第3章 集合论

集合是什么？一些事物无序地组合在一起就是集合。这个极其直观的描述是由一位叫康托(Georg Cantor，1845—1918)的德国数学家提出的，但就是由这个直观的描述所产生的理论，几乎导致了整个数学体系的崩溃。

这种崩溃源于对无穷量的认识。在康托之前的许多伟大的数学家都对这个概念表达了厌恶，高斯(Johann Gauss，1777—1855)甚至通过反对在数学中使用无穷量来表达这种情绪。但在17世纪牛顿(Isaac Newton，1643—1724)和莱布尼茨(Gottfried Leibniz，1646—1716)创立了微积分理论之后，对无穷大和无穷小这种无穷量的探讨成为了整个微积分理论的基础。为此，从19世纪开始，柯西(Augustin Cauchy，1789—1857)、魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass，1815—1897)等人对微积分理论进行了严格化的工作。他们建立了极限理论，并把极限理论的基础归结为实数理论。那么，实数理论的基础又该是什么呢？康托试图用集合论来作为实数理论，乃至整个微积分理论体系的基础。

康托所创立的集合理论用一一对应的方式来考察各种数量关系，特别是无穷数量关系。例如，在整数和偶数这两个无穷集合中，对于任意一个整数 x，都存在一个偶数 $2x$，同时对于任意一个偶数 x，也都存在一个整数 $x/2$，因此整数集合中包含的数的个数同偶数集合中包含的数的个数是相同的。也就是说一个集合中元素的数量同它的一个部分中所包含的元素数量是相同的。这种与当时主流的数学框架格格不入的古怪理论，从一出世就一直处于争论的旋涡中，许多当时赫赫有名的数学家都对其进行了强烈攻击。直到20世纪初，许多数学成果都是建立在集合论的基础之上，集合论才被数学界认可。

正当数学家们都欣喜地认为所有的数学问题都可以以集合论作为基础进行讨论的时候，1902年罗素(Bertrand Russell，1872—1970)提出了一个集合是否属于自己的悖论，使得大家认识到集合论存在着漏洞。绝对严密的数学陷入了自相矛盾之中。这就是数学史上的第三次危机。

1908年，策梅罗(Ernst Zermelo，1871—1953)提出公理化集合论，后经改进形成无矛盾的集合论公理系统，简称ZF公理系统。原本直观的集合概念被建立在严格的公理基础之上，从而避免了悖论的出现，因而较圆满地解决了第三次数学危机。这就是集合论发展的第二个阶段：公理化集合论。与此相对应，在1908年以前由康托创立的集合论被称为朴素集合论。现在，集合论作为现代数学的基础，已经深入各种科学技术领域中。例如在开关理论、有限状态机、形式语言等领域中，都卓有成效地应用了集合论。

本部分的内容分为三章来介绍：集合论、二元关系和函数。

3.1 集合的概念及其表示

集合是一个不能精确定义的基本概念。一般来说，把具有共同性质的一些事物汇集成一个整体，就叫作**集合**。而这些事物就是这个集合的**元素**。例如，全体中国人是一个集合，每个中国人都是这个集合的元素；全体自然数是一个集合，每个自然数都是这个集合的元素；图书馆的藏书是一个集合，每本书都是这个集合的元素；全国的高校也形成一个集合，每所高校都是这个集合的元素。

集合一般用大写的英文字母表示，集合中的事物，即元素用小写的英文字母表示。若元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"；反之，记作 $a\notin A$，读作"a 不属于 A"。

若一个集合的元素个数是有限的，则称作**有限集**，否则称作**无限集**。

表示集合的方法有两种。

(1) 枚举法：把集合中的元素写在一个花括号内，元素间用逗号隔开。例如：

$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,\cdots\}$，$C=\{2,4,6,\cdots,2n\}$，$D=\{a,a^2,a^3,\cdots\}$等。

