)分别表示 A、B 产品的生产量。

(2) 确定目标函数。企业是要求利润为最大，设 Z 表示企业利润，则有

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2 \quad (\text{千元})$$

(3) 确定约束条件。该问题有煤、金属材料和电力三种资源的限制,据此可建立这三种资源的限制约束条件如下:

煤: $6x_1+8x_2\leqslant 540$(吨)

金属材料: $80x_1+50x_2\leqslant 4000$(公斤)

电力: $50x_1+10x_2\leqslant 2000$(千瓦)

可得该问题的线性规划数模如下:

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}6x_1 + 8x_2 \leqslant 540\\ 80x_1 + 50x_2 \leqslant 4000\\ 50x_1 + 10x_2 \leqslant 2000\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

资源合理利用问题的一般数模如下:

假设某个企业有 m 种资源,已知每种资源的数量为 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$。该企业能生产 n 种产品(x_j 为第 j 种产生的产量,$j=1,2,\cdots,n$),已知生产每一种产品单位产量所消耗的各种资源数量,我们用 a_{ij} 表示第 j 种产品对第 i 种资源单耗。设各种产品的价格为已知,用 c_j 表示第 j 种产品的单价。在现有资源条件下,如何规划生产,使得产值最大?其数模如下:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

$$\text{s. t. }\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_j \leqslant b_i, & i = 1,2,\cdots,m\\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n\end{cases}$$

1.2.2 合理下料问题

合理下料是许多工业部门中经常遇到的问题。例如,机械加工时,常常将一定的条形金属原材料或板料切割成若干段或块,加工成所需的毛坯。在一般情况下,材料不可能被完全利用,就有边角余料要处理,造成大材小用,优材劣用,甚至当成废物收集,搬运回炉。这样产品单耗高,成本也高。因此,如何最大限度地减少边角余料,提高原材料利用率,就是提高经济效益的规划问题。现举一例说明。

【例 1-3】 有一批长度为 180 公分的钢管,需截成 70、52 和 35 公分三种管料。它们的需求量应分别不少于 100、150 和 100 个。问:应如何下料才能使钢管的余料为最少?试建立该问题的数学模型。

解:这是一个合理下料问题,下料方案是在满足管料尺寸条件下可能的各种下料方式中进行选择,利用下图列出所有下料方式,共有八种,如表 1-3 所示。

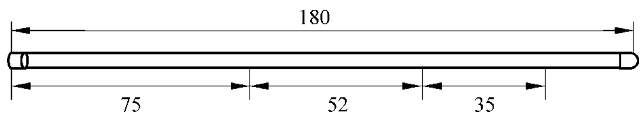

表 1-3　下料方式表　　单位：公分

管料尺寸 / 个数 / 下料方式	70	52	35	余料
一(x_1根)	2	0	1	5
二(x_2根)	1	2	0	6
三(x_3根)	1	1	1	23
四(x_4根)	1	0	3	5
五(x_5根)	0	3	0	24
六(x_6根)	0	2	2	6
七(x_7根)	0	1	3	23
八(x_8根)	0	0	5	5
管料需求个数	100	150	100	

(1) 确定变量。设 x_j 为第 j 种下料方式所用的钢管根数，$j=1,2,\cdots,8$。

(2) 确定目标函数。要求总余料最少，设总余料为 Z，则

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8 \quad \text{(公分)}$$

(3) 确定约束条件。必须使各种下料方式提供的管料个数不少于需求量，即：

70 公分管料个数需求约束：$2x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 100$(个)

52 公分管料个数需求约束：$2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7 \geqslant 150$(个)

35 公分管料个数需求约束：$x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8 \geqslant 100$(个)

非负整数约束：$x_j \geqslant 0$，并且为整数

于是该问题的线性规划数模如下：

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 150 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geqslant 100 \\ x_j \geqslant 0\text{，且为整数，} j = 1,2,\cdots,8 \end{cases}$$

合理下料问题的一般数学模型如下：

假设需要切割 m 种零件毛坯，其数量分别以 b_i 表示($i=1,2,\cdots,m$)；设可能有 n 种下料方式，并分别以 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}$ 表示第 j 种下料方式每根原料(或每块板料)所切割出来的零件毛坯数量。

设 x_j 表示第 j 种下料方式所消耗的原材料根数(或块数),则有

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\ x_j \geqslant 0, \quad 且为整数, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

1.2.3 运输问题

在国民经济中如何组织好一个地区乃至全国范围内的物资调运工作是十分重要的。例如,某类产品有若干个生产地,已知每个生产地的产量;这类产品有若干个消费地,各地消费量也知道。假如总产量和总消费量恰好相等,由产地运到各消费地的运费单价已知,现如何来编制一个最优的运输计划,使总的运输费用为最小?

