第 3 章　容斥原理与鸽巢原理

3.1　De Morgan 定理

容斥原理是计数中常用的一种方法. 先举一例说明如下.

［**例 3-1**］　求不超过 20 的正整数中为 2 或 3 的倍数的数.

不超过 20 的数中 2 的倍数有 10 个：

$$2,4,6,8,10,12,14,16,18,20$$

不超过 20 的数中 3 的倍数有 6 个：

$$3,6,9,12,15,18$$

但其中为 2 或 3 的倍数的数只有 13 个，而不是 $10+6=16$ 个. 即

$$2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20$$

其中 6,12,18 同时为 2 和 3 的倍数. 若计算 $10+6=16$，则重复计算了一次 6,12,18.

在讨论容斥原理的过程中，要用到以下集合论的基本性质.

德摩根（De Morgan）定理　若 A 和 B 是集合 U 的子集，则

（1）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

（2）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

证明　（1）的证明：

设 $x\in\overline{A\cup B}$，则 $x\notin A\cup B$.

$x\notin A\cup B$ 等价于 $x\notin A$ 和 $x\notin B$ 同时成立. 所以有，

$$x\notin \overline{A\cup B}\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}\tag{3-1}$$

反之，$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，即 $x\in\overline{A}$ 同时 $x\in\overline{B}$，也就是 $x\notin A$，同时 $x\notin B$，即 $x\notin A\cup B$. 所以有 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$ 的必要条件是 $x\in\overline{A\cup B}$.

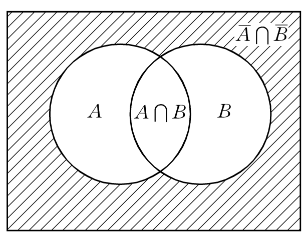


图　3-1

故　$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$ 的充要条件是 $x\in\overline{A\cup B}$.

这个结论可以从图 3-1 直观地看出来影线部分即 $\overline{A\cup B}$，也是 $\overline{A}\cap\overline{B}$.

所以　$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

（2）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

直观上也可以从图 3-1 看出，证明与(1)类似. 其实 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 也是集合，$\overline{\overline{A}}=A$ 从(1) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}=A\cup B$

故　$$\overline{A\cup B}=\overline{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

上述的 De Morgan 定理还可以推广到一般.

（1）$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n$.

(2) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$.

证明采用了数学归纳法.

(1) $n=2$ 时定理成立. 假定 n 时成立. 即假定

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$

成立. 有

$$\begin{aligned}\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}} &= \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}} \\ &= \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} \cap \overline{A_{n+1}} \\ &= (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n) \cap \overline{A}_{n+1} \\ &= \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n+1}\end{aligned}$$

故定理对 $n+1$ 时为真.

(2) 证明从略.

3.2 容斥定理

假定 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数,根据加法法则若 $A\cap B=\varnothing$,则 $|A\cup B|=|A|+|B|$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$ 时,这时将 $|A\cap B|$ 多计算一次. 所以从图 3-2 可见直观有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

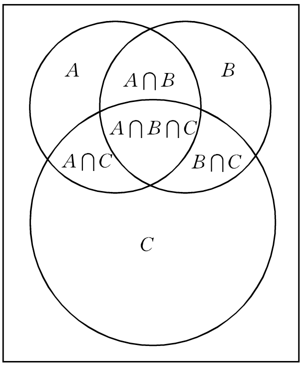


图 3-2

定理 3-1

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| \\ - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|\end{aligned}$$

但

$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$\begin{aligned}|(A\cap C)\cup(B\cap C)| &= |A\cap C| + |B\cap C| \\ &\quad - |(A\cap B)\cap(B\cap C)|\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &\quad - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| + |C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| \\ &\quad - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

这个公式可从图 3-2 直观看出它的意思,求 $|A\cup B\cup C|$ 由于 $|A|+|B|+|C|$ 有重复的部分,故减去 $|A\cap B|$,$|A\cap C|$,$|B\cap C|$,又减得太多,加上 $|A\cap B\cap C|$ 这块减了太多的部分.

［**例 3-2**］ 一个学校只开 3 门课：数学、物理、化学，已知修这 3 门课的学生人数依次为 170，130，120. 兼修数学和物理两门课的学生为 45 人；兼修数学与化学的有 20 人；同时修物理与化学的 22 人；又同时修 3 门课的学生有 3 人. 试计算在校的学生有几人.

令 M 为修数学的学生集合，F 为修物理的学生集合，C 为修化学的学生集合，已知：

$|M|=170,\quad |F|=130,\quad |C|=120,\quad |M\cap F|=45,$

$|M\cap C|=20,\quad |F\cap C|=22,\quad |M\cap F\cap C|=3.$

在校学生数为

$$\begin{aligned}|M\cup F\cup C| &= |M|+|F|+|C|-|M\cap F| \\ &\quad -|M\cap C|-|F\cap C|+|M\cap F\cap C| \\ &= 170+130+120-45-20-22+3=336\end{aligned}$$

［**例 3-3**］ $S=\{1,2,3,\cdots,600\}$，求其中被 2，3，5 除尽的数的数目.

令 A,B,C 分别表示 S 中被 2，3，5 除数的数.

$$|A|=\left\lfloor\frac{600}{2}\right\rfloor=300,\quad |B|=\left\lfloor\frac{600}{3}\right\rfloor=200,$$

$$|C|=\left\lfloor\frac{600}{5}\right\rfloor=120,\quad |A\cap B|=\left\lfloor\frac{600}{2\times 3}\right\rfloor=100,$$

$$|A\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{10}\right\rfloor=60,\quad |B\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{15}\right\rfloor=40$$

$$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{30}\right\rfloor=20$$

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C| \\ &\quad -(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C| \\ &= 300+200+120-(100+60+40)+20=440\end{aligned}$$

同理可推出

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D| &= |A|+|B|+|C|+|D| \\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D| \\ &\quad +|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D| \\ &\quad -|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

一般有

定理 3-2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个有限集合，则

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| &= (|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|) \\ &\quad -(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+\cdots \\ &\quad +|A_1\cap A_n|+|A_2\cap A_3|+\cdots \\ &\quad +|A_{n-1}\cap A_n|) \\ &\quad +(|A_1\cap A_2\cap A_3|+\cdots \\ &\quad +|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|) \\ &\quad +(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

证明 用数学归纳法证明.