(2) 构造法：构造法又叫谓词法。如果 $P(x)$是表示元素 x 具有某种性质 P 的谓词，则所有具有性质 P 的元素构成了一个集合，记作 $A=\{x|P(x)\}$。显然，若 $P(x)$的真值为 1，则 $x\in A$。例如：

$$A=\{x \mid x\text{是正奇数}\}$$

集合的元素是彼此不同的，如果同一个元素在集合中多次出现应该认为是一个元素，如

$$\{1,2,4\}=\{1,2,2,4\}$$

集合的元素是无序的，如

$$\{1,2,4\}=\{1,4,2\}$$

但$\{\{1,2\},4\}\neq\{1,4,2\}$。

集合中的元素还可以是集合。例如

$$S=\{a,\{1,2\},P,\{q\}\}$$

应该说明的是 $q\in\{q\}$，但 $q\notin S$，同理 $1\in\{1,2\}$，但 $1\notin S$。

例如，设 A 是小于 10 的素数集合，即 $A=\{2,3,5,7\}$，又设代数方程 $x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0$ 的所有根组成的集合为 B，则 B 正好也是$\{2,3,5,7\}$，因此集合 A 和 B 是相等的。

在本书中定义一些通用的集合的符号：自然数集合 $\mathbf{N}$、整数集合 $\mathbf{Z}$、有理数集合 $\mathbf{Q}$、实数集合 $\mathbf{R}$ 和复数集合 $\mathbf{C}$。

为了体系上的严谨性，规定对于任何集合 A 都有 $A\notin A$。

下面考虑两个集合之间的关系。

定义 3.1 设 A，B 是任意两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的**子集**，或说 B 包含 A，A 包含于 B 内。记作 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$，其形式化表述为

$$A\subseteq B\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)$$

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{a,c\}$，$D=\{c\}$，则 $B\subseteq A$，$C\subseteq A$，$D\subseteq A$，$D\subseteq C$。

同理，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$，但 $\mathbf{Z}\nsubseteq\mathbf{N}$。

显然对于任意集合 A，都有 $A\subseteq A$。

定义 3.2 设 A,B 是任意两个集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$，其形式化表述为

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

证明两个集合相等，主要利用这个互为子集的判定条件。

定义 3.3 如果集合 A 的每一个元素都属于 B，但集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$。其形式化表述为

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B) \land (\exists y)(y \in B \land y \notin A)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$$

例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$，但 $\mathbf{N}\not\subset\mathbf{N}$。

定义 3.4 不包含任何元素的集合为**空集**，记作$\varnothing$。其形式化表述为

$$\varnothing = \{x \mid P(x) \land \neg P(x)\}$$

其中，$P(x)$是任意谓词。

定理 3.1 空集是任意集合的子集，即对于任意集合 A，有$\varnothing\subseteq A$。

证明：假设$\varnothing\subseteq A$ 是假，则至少有一个元素 x，使得 $x\in\varnothing$且 $x\notin A$，然而空集$\varnothing$不包含任何元素，所以以上假设不成立，即$\varnothing\subseteq A$ 为真。

根据空集和子集的定义，可以看到，对于每一个非空集合 A，至少有两个不同的子集 A 和$\varnothing$，即 $A\subseteq A$ 和$\varnothing\subseteq A$，并且称它们是 A 的平凡子集。一般来说，A 的每一个元素都能确定 A 的一个子集，即若 $a\in A$，则$\{a\}\subseteq A$。

定义 3.5 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为**全集**，记作 E。对于任意 $x\in A$，因为 $A\subseteq E$，所以 $x\in E$，即$(\forall x)(x\in E)$恒真。其形式化表述为

$$E = \{x \mid P(x) \lor \neg P(x)\}$$

其中，$P(x)$为任意谓词。

设全集 $E=\{a,b,c\}$，它的所有可能的子集有：

$S_0=\varnothing$，$S_1=\{a\}$，$S_2=\{b\}$，$S_3=\{c\}$，$S_4=\{a,b\}$，$S_5=\{a,c\}$，$S_6=\{b,c\}$，$S_7=\{a,b,c\}$。

这些子集都包含在 E 中，即 $S_i\subseteq E(i=0,1,2,\cdots,7)$，但 $S_i\notin E$。如果把 S_i 作为元素，可以组成另外一种集合。

