第 3 章　时变电磁场的普遍规律

当电磁场以及产生它的源——电荷、电流——随时间变化时会产生非常丰富多彩的电磁现象。前面讨论的静电、磁场,准静电、磁场只是其特殊情况。在普遍情况下,电磁场运动的规律将遵守麦克斯韦方程组。本章在总结三大实验定律的基础上导出麦克斯韦方程组,继而讨论电磁场的能量、动量,能量、动量守恒定律,时变电磁场边值问题解的惟一性。从麦克斯韦方程组导出波动方程,给出平面波解。介绍电磁场的规范变换,在规范条件下,把麦克斯韦方程组化为达朗贝尔方程,给出推迟势。平面波解和推迟势是后面几章讨论电磁波传播和辐射问题的基础和出发点。

3.1　法拉第定律和涡旋电场

1820 年奥斯特发现电流的磁效应后引起轰动。电、磁之间有什么规律,有什么内在的联系,是当时科学的生长点。安培、毕奥、萨伐尔研究电流产生磁场的规律。而法拉第则探讨磁能否产生电,经过十年研究,终于在 1831 年发表了电磁感应定律:

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.1}$$

由电磁学知道式中负号反映楞次定律,本质上反映能量守恒。感生电动势是由整个回路产生的,回路中应该存在电场。电动势 $\mathscr{E}$ 是这电场的环路积分。因此,应有如下关系:

$$\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.2}$$

实验是用回路做的,环路磁通量变化在回路中产生感生电场。其实,麦克斯韦认为,只要磁场变化,就会在空间产生感应电场,与回路存在与否无关。根据斯托克斯定理,式(3.1.2)可化成

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.3}$$

回路 C 及以 C 为周界的曲面 S 取定后,S 不随时间变化,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与$\iint$可交换次序,于是有

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.4}$$

因曲面 S 是任意取的(以 C 为周界的曲面有无穷多个),若使上式相等,只有被积函数相等,故

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.1.5}$$

此式是法拉第定律的微分形式。这种电场叫做涡旋电场，它是有旋电场，不同于静电场。法拉第首次提出场的概念，并用力线来描述场，是一大贡献。1855—1856 年麦克斯韦发表“论法拉第的力线”论文，进一步发展了场的概念，论述了静电场是无旋场，变化的磁场激发的电场是有旋场。于是，产生电场的源有两个：一是电荷产生的；二是变化磁场产生的。这两种场，一个是纵场，一个是横场。这是这两种场的不同之处，但对电荷的作用力是一样的。后来制造了电子感应加速器来加速电子，证明涡旋电场的概念是正确的。

3.2 麦克斯韦方程组与洛伦兹力公式

1. 麦克斯韦方程组

1864 年 12 月 8 日麦克斯韦在英国皇家学会宣读其论文“电磁场的动力学理论”，1865 年在刊物上正式发表[12]。麦克斯韦分析了三个实验定律，即库仑定律、安培-毕奥-萨伐尔定律和法拉第定律，总结出电磁场的普遍规律如下：

静电场的规律：
$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho & ①\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} & ②\end{cases}$$

稳恒电流磁场规律：
$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & ③\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j} & ④\end{cases}$$

(慢变)法拉第定律：
$$\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad ⑤$$

(1) 把式②和式⑤合起来推广到时变场(慢)

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times(\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}})=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

式中下角标 T 代表横场，L 代表纵场。此为推广的法拉第定律，是否适合快变化还有待实验检验。

(2) 把式①推广到时变情况 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon(\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}})$，对线性各向同性介质，$\varepsilon$ 是常数，则

$$\varepsilon\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}})=\nabla\cdot(\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}})=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

不需要修改。但库仑定律的条件是电荷静止，现在取消“静止”条件，推广到时变情况，是否正确也需要实验检验。

(3) 把式③推广到时变情况，下面分析是否需要修改。从法拉第定律入手，有

$$\mathscr{E}=\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{S_1}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=-\int_{S_2}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

S_1 和 S_2 都是以 C 为周界的任意曲面，$\boldsymbol{n}$ 为右旋法线，如图 3.2.1 所示。把 S_2 的法线换成外法线，得 $\oiint_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，式中 $S=S_1+S_2$ 是闭曲面(图 3.2.1)。利用矢量场论中的高斯定理得