$n=2$ 时

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|,$$

定理正确.

假定 $n-1$ 时正确,即

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|+\cdots$$
$$+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}|$$

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n|&=|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cup A_n|\\&=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|+|A_n|\\&\quad-|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n|\\&=|A_n|+\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}|\\&\quad-|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n|\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n&=(A_1\cap A_n)\cup(A_2\cap A_n)\\&\quad\cup\cdots\cup(A_{n-1}\cap A_n)\end{aligned}$$

根据假定 $n-1$ 时正确,故

$$\begin{aligned}&|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n|\\&=|(A_1\cap A_n)\cup(A_2\cap A_n)\cup\cdots\cup(A_{n-1}\cap A_n)|\\&=|A_1\cap A_n|+|A_2\cap A_n|+\cdots+|A_{n-1}\cap A_n|\\&\quad-|A_1\cap A_2\cap A_n|-|A_1\cap A_3\cap A_n|-\cdots\\&\quad-|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}\cap A_n|\\&=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n|-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j\cap A_n|+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|&=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}\tag{3-2}$$

由于

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = |\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)}|$$

假定在集合 S 上讨论 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，$|S| = N$，

故

$$\begin{aligned} |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| &= N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= N - \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \tag{3-3}$$

3.3 容斥原理举例

所谓容斥原理指的就是(3-2)和(3-3)两个公式．一个是求 $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$，一个是求 $\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right|$．但它和实际相联系时将是十分丰富多彩.

[例 3-4] 求由 a, b, c, d, e, f 这 6 个字符构成的全排列中不允许出现 ace 和 df 图像的排列数.

S 是由这 6 个字符组成的全排列，$|S| = 6!$．问题是利用式(3-3)的模式，A_1 是出现 ace 图像的排列，即 ace 作为一个单元参加全排列，$|A_1| = 4!$，A_2 是 df 作为一个单元参加的排列 $|A_2| = 5!$．不允许 ace 与 df 图像的排列即为 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$，根据式(3-3)

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = 6! - (5! + 4!) + 3! = 720 - (120 + 24) + 6 = 582$$

[例 3-5] 求由 a, b, c, d 这 4 个字符构成 n 位符号串，其中 a, b, c 至少出现一次的数目.

a, b, c 至少出现一次的事件的反面就是 a, b, c 都不出现．令 A_1, A_2, A_3 分别为 n 位符号串中不出现 a, b, c 的事件．S 是 a, b, c, d 组成的 n 位符号串的全体.

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 3^n$$

$$|S| = 4^n \qquad |A_i \cap A_j| = 2^n, \quad i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1$$

[例 3-6] 求不超过 120 的素数个数.

$11^2 = 121$，不超过 120 的合数必然是 2,3,5,7 的倍数，而且不超过 120 的合数的因数只能是 2,3,5,7，也就是被 2,3,5 或 7 除尽．因为它们是小于 11 的素数，令 A_1 为不超过 120，被 2 除尽的数，A_2 为不超过 120 被 3 除尽的数，A_3, A_4 分别是不超过 120 被 5,7 除尽的数，$S = \{1, 2, 3, \cdots, 120\}$，$|S| = 120$，所求的小于 120 的素数，先求 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$．根据容斥原理

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4| = 120 &-(|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|)\\
&+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|)\\
&+(|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|\\
&+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|)\\
&-(|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|\\
&+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4|)\\
&+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|
\end{aligned}
$$

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60,\quad |A_2| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24,\quad |A_4| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17$$

$$|A_1\cap A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3} \right\rfloor = 20,\quad |A_1\cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 5} \right\rfloor = 12$$

$$|A_1\cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 7} \right\rfloor = 8,\quad |A_2\cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 5} \right\rfloor = 8$$

$$|A_2\cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 7} \right\rfloor = 5,\quad |A_3\cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{5\times 7} \right\rfloor = 3$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 4$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{42} \right\rfloor = 2$$

$$|A_1\cap A_3\cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 5\times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{70} \right\rfloor = 1$$

$$|A_2\cap A_3\cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 5\times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{105} \right\rfloor = 1$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{120}{210} \right\rfloor = 0$$

所以

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4| &= 120-(60+40+24+17)+(20+12+8+8+5+3)\\
&\quad -(4+2+1+1) = 27
\end{aligned}
$$

考虑到 2,3,5,7 本身是素数,1 不是素数,故不超过 120 的素数应该为 $27-1+4=30$.

[**例 3-7**] 用 26 个英文字母作不允许重复的全排列,要求排除 dog,god,gum,depth,thing 字样出现,求满足这些条件的排列数.

令

A_1 为出现 dog 的排列,

A_2 为出现 god 的排列,

A_3 为出现 gum 的排列,

A_4 为出现 depth 的排列,

A_5 为出现 thing 的排列.

出现 dog 字样的排列相当于将 dog 作为一个单元参加排列,故 $|A_1|=24!$,类似地,出现 gum 和 god 的 $|A_2|=|A_3|=24!$.

类似有

$$|A_4|=|A_5|=22!$$

由于 god 和 dog 不同时在一个排列出现，故 $|A_1\cap A_2|=0$，类似有 $|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_4|=0$.

而 dog 和 gum 可以以 dogum 出现，故 $|A_1\cap A_3|=22!$

类似地 god，depth，thing 可以 godepth，thingod 形式出现.