定义 3.6 给定集合 A，由集合 A 的所有子集为元素组成的集合称为集合 A 的**幂集**，记为 $P(A)$。

例如 $A=\{a,b,c\}$，

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$。

定理 3.2 若有限集合 A 有 n 个元素，则它的幂集 $P(A)$有 2^n 个元素。

证明：应用数学归纳法，当 $n=0$ 时，A 为空集，其子集只有空集，即 $P(A)$中只包含 2^0 个元素。

假设集合 A 有 n 个元素时，其幂集 $P(A)$有 2^n 个元素。

当集合 A 有 $n+1$ 个元素时，设新添加的元素为 a_{n+1}，则 $P(A)$中的元素可分为两类：

(1) 不包含元素 a_{n+1}的集合，其个数为 2^n；

(2) 包含元素 a_{n+1}的集合。

将元素 a_{n+1} 加入到(1)中所有的集合中，则可得到包含元素 a_{n+1} 的集合，其个数也为 2^n。

因此，当集合 A 有 $n+1$ 个元素时，其幂集 $P(A)$ 有 $2^n+2^n=2^{n+1}$ 个元素。

综上所述，若集合 A 有 n 个元素，则它的幂集 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

现在引进一种编码，用来唯一地表示有限集的幂集元素，现以 $S=\{a,b,c\}$ 为例来说明这种编码方法。

$P(S)=\{S_i \mid i\in J\}$，$J=\{i \mid i$ 是二进制数并且 $000\leqslant i\leqslant 111\}$

例如，$S_3=S_{011}=\{b,c\}$，$S_6=S_{110}=\{a,b\}$等。

一般地，$P(S)=\{S_0,S_1,\cdots,S_{2^n-1}\}$，即

$$P(S)=\{S_i \mid i\in J\},J=\{i \mid i \text{ 是二进制数并且} \underbrace{000\cdots0}_{n\text{个}}\leqslant i\leqslant \underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}\}$$

3.2 集合的运算及恒等式

集合之间的关系和初级运算可以用文氏图形象地描述。文氏图的构造方法是首先画一个大矩形表示全集 E(有时为简单起见可将全集省略)，然后在矩形内画一些圆(或任何其他适当的闭曲线)，用圆的内部表示集合。不同的圆代表不同的集合，如图 3.1 所示，图 3.1 中的阴影部分表示新组成的集合。

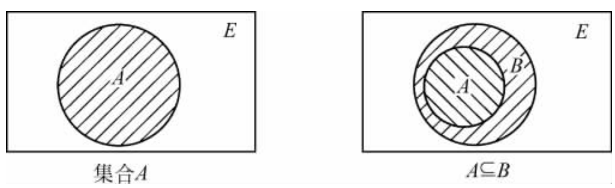

图 3.1 文氏图表示集合关系

集合的运算，就是以给定集合为对象，按确定的规则得到另外一些集合。集合的基本运算有并、交、相对补、绝对补和对称差。

定义 3.7 设 A,B 为集合，A 与 B 的**并集** $A\cup B$、**交集** $A\cap B$，B 对 A 的**相对补集** $A-B$ 分别定义如下：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$$
$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$

由定义可以看出，$A\cup B$ 由 A 和 B 中的所有元素构成，$A\cap B$ 由 A 和 B 中的公共元素构成，$A-B$ 由属于 A 但不属于 B 的元素构成，例如

$$A=\{a,b,c\},\quad B=\{a\},\quad C=\{b,d\}$$

则有

$$A\cup B=\{a,b,c\},\quad A\cap B=\{a\},\quad A-B=\{b,c\},\quad B-A=\varnothing,\quad B\cap C=\varnothing$$

如果两个集合交集为$\varnothing$，则称这两个集合是不交的，例如 B 和 C 是**不交的**。

两个集合的并和交运算可以推广到 n 个集合的并和交。

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x \mid x\in A_1 \vee x\in A_2 \vee\cdots\vee x\in A_n\}$$
$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x \mid x\in A_1 \wedge x\in A_2 \wedge\cdots\wedge x\in A_n\}$$

上述的并和交可以简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

并和交运算还可以推广到无穷多个集合的情况。

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

定义 3.8 设 A,B 为集合，A 与 B 的对称差集 $A \oplus B$ 定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

例如 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,d\}$，则 $A \oplus B=\{a,c,d\}$。

定理 3.3 证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$。

证明：对任意 x，

$x\in(A\cup B)-(A\cap B)$

$\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\notin A\cap B$

$\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge\neg(x\in A\cap B)$

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\vee(x\in B\wedge x\notin B)$

$\Leftrightarrow \varnothing\vee(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\vee\varnothing$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

$\Leftrightarrow x\in A-B\vee x\in B-A$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(B-A)$