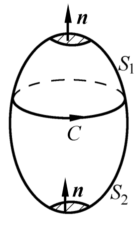

图　3.2.1

$$\oiint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V=0$$

由于 S 面是任意取的，上式均成立。于是，就有$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=0$，说明$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$不随时间变化，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\text{const}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},0)=0$$

这就证明了在非稳恒情况下，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$的散度和起始时 $\boldsymbol{B}$ 的散度一样也等于零。起始时$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，以后永远等于零。因此，起始时$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，推广到时变情况时不需要修改。法拉第做实验时，随时间变化比较慢。到时间变化很快时，比如 10^9 Hz，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}\cdot t)=0$ 是否还对，理论论证是对的，但还要有实验证明，实验是最终判据。

(4) 把式④$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}$ 推广到时变情况，麦克斯韦发现与电荷守恒定律相矛盾，$0\equiv\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\boldsymbol{j}\neq0$，怎么修改？由电荷守恒定律$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 补充一项$\frac{\partial\rho}{\partial t}$，有$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$，比较两端可知$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$。$\boldsymbol{D}$ 是电位移矢量，麦克斯韦命名$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$为位移电流。他提出了位移电流假说，是一个重大的贡献。因为位移电流假说相当于一个定律，和三大实验定律并列的一个定律，是从理论上发现的。于是产生磁场的源也有两种：一是电流；二是变化的电场，因$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}})$。综合上面讨论，得到一个方程组：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho & ①\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & ②\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & ③\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} & ④\end{cases}\tag{3.2.1}$$

叫做电磁场的麦克斯韦方程组，其积分形式为

$$\begin{cases}\oiint\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\rho\mathrm{d}V\\ \oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oiint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\\ \oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{cases}\tag{3.2.2}$$

对于各向同性、线性介质，在低频情况下极化、磁化和欧姆定律都是线性的，因此描写物质电磁性质的方程总结为

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{3.2.3a}$$

在介质分界面上，通过跨界面作扁盒状高斯柱面(类似于图 1.2.2)和狭长矩形安培环路(类似于图 1.2.3)，应用方程组积分形式(3.2.2)，可以得到边值关系如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_e \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\Pi} \end{cases} \tag{3.2.4}$$

第一个边值关系是因为涡旋电场是无散场，$\nabla\cdot\boldsymbol{D}_T=0$，$(D_T)_{n2}=(D_T)_{n1}$，故有

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\boldsymbol{n}\cdot[(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_T)_2-(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_T)_1]=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_{L2}-\boldsymbol{D}_{L1})=\sigma_e$$

第二个边值关系是因为$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},0)=0$。第三个边值关系，对跨界面小矩形环路应用$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$时，有$\Delta\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=\Delta\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{E}_{T1}-\boldsymbol{E}_{T2})=-\Delta l\Delta h\boldsymbol{n}_0\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$。因为$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$是变化率，变化率总是一个有限值，有限值×无穷小面积$(\Delta l\Delta h)=0$，故有$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{0}$。第四个边值关系，对跨界面小矩形环路应用$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$时，同上面一样，因为$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$是变化率，是一个有限值，有限值×无穷小面积$=0$。即位移电流的贡献是零，只保留传导电流的贡献，故有$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\Pi}$。

麦克斯韦总结了库仑定律、安培-毕奥-萨伐尔定律、法拉第电磁感应定律，引进了位移电流假说，总结出电磁场的动力学方程组。这个理论不仅仅是把几个定律简单地捏合在一起，而是推广、发展，是一个提炼、升华的过程。它来自实验，但高于实验。它是否正确要靠实验来检验。

2. 关于麦克斯韦方程组的讨论

麦克斯韦方程组是电磁场的动力学方程，相当于力学中的牛顿第二定律。一个理论正确与否要靠实验来检验，这是问题的一个方面；另一方面是这理论本身要自洽，内部不能有矛盾。至少要自圆其说，这是必要条件。否则，不能称其为理论。

(1) 方程组内散度方程和旋度方程之间的关系

麦克斯韦方程组(3.2.1)内有2个散度方程和2个旋度方程。它们之间的协调关系是什么呢？首先对式④求散度：

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D}-\rho)=0$$

当场在定义域内连续可微时，由于空间和时间正交，所以上式中算符$\partial/\partial t$和∇可交换，结果是$\nabla\cdot\boldsymbol{D}-\rho$不随时间变化。当$t=t_0$时，$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$成立，以后任意时刻$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)$都成立。因此可以把式①看作式④的初始条件。再对方程(3.2.1)中的式②求散度：