所以

$$|A_2\cap A_4|=|A_2\cap A_5|=20!$$

又

$$|A_1\cap A_5|=0,\quad |A_3\cap A_4|=20!$$

$$|A_3\cap A_5|=20!,\quad |A_4\cap A_5|=19!$$

$$\begin{aligned}|A_1\cap A_2\cap A_3|&=|A_1\cap A_2\cap A_4|\\&=|A_1\cap A_2\cap A_5|=|A_1\cap A_3\cap A_4|\\&=|A_1\cap A_3\cap A_5|=|A_1\cap A_4\cap A_5|\\&=|A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_2\cap A_3\cap A_5|=0\end{aligned}$$

由于 god，depth，thing 不可能同时出现，故

$$|A_2\cap A_4\cap A_5|=0$$

但 gum，depth 和 thing 可以在 depthingum 中同时出现，故

$$|A_3\cap A_4\cap A_5|=17!$$

故所求的数为

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4\cap\overline{A}_5|&=26!-(3\times 24!+22!)+(22!\\&\quad+4\times 20!+1\times 19!)-17!\\&=26!-3\times 24!+3\times 20!+1\times 19!-17!\end{aligned}$$

［**例 3-8**］ 求完全由 n 个布尔变量构成的布尔函数的个数.

讨论 n 个布尔变量的布尔函数之前，先从 $n=2$ 入手，两个布尔自变量 x_1,x_2 取值从 00，01，10，到 11 共 $2^2=4$ 种状态，对这 4 种状态对应的布尔函数值可能有 $2^4=16$ 种，见表 3-1.

表 3-1

f_i \ $x_1\ x_2$	0 0	0 1	1 0	1 1	$f_i(x_1,x_2)$
f_1	0	0	0	0	0
f_2	0	0	0	1	$x_1\wedge x_2$
f_3	0	0	1	0	$x_1\wedge\overline{x_2}$
f_4	0	0	1	1	x_3
f_5	0	1	0	0	$\overline{x_1}\wedge x_2$
f_6	0	1	0	1	x_2

f_i \ $x_1\ x_2$	0 0	0 1	1 0	1 1	$f_i(x_1, x_2)$
f_7	0	1	1	0	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$
f_8	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$
f_9	1	0	0	0	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
f_{10}	1	0	0	1	$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$
f_{11}	1	0	1	0	$\bar{x}_2$
f_{12}	1	0	1	1	$x_1 \vee \bar{x}_2$
f_{13}	1	1	0	0	$\bar{x}_1$
f_{14}	1	1	0	1	$\bar{x}_1 \vee x_2$
f_{15}	1	1	1	0	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
f_{16}	1	1	1	1	1

以 f_7 和 f_{10} 为例演算如下：其中 $f_7=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$，$f_{10}=(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$x_1 \vee x_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	f_7	f_{10}
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1

其中 $\vee$ 和 $\wedge$ 运算规则为

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

其中，$x_1 \vee x_2 = f_8$，　$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = f_{15}$，　$\bar{x}_1 \vee x_2 = f_{14}$，　$x_1 \vee \bar{x}_2 = f_{12}$.

从表 3-1 中可以得 $f(x_1, x_2)$ 和 $2^2=4$ 位 0，1 符号串相对应，而且包含一元布尔函数和布尔常数，将它看作是二元布尔函数的特殊情形，真正二元的布尔函数有 10 个.

n 元布尔函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的状态从$(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个}})$到$\{\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n\text{个}})$共 2^n 个，2^n 维的 0，1 符号串有 2^{2^n} 个，即 n 元布尔函数的个数为 2^{2^n}，其中 x_i 不出现的一类令之为 A_i，$i=1,2,\cdots,n$. 根据容斥原理，所求的完全由布尔变量确定的布尔函数的数目为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = 2^{2^n} - C(n,1)2^{2^{n-1}} + C(n,2)2^{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^k C(n,k)2^{2^{n-k}} + \cdots + (-1)^n C(n,n)2$$

$n=2$ 得

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2| = 2^{2^2}-C(2,1)2^2+C(2,2)2 = 16-8+2 = 10$$

这 10 个完全二元的布尔函数是：

$x_1\wedge x_2$， $x_1\wedge\overline{x}_2$， $\overline{x}_1\wedge x_2$， $\overline{x}_1\wedge\overline{x}_2$， $x_1\vee x_2$，

$\overline{x}_1\vee\overline{x}_2$， $x_1\vee\overline{x}_2$， $\overline{x}_1\vee x_2$， $(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2)$，

$(x_1\vee\overline{x}_2)\wedge(\overline{x}_1\vee x_2)$

［**例 3-9**］ 欧拉函数 $\varphi(n)$等于比 n 小且与 n 互素的数的个数.

假定将 n 因数分解为 $p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}$ 之积，即

$$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

令 A_i 为 $N=\{1,2,\cdots,n\}$中 p_i 倍数的数的全体，$i=1,2,\cdots,k$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i},\quad i = 1,2,\cdots,k$$

若 $p_i\neq p_j,i,j=1,2,\cdots,k,A_i\cap A_j$ 表示 N 中既是 p_i 倍数，又是 p_j 倍数的数的全体，则

$$|A_i\cap A_j| = \frac{n}{p_ip_j}\quad i,j = 1,2,\cdots,k,\ j>i$$

类似地，有

$$|A_i\cap A_j\cap A_k| = \frac{n}{p_ip_jp_k},\quad i,j,k = 1,2,\cdots,k,\ k>j>i$$

根据定义

$$\varphi(n) = n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_k}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{k-1}p_k}\right)-\cdots$$
$$\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k} = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

［**例 3-10**］ 错排问题.

前面已通过递推关系讨论过错排问题即 $1,2,\cdots,n$ 的全排列中每个元素都不在各自位置上的排列数.

设 A_i 表示数 i 仍在第 i 位的全排列，$i=1,2,\cdots,n$，由于 i 不动，故

$$|A_i| = (n-1)!,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

同理

$$|A_i\cap A_j| = (n-2)!,\quad i,j = 1,2,\cdots,n,\ i\neq j$$
$$\vdots$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n| = 1$$

每个元素都不在各自的位置上的排列数为 D_n：

$$D_n = |\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n| = n!-C(n,1)(n-1)!$$
$$+C(n,2)(n-2)!+\cdots\pm C(n,n)1!$$
$$= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}\right)$$

错排问题通过容斥原理计算较递推关系要简单明了得多了.