因此，$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$。

定义 3.9 设 E 为全集，A 为集合，$A\subseteq E$，则 A 的**绝对补集**$\sim A$ 定义为

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$$

因为 E 是全集，$x\in E$ 是永真命题，所以$\sim A$ 可以定义为

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

例如 $E=\{a,b,c,d\}$，$A=\{a,b,c\}$，则$\sim A=\{d\}$。

以上所定义的集合之间的基本运算的文氏图表示可以参考图 3.2。

根据以上对集合基本运算的定义，可以得到集合论中的关于集合运算的基本定律。

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 & A\cap A=A \\ S_2 & A\cup A=A \end{array}\right\}\text{等幂律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_3 & A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ S_4 & (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \\ S_5 & (A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C) \end{array}\right\}\text{结合律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_6 & A\cup B=B\cup A \\ S_7 & A\cap B=B\cap A \\ S_8 & A\oplus B=B\oplus A \end{array}\right\}\text{交换律}$$

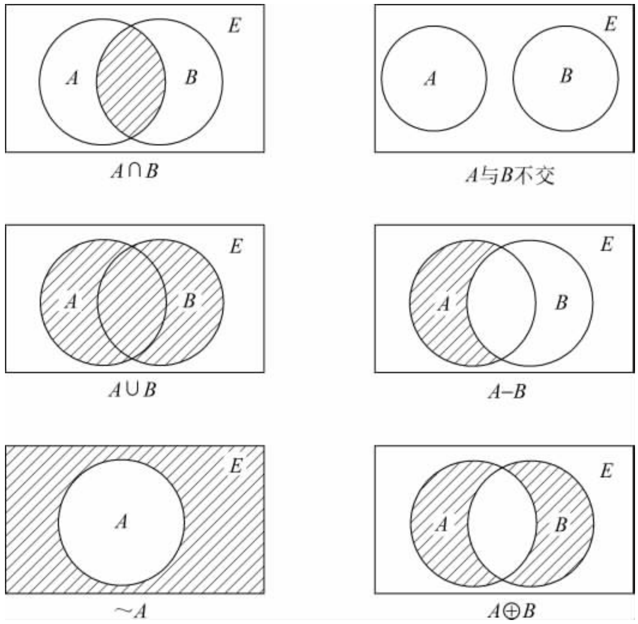

图 3.2　应用文氏图表示集合之间的基本运算

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{S}_9 & A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\ \mathrm{S}_{10} & A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{array}\right\}\text{分配律}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{S}_{11} & A\cap E=A\\ \mathrm{S}_{12} & A\cup\varnothing=A\\ \mathrm{S}_{13} & A-\varnothing=A\\ \mathrm{S}_{14} & A\oplus\varnothing=A\end{array}\right\}\text{同一律}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{S}_{15} & A\cap\varnothing=\varnothing\\ \mathrm{S}_{16} & A\cup E=E\end{array}\right\}\text{零律}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{S}_{17} & A\cap\sim A=\varnothing\\ \mathrm{S}_{18} & A\cup\sim A=E\end{array}\right\}\text{补余律}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{S}_{19} & A\cup(A\cap B)=A\\ \mathrm{S}_{20} & A\cap(A\cup B)=A\end{array}\right\}\text{吸收律}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{S}_{21} & A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\\ \mathrm{S}_{22} & A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\\ \mathrm{S}_{23} & \sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B\\ \mathrm{S}_{24} & \sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B\\ \mathrm{S}_{25} & \sim\varnothing=E\\ \mathrm{S}_{26} & \sim E=\varnothing\end{array}\right\}\text{德·摩根律}$$

S_{27}　$\sim\sim A=A$ 双重否定律

除了上述定律，还有一些关于集合运算性质的重要结论。

S_{28}　$A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$

S_{29} $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$

S_{30} $A - B \subseteq A$

S_{31} $A - B = A \cap \sim B$

S_{32} $A - B = A - A \cap B$

S_{33} $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

S_{34} $A \cup (B - C) \supseteq (A \cup B) - (A \cup C)$

S_{35} $A \oplus B \subseteq A \cup B$

S_{36} $A \oplus A = \varnothing$

S_{37} $A \cap (B - A) = \varnothing$

S_{38} $A \cup (B - A) = A \cup B$

下面选证其中的一部分，在这些证明中大量用到命题逻辑的等值式，在叙述中采用半形式化的方法。在集合之间关系的证明中，主要涉及两种类型的证明，一种是证明一个集合为另一集合的子集，另一种是证明两个集合相等。

证明一个集合为另一个集合的子集的基本思想是：设 P, Q 为集合公式，欲证 $P \subseteq Q$，即证对于任意的 x 有 $x \in P \Rightarrow x \in Q$ 成立。