【例 1-4】 某地有 3 个有色金属矿 A_1、A_2、A_3,生产同一种金属矿石,A_1 矿的年产量为 100 万吨,A_2 矿为 80 万吨,A_3 矿为 50 万吨。矿石全部供应 4 个冶炼厂,B_1 厂的全部需求量为 50 万吨,B_2 厂 70 为万吨,B_3 厂为 80 万吨,B_4 厂为 30 万吨。产量恰好等于总需求量,矿石由各矿山运到冶炼厂的单位运价已知,如表 1-4 所示。问:如何安排运输,使各矿山的矿石运到冶炼厂,满足各厂的需要,且运输费用最小?试建立该问题的数学模型。

表 1-4 运价表 单位:元/吨

冶炼厂 / 运价 / 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1.5	2	0.3	3
A_2	7	0.8	1.4	2
A_3	1.2	0.3	2	2.5

解:这是一个运输问题,要制订最优运输计划使总运输费用最小。

(1) 确定决策变量。该问题是要确定各矿山运给冶炼厂多少矿石,使总运输费用最小,故设 x_{ij} 表示第 i 个矿山运到第 j 个冶炼厂的矿石量,可列表 1-5。

(2) 确定目标函数。本题给出的表 1-4 中的单位运价就是价值系数 c_j,注意单位是:元/吨。问题的目标是求总运输最小,设 Z 表示总费用,故目标函数为

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 1.5x_{11} + 2x_{12} + 0.3x_{13} + 3x_{14} + 7x_{21} + 0.8x_{22} + 1.4x_{23} + 2x_{24} \\ & + 1.2x_{31} + 0.3x_{32} + 2x_{33} + 2.5x_{34} \quad (万元) \end{aligned}$$

表 1-5　运输计划表　　　　单位：万吨

冶炼厂 / 运输量 / 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	100
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	80
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	50
需要量	50	70	80	30	230

(3) 确定约束条件。由表 1-5 可以写出

$$\text{s. t.}\begin{cases}\left.\begin{aligned}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}&=100\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}&=80\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}&=50\end{aligned}\right\}\text{各矿山输出量与产量平衡}\\\left.\begin{aligned}x_{11}+x_{21}+x_{31}&=50\\x_{12}+x_{22}+x_{32}&=70\\x_{13}+x_{23}+x_{33}&=80\\x_{14}+x_{24}+x_{34}&=30\end{aligned}\right\}\text{各冶炼厂输入量与需求量平衡}\\x_{ij}\geqslant 0\quad,i=1,2,3;\quad j=1,2,3,4\end{cases}$$

运输问题的一般数模可表达如下：

设某产品有 m 个生产地，其产量分别为 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$；该产品有 n 个消费地，需要量分别为 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$，并且产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_i$$

以 c_{ij} 表示第 i 产地运到第 j 消费地的单位产品运价。则数模为

$$\text{Min } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,m\\\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=1,2,\cdots,n\\x_{ij}\geqslant 0\end{cases}$$

1.2.4　人员分派问题

在生产管理中，经常遇到为了发挥最大工作效率而最佳地分派人员的问题。现举一例说明。

【例 1-5】　设有四件工作分派给 4 个人来做，每项工作只能由一人来做，每个人只能做一项工作。希望适当安排人选，发挥各人特长又能使总的效率最大。表 1-6 表示出各人对各项工作所具有的工作效率。

表 1-6 人员工作效率表

人员 \ 效率 \ 工作	A	B	C	D
甲	0.6	0.2	0.3	0.1
乙	0.7	0.4	0.3	0.2
丙	0.8	1.0	0.7	0.3
丁	0.7	0.7	0.5	0.4

解：这是一个分派问题，要制订最优分派计划使效率最大。

(1) 确定决策变量。设 x_{ij} 为分派第 i 个人从事第 j 项工作，$x_{ij}=1$、0（分派与否），当 $x_{ij}=1$ 时，说明把第 j 项工作分派给第 i 人来做；否则，$x_{ij}=0$，表示第 j 项工作不分派给第 i 人来做。因此，x_{ij} 只能取 0 和 1 两个值中之一。可列表 1-7。

(2) 确定目标函数。总的效率可以认为是各人从事每项工作效率之和，设总效率为 Z，故目标函数为

$$\begin{aligned}\text{Max } Z = & 0.6x_{11}+0.2x_{12}+0.3x_{13}+0.1x_{14}+0.7x_{21}+0.4x_{22}+0.3x_{23}+0.2x_{24}\\ & +0.8x_{31}+1.0x_{32}+0.7x_{33}+0.3x_{34}+0.7x_{41}+0.7x_{42}+0.5x_{43}+0.4x_{44}\end{aligned}$$

表 1-7 人员分派计划表

人员 \ 分派与否 \ 工作	A	B	C	D
甲	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
乙	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
丙	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
丁	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

(3) 确定约束条件。由题意知，每个人只能分派一项工作（且必须做一项工作），每项工作只能由一个人来做（且每项工作必须由一个人来做），由此可列出以下约束条件方程：

$$\text{s. t. }\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1\end{array}\right\}\text{每个人只能做一项工作}\\ \left.\begin{array}{l}x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1\end{array}\right\}\text{每项工作只能由一人来做}\\ x_{ij}=1、0,\quad i=1,2,3,4;\quad j=1,2,3,4\end{cases}$$