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=0$$

可见$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$不随时间变化。只要$t=t_0$时，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，则以后任何时刻恒有$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0$。这样式③可看作是式②的初始条件。

由以上讨论可知，对时变场来说，两个旋度方程是基本方程，两个散度方程可看成初始条件。然而，对静态场和稳恒场来说，不存在初始条件问题，散度和旋度方程都是基本方程。

（2）麦克斯韦方程组的完备性

当把方程(3.2.1)中式①，③看作初始条件时，两个旋度方程只包含 6 个标量方程，而待求的标量未知数却是 $5\times3=15$ 个($\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H},\boldsymbol{B},\boldsymbol{J}$)。考虑物质方程(3.2.3a)包含 9 个标量方程，假定媒质是线性、各向同性的，物质常数 ε,μ 和 σ 与时间无关。这样，把方程组和物质方程合在一起则是完备的。

比较复杂的情况是物质常数 ε,μ,σ 可能与温度 T 有关，与时间 t 有关，也可能与场强 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 本身有关。我们已经知道铁磁质的 μ 与 H 有关，与磁化历史即时间 t 有关，铁电体的 ε 与 $\boldsymbol{E}$ 有关。这些属于专门课题，有专著[2]，不在现行电动力学课程讨论的范围内。

即使是各向同性介质，一般认为 ε,μ,σ 只是 $\boldsymbol{r}$ 的函数。但在场变化比较快时，ε,μ,σ 也可能与频率 ω 有关。以 ε 为例，介质极化有两种机制：离子极化和电子极化。当频率很高时，离子质量大，惯性大，有极分子极化取向跟不上场的变化，这种极化机制对 ε 的贡献趋于零；而电子质量轻，惯性小，完全可以跟上场的变化，只有这种极化机制保留对 ε 的贡献，于是 ε 大幅度降低。在很高频率时，物质常数$\varepsilon(\omega),\mu(\omega),\sigma(\omega)$都成为频率的函数。这就是介质的色散(见 8.5，8.6 节)。

（3）参考系问题

在一个惯性系中，电荷 ρ 静止，只产生 $\boldsymbol{E}$；而在速度为 $\boldsymbol{v}$ 的另一个惯性系中看，$\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}$，除产生电场外，还产生磁场 $\boldsymbol{B}$。现在暂不考虑这类问题。在麦克斯韦时代认为存在一个绝对静止的“以太”坐标系，麦克斯韦方程组只有在以太系中完全正确，在其他惯性系中只能近似正确。直到相对论提出，这个问题才彻底弄清楚了。麦克斯韦方程组在任何惯性系中都成立。

3. 洛伦兹力公式

麦克斯韦只总结了描写电磁场运动规律的动力学方程组，关于带电体受的电磁力是由洛伦兹总结的。静止电荷在静电场中受的力称为库仑力：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V$$

稳恒电流在稳恒磁场中受的作用力称为安培力：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V$$

洛伦兹把它们合起来并推广到带电体在随时间变化的电磁场中运动的普遍情况：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V \tag{3.2.5}$$

定义洛伦兹力密度为单位体积带电体受的作用力

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3.2.6}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是总场，包括运动带电体本身所激发的电磁场在内。应当强调指出，式(3.2.5)、式(3.2.6)不是库仑力和安培力的简单叠加，而是推广。所谓推广就是把其适用范围扩大，这种推广是否正确要靠实验来检验。一百多年来的实验事实证明洛伦兹力公式也是正确的。

电荷、电流在电磁场中受力作用，其位置就会变化，继而使电磁场变化，场变化又会引起电荷、电流运动状态变化……怎样解决这种问题？必须把电荷、电流和电磁场通盘考虑：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{麦克斯韦方程组}\\ \text{洛伦兹力公式}\\ \text{牛顿第二定律}\end{array}\right. \tag{3.2.7}$$

理论上解联立方程(3.2.7)可以解决运动带电体和电磁场相互作用的问题。或者说,可以解决一切电磁问题。这类问题是粒子加速器领域中“电子光学”、“束流光学”、“粒子动力学”以及受控热核反应领域“等离子体物理学”等课程讨论的主要内容。在加速器领域,一般分两类情况进行求解。

① 弱电、弱流情况:作为0级近似,先不考虑带电粒子束流对电磁场 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$ 的影响,直接计算粒子运动轨迹。如果误差比较大,再对粒子轨道进行修正;否则,不必修正。