［**例 3-11**］ 6 个人参加一会议，入场时将帽子随意挂在衣架上，走时匆匆忙忙顺手戴一顶走了，试问没一人拿对的概率是多少？

$$\text{概率 } p = \frac{D_6}{6!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$$

$$
\begin{aligned}
&=(720-C(6,1)5!+C(6,2)4!\\
&\quad -C(6,3)3!+C(6,4)2!-C(6,5)1!+1)/760\\
&=(720-6\times 120+15\times 24-20\times 6+15\times 2-6+1)/720\\
&=(720-720+360-120+30-6+1)/720=265/720\\
&\approx 0.368
\end{aligned}
$$

可以证明，当 n 比较大时，$\dfrac{D_n}{n!}\approx\dfrac{1}{e}\approx 0.36788$.

3.4　棋盘多项式与有限制条件的排列

1. 有限制排列

［**例 3-12**］　在 4 个 x，3 个 y，2 个 z 的全排列中求不出现 $x\,x\,x\,x$，$y\,y\,y$，$z\,z$ 图像的排列数.

令 A_1 是在 9 个字符的全排列出现 $x\,x\,x\,x$ 图像的一类，A_2 为出现 $y\,y\,y$ 图像的一类；A_3 为出现 $z\,z$ 图像的一类.

4 个 x 同时出现的排列，实际上将 $x\,x\,x\,x$ 作为一个单元参加排列，考虑 y 出现 3 次，z 出现 2 次，故

$$|A_1|=\frac{6!}{3!2!}=60$$

同理

$$|A_2|=\frac{7!}{4!2!}=105,\quad |A_3|=\frac{8!}{4!3!}=280$$

$$|A_1\cap A_2|=\frac{4!}{2!}=12,\quad |A_1\cap A_3|=\frac{5!}{3!}=20$$

$$|A_2\cap A_3|=\frac{6!}{4!}=30,\quad |A_1\cap A_2\cap A_3|=3!=6$$

4 个 x，3 个 y，2 个 z 的全排列中不同的排列数为 $\dfrac{9!}{4!\ 3!\ 2!}=1260$，问题的解为

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|&=\frac{9!}{4!3!2!}-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)\\
&\quad +(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3|\\
&=1260-(60+105+280)+(12+20+30)-6\\
&=1260-445+62-6=871
\end{aligned}
$$

2. 棋盘多项式

n 个元素的一个排列可以看作是 n 个棋子在 $n\times n$ 棋盘上的一种布局. 当一个棋子置于棋盘的某一格子时，则这个棋子所在的行和列都不允许布上任何棋子，如图 3-3 所示，结果棋盘上每一行都有且仅有一个棋子，每列也有且仅有一个棋子. 例如图 3-3 对应一排列 4 1 3 5 2.

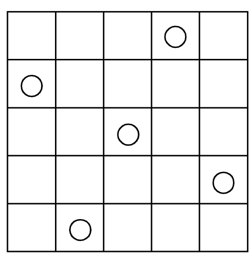


图　3-3

可将棋盘推广到任意情况，比如对于棋盘 C，令 $r_k(C)$ 表示用 k 个棋子布到 C 上的不同方案数.

例如，对于棋盘

$$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$$

一个棋子有两种布局方案，但不存在两个棋子的布局方案，故

$r_1(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array})=1,\quad r_1\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right)=r_1(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array})=2,$

$r_2\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right)=r_2(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array})=0,\quad r_1\left(\begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \hline & \multicolumn{1}{|c|}{\ } \\ \cline{2-2}\end{array}\right)=2,$

$r_2\left(\begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \hline & \multicolumn{1}{|c|}{\ } \\ \cline{2-2}\end{array}\right)=1,$

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n}r_k(C)x^k$$

称之为棋盘 C 的棋盘多项式，假定棋盘 C 可布 n 个棋子，但不能布超过 n 的棋子.

令 $C_{(i)}$ 为棋盘 C 中某一格子所在的行和列被排除掉以后的剩余部分，$C_{(e)}$ 为从 C 中去掉该格子后的棋盘，例如

$$C:\quad \begin{array}{ccc}\cline{1-2}\multicolumn{1}{|c|}{*} & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \\ \cline{1-2} & \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \cline{2-3} & \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } \\ \cline{2-3}\end{array}$$

关于有 * 号的格子有

$$C_{(i)}:\ \begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } \\ \hline\end{array}\qquad C_{(e)}:\ \begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } \\ \hline\end{array}$$

对于棋盘 C 上某一格子无非两种可能：一种是该格子被布上棋子；另一种可能是该点被排除布上棋子，故

$$r_k(C)=r_{k-1}(C_{(i)})+r_k(C_{(e)})$$

$r_{k-1}(C_{(i)})$ 是该格子布上一个棋子，剩下的 $k-1$ 个棋子布到 $C_{(i)}$ 棋盘上的方案数；$r_k(C_{(e)})$ 是该格子被排除，全部 k 个棋子全部布到 $C_{(e)}$ 棋盘上的方案数，即无非“容”或“斥”两种可能.

与之相应的有

$$R(C)=xR(C_{(i)})+R(C_{(e)})$$

这两个公式都是计算 $r_k(C)$ 和 $R(C)$ 的可递归应用的公式.