例 3.1 证明 S_{34}，即 $A \cup (B - C) \supseteq (A \cup B) - (A \cup C)$。

证明：对于任意 x，

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) - (A \cup C) \\
\Leftrightarrow & x \in A \cup B \wedge x \notin A \cup C \\
\Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg (x \in A \vee x \in C) \\
\Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \wedge x \notin C) \\
\Leftrightarrow & x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin C \\
\Rightarrow & x \in B \wedge x \notin C \\
\Rightarrow & x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\
\Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B - C) \\
\Leftrightarrow & x \in A \cup (B - C)
\end{aligned}
$$

因此，$A \cup (B - C) \supseteq (A \cup B) - (A \cup C)$。

证明两个集合相等的基本思想是：设 P, Q 为集合，欲证 $P = Q$，即证 $P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P$ 为真，也就是证明对于任意 x 有 $x \in P \Rightarrow x \in Q$ 和 $x \in Q \Rightarrow x \in P$ 成立。对于某些恒等式可以将这两个方向的推理合到一起，就是 $x \in P \Leftrightarrow x \in Q$。

例 3.2 证明 S_{33}，即 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$。

证明：对于任意 x，

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) - (A \cap C) \\
\Leftrightarrow & x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C \\
\Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg (x \in A \wedge x \in C) \\
\Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C) \\
\Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
\Leftrightarrow & \varnothing \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
\Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B - C$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cap (B - C)$$

因此，$A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$。

由此可以看出，集合运算的规律和命题演算的某些规律是一致的，所以命题演算的方法是证明集合等式的基本方法。除此之外，证明集合等式还可以应用已知等式带入的方法。

例 3.3 证明 S_{33}，即 $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$。

证明： $A \cap (B-C) = A \cap B \cap \sim C$

又

$$\begin{aligned}
&(A \cap B) - (A \cap C) \\
&= (A \cap B) \cap \sim (A \cap C) \\
&= (A \cap B) \cap (\sim A \cup \sim C) \\
&= (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C) \\
&= A \cap B \cap \sim C
\end{aligned}$$

因此，$A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$。

例 3.4 证明 S_5，即 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$。

证明：

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= ((A \oplus B) \cap \sim C) \cup (\sim (A \oplus B) \cap C) \\
&= (((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap \sim C) \cup (\sim ((A \cap \sim B) \cup \\
&\quad (\sim A \cap B)) \cap C) \\
&= ((A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C)) \cup ((\sim A \cup B) \cap \\
&\quad (A \cup \sim B) \cap C) \\
&= ((A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C)) \cup (((\sim A \cup B) \cap A) \cup \\
&\quad ((\sim A \cup B) \cap \sim B) \cap C) \\
&= ((A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C)) \cup (((\sim A \cap A) \cup \\
&\quad (A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim B)) \cap C) \\
&= ((A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C)) \cup ((\varnothing \cup (A \cap B) \cup \\
&\quad (\sim A \cap \sim B) \cup \varnothing) \cap C) \\
&= (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup \\
&\quad (\sim A \cap \sim B \cap C)
\end{aligned}$$

同时又有

$$\begin{aligned}
&A \oplus (B \oplus C) \\
&= (A \cap \sim (B \oplus C)) \cup (\sim A \cap (B \oplus C)) \\
&= (A \cap \sim ((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C))) \cup (\sim A \cap ((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C))) \\
&= (A \cap (\sim B \cup C) \cap (B \cup \sim C)) \cup ((\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)) \\
&= (A \cap \sim B \cap B) \cup (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C \cap \sim C) \cup \\
&\quad (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C) \\
&= \varnothing \cup (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup \varnothing \cup \\
&\quad (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C) \\
&= (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)
\end{aligned}$$

因此，$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

除了上述的基本定律和重要结论之外，还可以利用某些集合之间的已知关系，推导出这些集合之间的另外一些关系。

例 3.5 证明 $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$。

证明：已知 $A\oplus B=A\oplus C$，所以有

$$\begin{aligned}&A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)\\ \Rightarrow&(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C\\ \Rightarrow&\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C\\ \Rightarrow&B=C\end{aligned}$$

例 3.6 证明 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$。

证明：① 证 $A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$。

对于任意 x，

$$x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in B(\text{因为 }A\cup B=B)$$