② 强流情况:由0级近似确定电磁场,同时考虑带电粒子束对电、磁场的影响,对粒子运动轨道进行多级迭代修正。

3.3 电磁场的能量转换与守恒定律,坡印亭矢量

电磁场是一种特殊形态的物质。说它是物质,是说它具有能量、动量等物质的属性。说它特殊,指它具有“可入性”,实物具有“不可入性”。能量和动量是基本属性,我们从麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式出发来讨论电磁场的物质性,当然也用到牛顿第二定律。

对于一种新的能量形态的认识,总是通过它与已熟知的能量形态的相互转化和守恒关系来达到,这是一个认识过程。1884年,麦克斯韦的学生坡印亭(J. H. Poynting, 1852—1914)首次推导出电磁场中的能量流动关系。

考虑不导电介质(无焦耳热损耗)一个体积元 $\mathrm{d}V$ 中,运动带电体$(\rho,\boldsymbol{j})\mathrm{d}V$ 受洛伦兹力:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}\mathrm{d}V=(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V \tag{3.3.1}$$

令 W_{k} 为运动带电体动能,电磁场对它做功的功率等于单位时间运动带电体动能的增加:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}=\int\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\int\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{3.3.2}$$

把方程组(3.2.1)中的式④两边点乘 $\boldsymbol{E}$ 并移项,得功率密度

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \tag{3.3.3}$$

把方程组(3.2.1)中的式②两边点乘 $\boldsymbol{H}$ 并移项,得

$$0=\boldsymbol{H}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \tag{3.3.4}$$

将式(3.3.3)和式(3.3.4)的两边分别相减,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\right]-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\end{aligned}$$

对于线性各向同性介质,$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$,$\varepsilon$,$\mu$ 与时间 t 无关。定义电磁场的能量密度

$$u=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{3.3.5}$$

定义电磁场的能流密度

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{3.3.6}$$

通常把 $\boldsymbol{S}$ 叫做坡印亭矢量。于是上面的功率密度表达式可改写为

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{S} \tag{3.3.7}$$

代入式(3.3.2),得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}&=-\int\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V-\int\nabla\cdot\boldsymbol{S}\mathrm{d}V\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u\mathrm{d}V-\int\nabla\cdot\boldsymbol{S}\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}-\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

V 内电磁场能量

$$U=\int_V u\,\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V \tag{3.3.9}$$

改写式(3.3.8)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_{\mathrm{k}}+U)=-\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \tag{3.3.10}$$

式(3.3.10)的物理意义:体积V内电磁场能量和运动带电体动能的总增加量等于从边界面Σ流进来的电磁能量。这就是定域的能量守恒定律。如果把Σ面无限扩大,体积分包括电磁场存在的全部空间,Σ面上无电磁能量流进来,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_{\mathrm{k}}+U)=0 \tag{3.3.11a}$$

即 $W_{\mathrm{k}}+U=\mathrm{const}$,总能量守恒。这是与外界($\Sigma$外)无能量交换的情况。运动带电体和电磁场构成一封闭系统,对封闭系统来说,式(3.3.11a)也可写成

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t} \tag{3.3.11b}$$

式(3.3.11b)说明:运动带电体动能的增加等于电磁场能量的减少。换句话说,电磁场能量增加率等于带电体动能减少率。由此可见,电磁能和机械能可以互相转化,在转化过程中遵守能量守恒原理。u 解释成电磁场能量密度,$\boldsymbol{S}$ 解释成电磁场能流密度是对的。

电磁场能量守恒是由麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式及牛顿第二定律导出的,这说明麦克斯韦方程组、洛伦兹力公式、牛顿第二定律与能量守恒原理是协调一致的。

3.4　电磁场的动量转换和守恒定律

1903 年,亚伯拉罕(M. Abraham,1875—1922)首次提出电磁场动量的概念。对于一种新的动量形态的认识,也要通过它与已知形式的动量形态间相互转化与守恒关系来达到。为简便起见,只讨论真空情况,不讨论介质,因为介质比较复杂,介质受力要形变(收缩或膨胀),密度就会变化,温度也相应变化……下面我们运用麦克斯韦方程组和牛顿第二定律来讨论真空情况下电磁场的动量守恒与转化问题。为了方便,把麦克斯韦方程组重写如下:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{cases}$$

并且物质方程在真空中简化为

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H} \end{cases} \tag{3.2.3b}$$