［**例 3-13**］

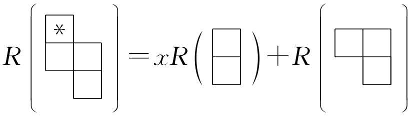
$R(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array})=1+x$

$R(\begin{array}{|c|c|}\hline * & \ \\ \hline\end{array})=xR(\quad)+R(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array})=x+(1+x)=1+2x$

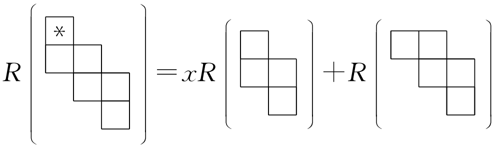
$R\left(\begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{*} & \\ \hline & \multicolumn{1}{|c|}{\ } \\ \cline{2-2}\end{array}\right)=xR(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array})+R(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array})=x(1+x)+1+x=1+2x+x^2$

$R\left(\begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{*} & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } \\ \hline\end{array}\right)=xR(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array})+R\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array}\right)=x(1+x)+1+2x=1+3x+x^2$

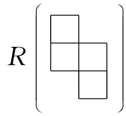
$R\left(\begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{*} & \multicolumn{1}{c|}{\ } \\ \hline\end{array}\right)=xR(\quad)+R\left(\begin{array}{cc}\cline{1-1}\multicolumn{1}{|c|}{\ } & \\ \hline & \multicolumn{1}{|c|}{\ } \\ \cline{2-2}\end{array}\right)=x+(1+2x+x^2)=1+3x+x^2$



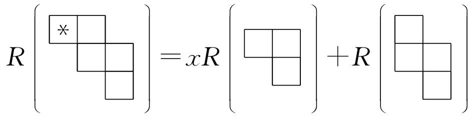
$$=x(1+2x)+(1+3x+x^2)=1+4x+3x^2$$



已知

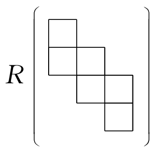


$$=1+4x+3x^2$$

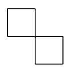


$$=x(1+3x+x^2)+(1+4x+3x^2)=1+5x+6x^2+x^3$$

所以



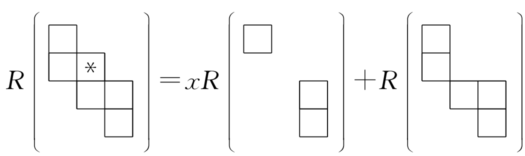
$$=x(1+4x+3x^2)+(1+5x+6x^2+x^3)$$
$$=1+6x+10x^2+4x^3$$

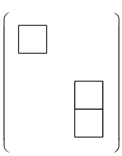
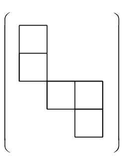
特别应指出若 C 是由互相隔离的两个棋盘 C_1 和 C_2 组合成的（这里所谓互相隔离指的是 C_1 和 C_2 不存在格子同行或同列，例如便是由互相隔离两棋盘□组合成的），则

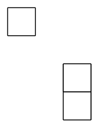
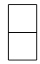
$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$$

$$\begin{aligned}R(C)=\sum_{h=0}^{n} r_h(C)x^h &= \sum_{h=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{h} r_i(C_1)r_{h-i}(C_2)\Big)x^h\\ &=\Big(\sum_{i=0}^{n} r_i(C_1)x^i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=0}^{n} r_j(C_2)x^j\Big)\\ &=R(C_1)R(C_2)\end{aligned}$$

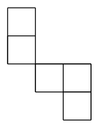
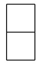
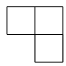
利用这个公式来处理如下形式的棋盘多项式比较简单.



不论 R  和 R  都是可互相隔离的两个棋盘组成的.

$$R\left(\right.$$$$\left.\right)=R($$$$)R\left(\right.$$$$\left.\right)=(1+x)(1+2x)$$

$$=1+3x+2x^2$$

$$R\left(\right.$$$$\left.\right)=R\left(\right.$$$$\left.\right)R\left(\right.$$$$\left.\right)=(1+2x)(1+3x+x^2)$$

$$=1+5x+7x^2+2x^3$$

故
$$R(C)=x(1+3x+2x^2)+(1+5x+7x^2+2x^3)$$
$$=1+6x+10x^2+4x^3$$

3.5 有禁区的排列

以图 3-4 为例，对 1，2，3，4 的排列 $P_1P_2P_3P_4$，P_1 不允许取 3，P_2 不允许取 4，P_3 不允许取 1 和 4，P_4 不允许取 2，即在 1，2，3，4 的全排列，排除以上限制，剩下的排列，影线是禁区的表示.

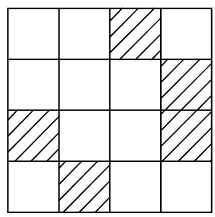


图 3-4

定理 3-3 有禁区的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n$$

其中 r_i 是有 r_i 个棋子布置到禁区的方案数.

证明 令 $P_1P_2\cdots P_n$ 是 n 个棋子布入 $n\times n$ 棋盘的排列，即 P_i 是第 i 个棋子在第 i 行的位置，A_i 是 P_i 落入禁区的事件，一个棋子落入禁区，其余的 $n-1$ 个棋子假定为无条件排列，故至少有一个棋子落入禁区的方案数应为 $r_1(n-1)!$. 两个棋子落入禁区的方案数为 r_2，而其余$(n-2)$个棋子为无条件排列的排列数为 $r_2(n-2)!$，故为至少有两个棋子落入禁区的排列数. $n=3,4,\cdots,n$，依此类推，根据容斥原理布 n 个棋子无一落入禁区的排列数为

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|$$
$$=n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n$$

［**例 3-14**］ 有 P,Q,R,S 4 位工作人员，要完成 A,B,C,D 4 项任务，但 P 不适宜于任务 B，Q 不适宜于 B,C 两项工作，R 不能做 C,D 两项工作，S 不会做任务 D. 若要求每人从事他所能做的一项任务，试问有多少种分配方案？

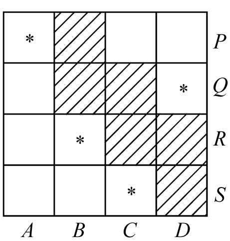


图 3-5

每一种任务分配相当于图 3-5 的有禁区的排列，例如其中 * 号的格子对应于排列 A D B C，即 P 做 A，Q 做 D，R 做 B，S 做 C 的安排.