因此，$A\subseteq B$。

② 证 $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$。

显然有 $A\cap B\subseteq A$，再证 $A\subseteq A\cap B$。

对于任意 x，

$$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in B(\text{因为 }A\subseteq B)\Rightarrow x\in A\cap B$$

因此，$A\subseteq A\cap B$，所以有 $A\cap B=A$。

③ 证 $A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$。

$$\begin{aligned}&A-B\\ =&A\cap\sim B\\ =&(A\cap B)\cap\sim B(\text{因为 }A\cap B=A)\\ =&A\cap\varnothing\\ =&\varnothing\end{aligned}$$

④ 证 $A-B=\varnothing\Rightarrow A\cup B=B$。

$$A\cup B=B\cup(A-B)=B\cup\varnothing=B$$

本例给出了 $A\subseteq B$ 的另外 3 种等价的定义，这不仅为证明两个集合之间的包含关系提供了新方法，同时也可以用于集合公式的化简。

例 3.7 化简 $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$。

解：因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$，$A\subseteq A\cup(B-C)$，由此可得

$$\begin{aligned}&((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)\\ =&(A\cup B)-A\\ =&B-A\end{aligned}$$

3.3 有穷集的计数和包含排斥原理

使用文氏图可以很方便地解决有穷集的计数问题。首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。一般来说，每一条性质决定一个集合，有多少条性质，就有多少个集合。如果没有

特殊的说明，任何两个集合都画成相交的，然后将已知的元素个数填入该集合的区域内。通常从 n 个集合的交集填起，根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。如果交集的数字是未知的，可以将其设为 x，之后再根据题目中的条件，列出一次方程或方程组，就可以求得所需要的结果。

例 3.8 求 1～1000 之间(包含 1 和 1000 在内)不能被 5 整除的数、不能被 6 整除的数以及不能被 8 整除的数共有多少个？

解：设

$$S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\leqslant x\leqslant 1000\}$$
$$A=\{x \mid x\in S \wedge x \text{ 可被 5 整除}\}$$
$$B=\{x \mid x\in S \wedge x \text{ 可被 6 整除}\}$$
$$C=\{x \mid x\in S \wedge x \text{ 可被 8 整除}\}$$

用 $|P|$ 表示有穷集 P 中的元素个数，$\lfloor x\rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数，$lcm(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的最小公倍数，则有

$$|A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$$
$$|B|=\lfloor 1000/6\rfloor=166$$
$$|C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125$$
$$|A\cap B|=\lfloor 1000/lcm(5,6)\rfloor=33$$
$$|A\cap C|=\lfloor 1000/lcm(5,8)\rfloor=25$$
$$|B\cap C|=\lfloor 1000/lcm(6,8)\rfloor=41$$
$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/lcm(5,6,8)\rfloor=8$$

将这些数字填入文氏图，得到图 3.3。由图 3.3 可知，不能被 5，6 和 8 整除的数有

$$1000-(200+100+33+67)=600 \text{ 个}$$

例 3.9 对 24 名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查，统计结果如下：会英、日、德和法语的人分别为 13，5，10 和 9 人，其中同时会英语和日语的有 2 人，会英、德和法语中任两种语言的都是 4 人。已知会日语的人既不懂法语也不懂德语，分别求只会 1 种语言(英、德、法、日)的人数和会 3 种语言的人数。

解：令 A,B,C,D 分别表示会英、德、法、日语的人的集合。根据题意画出文氏图如图 3.4 所示。设同时会 3 种语言的有 x 人，只会英、法或德语 1 种语言的分别为 y_1,y_2 和 y_3 人。将 x 和 y_1,y_2,y_3 填入图 3.4 中相应的区域，然后依次填入其他区域的人数。根据已知条件列出方程组如下：

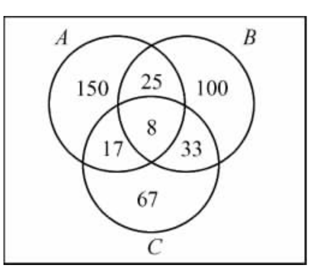

图 3.3

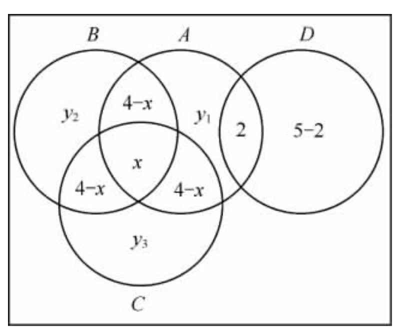

图 3.4

$$\begin{cases} y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13 \\ y_2 + 2(4-x) + x = 9 \\ y_3 + 2(4-x) + x = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 3(4-x) + x = 19 \end{cases}$$