设 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ 为 V 内运动带电体的机械动量，根据牛顿第二定律有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int_V \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V \tag{3.4.1}$$

式(3.4.1)右端被积函数 $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$，根据式(3.2.1)和式(3.2.3b)把源量 ρ，$\boldsymbol{j}$ 用场量表示，则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}&=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\\
&=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\left(\nabla\times\boldsymbol{H}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B}\\
&\quad\left(\text{注意到 }\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\\
&=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\\
&\quad(\text{注意到}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0)\\
&=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\\
&=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})+\mu_0(\nabla\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{H}-\mu_0\boldsymbol{H}\times(\nabla\times\boldsymbol{H})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

式中 $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$。定义**电磁场动量流密度张量**

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}=-\left[\varepsilon_0\left(\boldsymbol{EE}-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\right)+\mu_0\left(\boldsymbol{HH}-\frac{1}{2}H^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\right)\right] \tag{3.4.3}$$

式中 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$ 是单位张量。可以证明

$$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})+\mu_0(\nabla\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{H}-\mu_0\boldsymbol{H}\times(\nabla\times\boldsymbol{H})$$

定义**电磁场动量密度**

$$\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2} \tag{3.4.4}$$

则式(3.4.2)可写作

$$\boldsymbol{f}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}-\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t} \tag{3.4.5}$$

把式(3.4.5)代入式(3.4.1)，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int_V\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V=-\int_V\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}V-\int_V\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t}\mathrm{d}V=-\oiint_S\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}V$$

令

$$\boldsymbol{G}=\int_V\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}V \tag{3.4.6}$$

代表 V 内电磁场总动量，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=-\oiint\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} \tag{3.4.7}$$

$\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}$ 的单位均为 W^2/m，只能解释成电磁场动量。下面讨论式(3.4.7)的物理意义。

(1) $V=V_{\infty}$，式(3.4.7)中面积分 $\oiint \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}=0$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{G})=0 \tag{3.4.8}$$

即

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{G}=\mathrm{const} \tag{3.4.9}$$

式(3.4.4)～式(3.4.6)中 $\boldsymbol{g}$ 为电磁场的动量密度，$\boldsymbol{G}$ 为全空间电磁场总动量。式(3.4.9)的物理意义是：带电体机械动量与电磁场总动量之和是守恒量。换句话说：运动带电体动量的增加等于电磁场动量的减少，运动带电体动量的减少等于电磁场动量的增加。也就是说运动带电体可以从电磁场取得动量，也可以把自身的动量交给电磁场。这里，我们看到两种性质不同的动量可以互相转化，在转化过程中是遵守动量守恒原理的。

举一日常生活中的例子：50Hz 市电不仅载着电磁能量，同时也载着电磁动量，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{S}/c^2$，动量是从哪里来的？如水利发电情况，水流的动量转化为水轮机角动量，水轮机带动发电机，发电机角动量转化为电网上的电磁场动量。马达(电动机)接到电网上，电磁场动量又转化为电动机角动量，电动机带动机床车、削、铣、刨工件。

对点亮的灯泡，无转动部件，动量哪里去了？这是由于灯泡发光，光子有动量和角动量。光子能量 $E=h\nu$，光子动量 $p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$，光子角动量 $J=\frac{h}{2\pi}=\hbar$。请大家思考：火力发电，动量是从哪里来的？

(2) 体积 V 有限，由式(3.4.7)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{G})=-\oiint \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \tag{3.4.10}$$

其中 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 是动量流密度，是二阶张量；式(3.4.4)中的 $\boldsymbol{g}$ 是动量密度，是矢量；而 $\boldsymbol{S}$ 是能流密度，是矢量；式(3.3.5)～式(3.3.9)中的 u 是能量密度，是标量。式(3.4.10)说明：V 内带电体机械动量和 V 内电磁场动量之和的增加等于从 V 的边界面上流进来的电磁动量。$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$ 代表单位时间内由 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$ 面的后方流向前方的电磁动量，负号代表流进。式(3.4.5)和式(3.4.7)分别是有限区域动量转化和守恒定律的微分形式和积分形式。定义**麦克斯韦应力张量**：

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{F}}=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \tag{3.4.11}$$

在物理效应上，应力与动量流是等效的，它们差一个负号。应力也是二阶张量，例如，气体的内压就是气体分子运动所对应的动量流的等效代替。于是式(3.4.7)也可写成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{G})=\oiint(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}=\oiint\overleftrightarrow{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \tag{3.4.12}$$