图 3-5 的禁区（影线部分）的棋盘多项式在前面已导出，即

$$R(C)=1+6x+10x^2+4x^3$$

根据定理所求的有禁区的排列数为

$$N = 4! - 6\times 3! + 10\times 2! - 4$$
$$= 24 - 36 + 20 - 4 = 4$$

［**例 3-15**］ 错排问题.

错排问题前面已两次讨论到，一次是利用递推关系导出错排公式，第二次是通过容斥原理，现在利用有禁区的排列求解，实际上还是容斥原理的另一种表述. $n\times n$ 棋盘的错排的禁区如图 3-6 所示，他的特点是集中在对角线上，彼此互相分离的，其棋盘多项式为

$$R(C) = (1+x)^n$$
$$= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)$$

即

$$r_i = C(n,i),\quad i = 1,2,\cdots,n$$

所错排的方案数

$$N = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots \pm C(n,n)$$

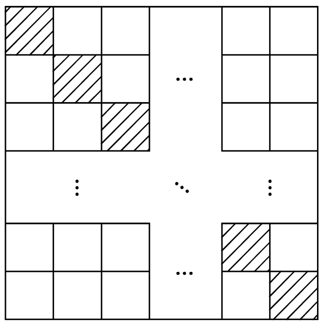


图 3-6

［**例 3-16**］ 设 A,B,C,D 4 位工作人员被安排参加 P,Q,R,S 4 项任务，但他们不适宜的工作如图 3-7 的影线所示.

关键在于求出禁区的棋盘多项式，现将对于有 $*$ 格的 $C_{(i)}$ 和 $C_{(e)}$ 分别列于图 3-8(a) 和(b).

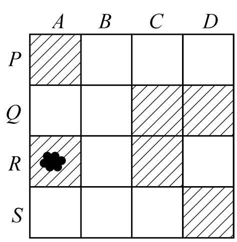
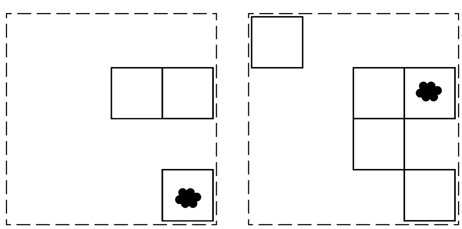


图 3-7



(a) $C_{(i)}$ (b) $C_{(e)}$

图 3-8

$$R(C_{(i)}) = xR(\square) + R(\square\square) = x(1+x) + 1 + 2x = 1 + 3x + x^2$$

$$R(C_{(e)}) = xR\begin{pmatrix}\square & \\ & \square\end{pmatrix} + R\begin{pmatrix}\square & & \\ & \square & \\ & \square & \square\end{pmatrix} = x(1+x)^2 + (1+x)^2(1+2x)$$
$$= x + 2x^2 + x^3 + 1 + 4x + 5x^2 + 2x^3 = 1 + 5x + 7x^2 + 3x^3$$

$$R(C)=x(1+3x+x^2)+(1+5x+7x^2+3x^3)=1+6x+10x^3+4x^3$$

$$\begin{aligned}\text{不同的安排方案}&=4!-6\cdot 3!+10\cdot 2!-4\\&=24-36+20-4=4\end{aligned}$$

这四种安排由读者来给出.

3.6 广义的容斥原理

前面讨论的容斥原理指的是(3-2)与(3-3)两个公式.下面介绍它的变形或推广.

3.6.1 容斥原理的推广

［**例 3-17**］ 3.2 节求出在校学生数目的问题,问只修一门课的学生数,只修两门课的学生数,只修一门数学的学生数,或只修一门物理或化学的学生数等于多少?如何计算.

所谓只修一门数学,即只修数学不修物理和化学,即

$$\begin{aligned}|M\cap\overline{P}\cap\overline{C}|&=|M|-(|M\cap P|+|M\cap C|)+|M\cap P\cap C|\\&=170-(45+20)+3=108\end{aligned}$$

即在集合 M 上讨论 $\overline{P}\cap\overline{C}$,利用容斥原理可得上面结果.

同理只修物理和只修化学分别有

$$\begin{aligned}|P\cap\overline{M}\cap\overline{C}|&=|P|-(|M\cap P|+|P\cap C|)+(M\cap P\cap C)\\&=130-(45+22)+3=66\\|C\cap\overline{M}\cap\overline{P}|&=|C|-(|M\cap C|+|P\cap C|)+|M\cap P\cap C|\\&=120-(22+20)+3=81\end{aligned}$$

只修一门课的学生数为

$$\begin{aligned}|M\cap\overline{P}\cap\overline{C}|+|\overline{M}\cap P\cap\overline{C}|+|\overline{M}\cap\overline{P}\cap C|&=(|M|+|P|+|C|)\\&\quad-2(|M\cap P|+|M\cap C|\\&\quad+|P\cap C|)+3|M\cap P\cap C|\\&=108+66+81=255\end{aligned}$$

同理只修数学和物理两门课的学生数也可计算如下

$$|M\cap P\cap\overline{C}|=|M\cap P|-|M\cap P\cap C|=45-3=42$$

即考虑在 $M\cap P$ 集合中求 $\overline{C}$.