解得 $x=1, y_1=4, y_2=2, y_3=3$。

定理 3.4（包含排斥原理） 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 n 个性质。S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i，或者不具有性质 P_i，两种情况必居其一。令 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的元素数为

$$|\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$$
$$- \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

证明：设 S 为全集，由德・摩根定律可得

$$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n = \sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

因此

$$\begin{aligned} |\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n| &= |\sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| \\ &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \end{aligned}$$

由此，原定理可变为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

应用数学归纳法对上式进行证明。

当 $n=2$ 时，证明 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$。

若 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，有 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$，则 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 成立。

若 $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$，有 $|A_1| = |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap \sim A_2|$ 成立。

于是 $|A_1 \cap \sim A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$，则

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2| \\ &= |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2) \cup A_2| \\ &= |((A_1 \cap A_2) \cup A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\ &= |A_2 \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\ &= |A_2| + |A_1 \cap \sim A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \end{aligned}$$

因此，当 $n=2$ 时，$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 成立。

假设

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

成立,则

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}| \\
=&|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\
=&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
=&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \\
&(A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&+ |A_{n+1}| - \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \right. \\
&\left. + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}| \right) \\
=&\sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

因此,定理得证。

根据包含排斥原理,例 3.8 中所求的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\sim A \cap \sim B \cap \sim C| \\
=&|S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \\
=&1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600
\end{aligned}
$$

例 3.10 求欧拉函数的值。欧拉函数 $\phi(n)$表示$\{0,1,\cdots,n-1\}$中与 n 互素的数的个数。例如 $\phi(12)=4$,因为与 12 互素的数有 1,5,7,11。下面利用包含排斥原理给出欧拉函数的计算公式。

解:给定正整数 n,$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ 为 n 的素因子分解式,令

$$A_i = \{x \mid 0 \leqslant x < n-1 \wedge p_i \text{ 整除 } x\}$$

那么

$$\phi(n) = |\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_k|$$

下面计算等式右边的各项,

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1,2,\cdots,k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$$

$$\cdots$$

根据包含排斥原理

$$
\begin{aligned}
\phi(n) &= |\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_k| \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_2 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}
\end{aligned}
$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

例如，$\phi(12)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=12\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=4$。

习题

1．写出下列集合的表示式。

(1) 所有一元一次方程的解组成的集合。

(2) x^6-1 在实数域中的因式集。

(3) 直角坐标系中，单位圆内(不包括单位圆)的点集。

(4) 极坐标系中单位圆外(不包括单位圆)的点集。

(5) 能被 5 整除的整数集。

2．设有某电视台拟制定一项时长半小时的节目，其中包含戏剧、音乐与广告。每项节目都定位为 5 分钟的倍数且不为 0，试求

(1) 各种时间分配情况的集合；

(2) 戏剧分配的时间较音乐多的集合；

(3) 广告分配的时间与音乐或戏剧所分配的时间相等的集合；

(4) 音乐所分配的时间恰为 5 分钟的集合。

3．给出集合 A、B 和 C 的例子，使得 $A\in B$，$B\in C$ 而 $A\notin C$。

4．确定下列命题是否为真。

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing\in\varnothing$

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b\}\}$

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b\}\}$

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

5．$A\subseteq B$，$A\in B$ 是可能的吗？请予以证明。

6．确定下列集合的幂集。

(1) $\{a,\{a\}\}$

(2) $\{\{1,\{2,3\}\}\}$

(3) $\{\varnothing,a,\{b\}\}$

(4) $P(\varnothing)$

(5) $P(P(\varnothing))$

7．设 $A=\{\varnothing\}$，$B=P(P(A))$，

(1) 是否 $\varnothing\in B$？是否 $\varnothing\subseteq B$？

(2) 是否 $\{\varnothing\}\in B$？是否 $\{\varnothing\}\subseteq B$？

(3) 是否$\{\{\varnothing\}\}\in B$？是否$\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$？