其物理意义是 V 内动量(机械的和电磁场的)的增加等于 V 外面电磁场通过边界面对 V 内电磁场及带电体所施加的合压力。因为点乘 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$ 缩阶后是矢量，其量纲与力的量纲相同，式(3.4.12)也写成

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{G})=\boldsymbol{K}\mathrm{d}t \tag{3.4.13}$$

即 V 内动量的增加等于所受的冲量。麦克斯韦应力张量即动量流密度张量是一个对称张

量，满足

$$\mathscr{F}_{ij} = \mathscr{F}_{ji}, \qquad T_{ij} = T_{ji} \tag{3.4.14}$$

在材料力学、固体力学中，固体内部应力用张量描写，在固体内部任意一点 P 取一面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$，作用在该面元上的力有法向力 f_n（张应力）、切应力 f_{t1} 和 f_{t2}，把每一应力投影到 x,y,z 三个正交轴上，共有九个分量。或在 P 点的任意面元向三个正交平面投影，得到三个正交面元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$。在每个正交面元上有一个张应力、两个切应力，也是九个分量。总之，要知道 P 点的应力，需要用九个数来描述。

在流体（气体、液体）力学内，压力用"动量流密度"来描写。电磁场是一种新的物质形态，既不是固体，也不是流体。描写它的性质又得借助已熟悉的物理量，所以可以用动量流密度张量，也可以用应力张量。在静电、静磁场中，求场对导体、对介质的作用力更倾向于用应力张量这个术语，计算结果是一样的。按这里定义的动量流密度张量和麦克斯韦应力张量差一负号。下面举例说明麦克斯韦应力张量的用法。

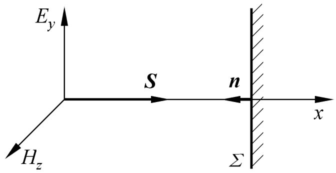

图　3.4.1

例 3.4.1　光压（1900 年俄国列别捷夫测量光压）。

设电磁波沿 x 轴入射，到达 Σ 面上被完全吸收（图 3.4.1）。设在 Σ 面上应力张量为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{F}}$，则 Σ 面上单位面积受到的电磁场作用力（由于 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{F}}$ 是对称张量，点乘[①]时，左点乘和右点乘结果一样）为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_n &= \boldsymbol{n} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{F}} = \varepsilon_0\left(E_n\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}E^2\boldsymbol{n}\right) + \mu_0\left(H_n\boldsymbol{H} - \frac{1}{2}H^2\boldsymbol{n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\boldsymbol{n} = -u\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

上式第三个等号是因为在 Σ 面上电磁场法向分量 $E_n = H_n = 0$。电磁场是时间的周期函数，Σ 面上单位面积所受的平均辐射压力为

$$\boldsymbol{f}_n = -\frac{1}{2}(\varepsilon_0 \overline{E}^2 + \mu_0 \overline{H}^2) = -\bar{u}\boldsymbol{n} = \bar{u}\boldsymbol{e}_x \tag{3.4.15}$$

Σ 面受到一个压力。顺便说明，光压是很小的。太阳光照射到人身上，也有光压，一般感觉不到，但这不等于光压不存在。1900 年列别捷夫从实验上证实了光压的存在，这也是麦克斯韦理论正确性的一个证据。光压在两个领域起重要作用，一是在微观领域，有康普顿效应；二是在宇观领域，恒星内部的万有引力据推测是靠光压来平衡的，恒星晚期光压抵不住引力，便塌缩形成白矮星、中子星等。

* **例 3.4.2**　介质在静电场中的受力问题。

设真空中介质表面的静电场 $\boldsymbol{E}$ 与法线 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角为 θ，x 轴取在 $\boldsymbol{E}$ 的方向，如图 3.4.2 所示。在静电场中麦克斯韦应力张量为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{F}} = \varepsilon_0\left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\right) \tag{3.4.16}$$

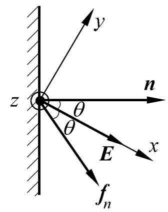

图　3.4.2

介质单位表面积受力为

① 矢量和二阶张量点乘是降阶运算，结果是一个矢量。二阶张量可看作一个并矢，用一矢量左点乘二阶张量时，只与左矢量求标积，右点乘时只与右矢量作标积。所得结果一般是不同的。