类似地

$$\begin{aligned}|M\cap\overline{P}\cap\overline{C}|&=|M\cap C|-|M\cap P\cap C|=20-3=17\\|\overline{M}\cap P\cap C|&=|P\cap C|-|M\cap P\cap C|=22-3=19\end{aligned}$$

一般还可推得

$|A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}|$考虑在 A 集合上讨论 $\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$,故

$$\begin{aligned}|A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}|&=|A|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|)\\&\quad+(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|\\&\quad+|A\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|\\|\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D}|&=|B|-(|A\cap B|+|B\cap C|+|B\cap D|)\\&\quad+(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|\\&\quad+|B\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

$$|\bar{A}\cap\bar{C}\cap C\cap\bar{D}|=|C|-(|A\cap C|+|B\cap C|+|C\cap D|)$$
$$-(|A\cap B\cap C|+|A\cap C\cap D|$$
$$+|B\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|$$
$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D|=|D|-(|A\cap D|+|B\cap D|+|C\cap D|)$$
$$-(|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|$$
$$+|B\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|$$

同时可得

$$\begin{aligned}&|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}|+|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap\bar{D}|+|A\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}|\\&+|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D|\\=&|A|+|B|+|C|+|D|-2(|A\cap B|+|A\cap C|\\&+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D|)\\&+3(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|\\&+|B\cap C\cap D|)-4|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

还可以推得

$$|A\cap B\cap\bar{C}\cap\bar{D}|=|A\cap B|-(|A\cap B\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap D|)+|A\cap B\cap C\cap D|$$
$$|A\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}|=|A\cap C|-(|A\cap B\cap C|$$
$$+|A\cap C\cap D|)+|A\cap B\cap C\cap D|$$
$$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D|=|A\cap D|-(|A\cap B\cap D|$$
$$+|A\cap C\cap D|)+|A\cap B\cap C\cap D|$$
$$|\bar{A}\cap B\cap C\cap\bar{D}|=|B\cap C|-(|A\cap B\cap C|$$
$$+|B\cap C\cap D|)+|A\cap B\cap C\cap D|$$
$$|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap D|=|B\cap D|-(|A\cap B\cap D|$$
$$+|B\cap C\cap D|)+|A\cap B\cap C\cap D|$$
$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cap D|=|C\cap D|-(|A\cap C\cap D|$$
$$+|B\cap C\cap D|)+|A\cap B\cap C\cap D|$$

故有

$$\begin{aligned}&|A\cap B\cap\bar{C}\cap\bar{D}|+|A\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}|+|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D|\\&+|\bar{A}\cap B\cap C\cap\bar{D}|+|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap D|+|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cap D|\\=&|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|\\&+|C\cap D|-3(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|\\&+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|)+6|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

3.6.2 一般公式

从前面讨论还可以得出更一般的公式，前提是在集合 S 上讨论不同性质形成的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，假定 $0\leqslant m\leqslant n$，

$$\alpha(m)\triangleq\sum|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap\cdots\cap A_{i_m}|$$

$\sum$ 是对所有的组合 $(i_1,i_2,\cdots,i_m)$ 求和.

令 $\beta(m)$ 为正好有 m 个性质的总和.

以 $m=2,n=4$ 为例

$$\begin{aligned}\alpha(2)=&|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|\\&+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(2)=&|A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|+|A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\cap\overline{A}_4|\\&+|A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap A_4|+|\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\cap\overline{A}_4|\\&+|\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\cap A_4|+|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\cap A_4|\end{aligned}$$

又 $m=3,n=4$,则

$$\begin{aligned}\alpha(3)=&|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|\\&+|A_2\cap A_3\cap A_4|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(3)=&|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\overline{A}_4|+|A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\cap A_4|\\&+|A_1+\overline{A}_2\cap A_3\cap A_4|+|\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|\end{aligned}$$

定理 3-4

$$\beta(m)=\alpha(m)-\binom{m+1}{m}\alpha(m+1)+\binom{m+2}{m}\alpha(m+2)-\cdots+(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha(n)$$

$$=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\alpha(k)\qquad m=1,2,\cdots,n$$

证明之前先看一个实例,一个研究生班主要开 4 门课,即数学、计算机、英语和物理,教师 13 人,列表如表 3-2.

表 3-2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F:物理	1			1		1	1			1			
C:计算机	1	1	1	1	1	1		1	1		1		
M:数学	1		1			1	1		1			1	
E:英语	1		1			1		1	1			1	

$$|F|=5,\quad |C|=9,\quad |M|=6,\quad |E|=6$$

$$|F\cap C|=3,\quad |F\cap M|=3,\quad |F\cap E|=2$$

$$|C\cap M|=4,\quad |C\cap E|=5,\quad |M\cap E|=5$$

$$|F\cap C\cap M|=2,\quad |F\cap C\cap E|=2,$$

$$|F\cap M\cap E|=2,\quad |C\cap M\cap E|=4,$$

$$|F\cap C\cap M\cap E|=2,\quad N=12$$

$$\begin{aligned}\alpha(1)&=|F|+|C|+|M|+|E|\\&=5+9+6+6=26\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(2)&=|F\cap C|+|F\cap M|+|F\cap E|\\&\quad+|C\cap M|+|C\cap E|+|M\cap E|\\&=3+3+2+4+5+5=22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(3)&=|F\cap C\cap M|+|F\cap C\cap E|\\&\quad+|F\cap M\cap E|+|C\cap M\cap E|\end{aligned}$$

$$=2+2+2+4=10$$

$$\alpha(4)=|F\cap C\cap M\cap E|=2$$

另一方面从表中还可看到

$$\beta(1)=|F\cap\bar{C}\cap\overline{M}\cap\bar{E}|+|\bar{F}\cap C\cap\overline{M}\cap\bar{E}|$$
$$+|\bar{F}\cap\bar{C}\cap M\cap\bar{E}|+|\bar{F}\cap\bar{C}\cap\overline{M}\cap E|=4$$

$$\beta(2)=|F\cap C\cap\overline{M}\cap\bar{E}|+|F\cap\bar{C}\cap M\cap\bar{E}|$$
$$+|F\cap\bar{C}\cap\overline{M}\cap E|+|\bar{F}\cap C\cap M\cap\bar{E}|$$
$$+|\bar{F}\cap C\cap\overline{M}\cap E|+|\bar{F}\cap\bar{C}\cap M\cap E|=4$$

$$\beta(3)=|F\cap C\cap M\cap\bar{E}|+|F\cap C\cap\overline{M}\cap E|$$
$$+|F\cap\bar{C}\cap M\cap E|+|\bar{F}\cap C\cap M\cap E|=2$$

$$\beta(4)=|F\cap M\cap C\cap E|=2$$

可以验证：

$m=0$

$$\alpha(0)=13$$

$$\beta(0)=\alpha(0)-\binom{1}{0}\alpha(1)+\binom{2}{0}\alpha(2)-\binom{3}{0}\alpha(3)+\binom{4}{0}\alpha(4)$$
$$=13-26+22-10+2=1$$

即第 13 位教师，不教 F,C,M,E.