8. 设某集合有 101 个元素，试问

(1) 这些元素可构成多少个子集？

(2) 其中有多少个子集的元素个数为奇数？

(3) 是否会有包含 102 个元素的子集？

9. 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$，B_i 是 S 的子集，由 B_{17} 和 B_{31} 所表达的子集是什么？应该如何确定子集$\{a_2,a_6,a_7\}$和$\{a_1,a_8\}$。

10. 设 $A=\{x|x<5\wedge x\in N\}$，$B=\{x|x<7\wedge x$ 是正偶数$\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$。

11. 设 $A=\{x|x$ 是 book 中的字母$\}$，$B=\{x|x$ 是 black 中的字母$\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$。

12. 给定自然数集合的下列子集：

$A=\{1,2,7,8\}$，$B=\{i|i^2<50\}$

$C=\{i|i$ 被 3 整除 $\wedge 0\leqslant i\leqslant 30\}$

$D=\{i|2^k\wedge k\in I^+\wedge 0\leqslant k\leqslant 6\}$（$I^+$ 为正整数集）

求下列集合：

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))$

(2) $A\cap(B\cap(C\cap D))$

(3) $B-(A\cup C)$

(4) $(\sim A\cap B)\cup D$

13. 证明对所有集合 A,B,C 有$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，当且仅当 $C\subseteq A$。

14. 证明对所有集合 A,B,C，有

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$；

(2) $(A-B)-C=(A-C)-B$；

(3) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$。

15. 确定以下各式的运算结果：

$\varnothing\cap\{\varnothing\}$；$\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$；$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing$；$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}$。

16. 假设 A 和 B 是 E 的子集，证明以下各式中每个关系式彼此等价。

(1) $A\subseteq B$，$\sim B\subseteq\sim A$，$A\cup B=B$，$A\cap B=A$

(2) $A\cap B=\varnothing$，$A\subseteq\sim B$，$B\subseteq\sim A$

(3) $A\cup B=E$，$\sim A\subseteq B$，$\sim B\subseteq A$

(4) $A=B$，$A\oplus B=\varnothing$

17. 化简下述集合公式。

(1) $(A\cap B)\cup(A-B)$

(2) $(A\cup(B-A))-B$

(3) $((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)$

(4) $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

18. 设 A,B,C 是任意集合，分别求使得下述等式成立的充分必要条件。

(1) $A\cup B=A$

(2) $A-B=A$

(3) $A-B=B$

(4) $A-B=B-A$

(5) $A\oplus B=A$

(6) $A\oplus B=\varnothing$

(7) $(A-B)\cap(A-C)=A$

(8) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$

(9) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$

(10) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

19. 借助于文氏图,考察以下命题的正确性。

(1) 若 A,B 和 C 是 E 的子集,使得 $A\cap B\subseteq\sim C$ 和 $A\cup C\subseteq B$,则 $A\cap C=\varnothing$。

(2) 若 A,B 和 C 是 E 的子集,使得 $A\subseteq\sim(B\cup C)$ 和 $B\subseteq\sim(A\cup C)$,则 $B=\varnothing$。

20. 设 A,B,C 为任意集合,试判断下面命题的真假。如果为真,给出证明,否则给出反例。

(1) $A\subset B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subset C$

(2) $A\neq B\wedge B\neq C\Rightarrow A\neq C$

(3) $(A-B)\cup(B-C)=A-C$

(4) $(A-B)\cup B=A$

(5) $(A\cup B)-A=B$

(6) $(A\cap B)-A=\varnothing$

(7) $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

(8) $C\subseteq A\wedge C\subseteq B\Rightarrow C\subseteq A\cap B$

(9) $A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

(10) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

(11) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

21. 设在 10 名青年中有 5 名是工人,7 名是学生,其中兼具有工人与学生双重身份的青年有 3 名,求既不是工人又不是学生的青年有几名。

22. 求 1～250 之间能被 2,3,5 和 7 中任何一个整除的整数个数。

23. 某足球队有球员 38 人,篮球队有球员 15 人,棒球队有球员 20 人,三队队员总数 58 人,且其中只有 3 人同时参加三个队,试求仅同时参加两个队的队员共有几人。

24. 据调查,学生阅读杂志的情况如下:60%读甲种杂志,50%读乙种杂志,50%读丙种杂志,30%读甲种与乙种杂志,30%读乙种与丙种杂志,30%读甲种与丙种杂志,10%读三类杂志,求:

(1) 仅读两类杂志的学生的百分比;

(2) 不读任何杂志的学生的百分比。