$m=1$，

$$\beta(1)=\alpha(1)-\binom{2}{1}\alpha(2)+\binom{3}{1}\alpha(3)-\binom{4}{1}\alpha(4)$$
$$=26-2\times22+3\times10-4\times2$$
$$=26-44+30-8=4$$

即第 1，2，5，10，11 位教师.

$m=2$，

$$\beta(2)=\alpha(2)-\binom{3}{2}\alpha(3)+\binom{4}{2}\alpha(4)$$
$$=22-3\times10+6\times2$$
$$=22-30+12=4$$

只教两门课的教师只有第 4，7，8，12 位教师.

证明　即在 S 集合讨论 n 种性质的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，$0\leqslant m\leqslant n$，$\beta(m)$表示刚好只具有其中 m 个性质的元素个数.

假定 $s\in S$，可证明它在等式：

$$\beta(m)=\alpha(m)-\binom{m+1}{m}\alpha(m+1)+\binom{m+2}{m}\alpha(m+2)+\cdots+(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha(n)$$

两端被计算的次数一样，s 或 0 或 1.

若 s 正好具有 l 种性质，即在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中正好有其中 l 个性质：

第一种情况 $l<m$，则 s 在上面等式两端都没有贡献.

第二种情况 $l=m$，x 在 $\beta(m)$计算一次，s 也只能在 $\alpha(m)$中被计算一次.

第三种情况 $l>m$，则 s 在

$$\alpha(m)\text{被计算}\binom{l}{m}\text{次}$$

$$\alpha(m+1)\text{被计算}\binom{l}{m+1}\text{次}$$

$$\vdots$$

$$\alpha(l)\text{被计算}\binom{l}{l}=1\text{ 次}$$

$$\alpha(r)\text{被计算 0 次}$$

s 在等号右端出现次数为

$$\binom{l}{m}-\binom{m+1}{m}\binom{l}{m+1}+\binom{m+2}{m}\binom{l}{m+2}+\cdots+(-1)^{l-m}\binom{l}{m}\binom{l}{l}$$

但

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l}=\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$$

所以 s 在等式右端被计算的次数：

$$\begin{aligned}&\binom{l}{m}-\binom{l}{m}\binom{l-m}{1}+\binom{l}{m}\binom{l-m}{2}-\cdots+(-1)^{l-m}\binom{l}{m}\binom{l-m}{l-m}\\&=\binom{l}{m}\left\{1-\binom{l-m}{1}+\binom{l-m}{2}-\cdots+(-1)^{l-m}\binom{l-m}{l-m}\right\}\\&=(1-1)^{l-m}\binom{l}{m}=0\end{aligned}$$

推论 1　$\beta(0)=\alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\cdots+(-1)^n\alpha(n)$

推论 2　$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的 n 个子集

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|\\-\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|\\+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

证明

$$\alpha(0)=|S|,\quad\alpha(1)=\sum_{i=1}^{n}|A_i|,\quad\alpha(2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|,\cdots,$$

$$\alpha(n)=|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

根据推论 1，推论 2 得证.

3.7　广义容斥原理的应用

现在讨论一个富有趣味的问题：求满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$$

的非负整数解的数目.

这个问题可以看作求取 r 个无区别的球放到 n 个有标志的盒子并允许重复的方案数，故非负整数解的数目应为

$$\binom{n+r-1}{r} \tag{3-4}$$

即 n 取 r 作允许重复组合的组合数.

［**例 3-18**］ 对于问题

$$x_1+x_2+x_3=15$$
$$0\leqslant x_1\leqslant 5,\quad 0\leqslant x_2\leqslant 6,\quad 0\leqslant x_3\leqslant 7$$

求整数解数目.

若不附加上界条件的解根据公式(*)应为

$$\binom{15+3-1}{15}=\binom{17}{15}=\binom{17}{2}=272/2=136$$

对于有上界的问题只要作一变换

$$\xi_1=5-x_1,\quad \xi_2=6-x_2,\quad \xi_3=7-x_3$$
$$\begin{aligned}\xi_1+\xi_2+\xi_3&=5-x_1+6-x_2+7-x_3\\&=18-(x_1+x_2+x_3)=3,\quad 0\leqslant x_1\leqslant 5\end{aligned}$$

导致 $\xi_1=5-x_1\geqslant 0$,同理 $\xi_2\geqslant 0,\xi_3\geqslant 0$

于是问题变成

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=3,$$
$$\xi_1\geqslant 0,\quad \xi_2\geqslant 0,\quad \xi_3\geqslant 0$$

整数解的数目

$$\binom{2+3}{2}=\binom{5}{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$$

或从原问题的非负整数解 S,$|S|=136$,令 S 中具有 $x_1\geqslant 6$ 的子集为 A_1,$x_2\geqslant 7$ 的子集为 A_2,$x_3\geqslant 8$ 的子集为 A_3.问题转化为求 $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|$.

对于 A_1,相当于

$$(x_1+6)+x_2+x_3=15\quad 或\quad x_1+x_2+x_3=9$$

具有性质 A_1 的非负整数解的数目为

$$|A_1|=\binom{9+3-1}{9}=\binom{11}{2}=55$$

具有性质 A_2 的非负整数解,导致

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3=8$$
$$\eta_1\geqslant 0,\quad \eta_2\geqslant 0,\quad \eta_3\geqslant 0$$
$$|A_2|=\binom{10}{2}=45$$

同理

$$|A_3|=\binom{9}{2}=36$$