第三章　导数的应用

一、选择题

1.（1994 年）　曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$的渐近线有（　　）.

(A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

2.（1996 年）　设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是（　　）.

(A) $f'(x_0)$是 $f'(x)$的极大值　　(B) $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值

(C) $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

3.（1997 年）　若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在$(0,+\infty)$内有（　　）.

(A) $f'(x)>0,f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0,f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0,f''(x)>0$

4.（1998 年）　设周期函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为 4，又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的斜率为（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

5.（2001 年）　设 $f(x)$的导数在 $x=a$ 处连续，又$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则（　　）.

(A) $x=a$ 是 $f(x)$的极小值点

(B) $x=a$ 是 $f(x)$的极大值点

(C) $(a,f(a))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$的极值点，$(a,f(a))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点

6.（2003 年）　曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$（　　）.

(A) 仅有水平渐近线　　(B) 仅有铅直渐近线

(C) 既有铅直又有水平渐近线　　(D) 既有铅直又有斜渐近线

7.（2004 年）　设 $f(x)=|x(1-x)|$，则（　　）.

(A) $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点

8.（2005 年）　当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.（　　）

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

9.（2005 年）　设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是（　　）.

(A) $f(0)$是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$是极小值　　(B) $f(0)$是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$是极大值

(C) $f(0)$是极大值,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值　　(D) $f(0)$是极小值,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值

10.(2005 年)　以下四个命题中,正确的是(　　).

(A) 若 $f'(x)$在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$在$(0,1)$内有界

(B) 若 $f(x)$在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$在$(0,1)$内有界

(C) 若 $f'(x)$在$(0,1)$内有界,则 $f(x)$在$(0,1)$内有界

(D) 若 $f(x)$在$(0,1)$内有界,则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界

11.(2007 年)　曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线的条数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

12.(2010 年)　设函数 $f(x)$,$g(x)$具有二阶导数,且 $g''(x)<0$,若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$的极值,则 $f(g(x))$在 x_0 取极大值的一个充分条件是(　　).

(A) $f'(a)<0$　　(B) $f'(a)>0$

(C) $f''(a)<0$　　(D) $f''(a)>0$

13.(2012 年)　曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$渐近线的条数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

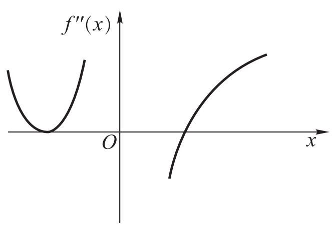
14.(2014 年)　下列曲线中有斜渐近线的是(　　).

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

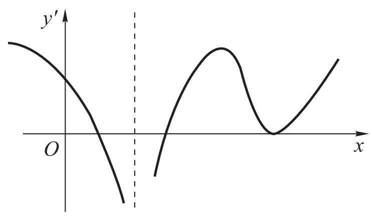
(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

15.(2015 年)　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其二阶导函数 $f''(x)$的图形如题 15 图所示,则曲线 $y=f(x)$的拐点个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3



题 15 图



题 16 图

16.(2016 年)　设函数 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形如题 16 图所示,则(　　).

(A) 函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点

(B) 函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 3 个拐点

(C) 函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 1 个拐点

(D) 函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点

二、填空题

17.(1989 年)　曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点$\left(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right)$处的切线方程是__________.

18.（1991 年）　设 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(n)}(x)$在点 $x=$__________处取极小值__________.

19.（1991 年）　设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点$(-1,0)$，且在点$(-1,0)$有公共切线，则 $a=$__________，$b=$__________，$c=$__________.

20.（1996 年）　设(x_0,y_0)是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是__________.

21.（1998 年）　设曲线 $f(x)=x^n$ 在点$(1,1)$处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$__________.

22.（2003 年）　已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$__________.

23.（2010 年）　若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点$(-1,0)$，则 $b=$__________.

24.（2011 年）　曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点$(0,0)$处的切线方程为__________.

三、解答题

25.（1988 年）　已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，$-\infty<x<+\infty$.

（1）$f'(x)=$__________；

（2）$f(x)$的单调性__________；

（3）$f(x)$的奇偶性__________；

（4）$f(x)$的图形的拐点__________；

（5）$f(x)$的图形的凹、凸性__________；

（6）$f(x)$的图形的水平渐近线__________.

26.（1988 年）　将一长为 a 的铁丝切成两段，并将其中一段围成正方形，另一段围成圆形，为使正方形与圆形面积之和最小，问两段铁丝的长各为多少？

27.（1989 年）　已知函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$，试求其单调区间，极值点及图形的凹凸性、拐点和渐近线，并画出函数的图形.

28.（1992 年）　求证：当 $x\geqslant1$ 时，$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

29.（1990 年）　证明不等式

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

30.（1991 年）　证明不等式 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{1+x}$，$0<x<+\infty$.

31.（1991 年）　试证明函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间$(0,+\infty)$内单调增加.

32.（1992 年）　给定曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$.

（1）求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程；

（2）求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度.

33.（1993 年）　运用导数的知识作函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形.

34.（1993 年）　设 p,q 是大于 1 的常数，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，证明，对于任意 $x>0$，有

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x.$$

35.(1994 年) 假设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,$f''(x)$在$(a,+\infty)$内存在且大于零,记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x>a)$. 证明:$F(x)$在$(a,+\infty)$内单调增加.

36.(1996 年) 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形,记切点的横坐标为 a,试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时,该面积的变化趋势如何?

37.(1999 年) 证明:当 $0<x<\pi$ 时,有 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.

38.(2000 年) 求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值,并求该函数图形的渐近线.

39.(2001 年) 已知抛物线 $y=px^2+qx$(其中 $p<0,q>0$)在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

(1) 问 p 和 q 为何值时,S 达到最大值;(2) 求出此最大值.

40.(2003 年) 设 $a>1$,$f(t)=a^t-at$ 在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时,$t(a)$最小? 并求出最小值.

41.(2006 年) 证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

42.(2007 年) 设函数 $y=y(x)$由方程式 $y\ln y-x+y=0$ 确定,试判断曲线 $y=y(x)$ 在点(1,1)附近的凹凸性.

43.(2011 年) 证明 $4\arctan x-x+\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=0$ 恰有两实根.

44.(2012 年) 证明:$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

45.(2015 年) 设函数 $f(x)$在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$,曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0)=2$,求 $f(x)$的表达式.

第四章　一元函数积分学

一、选择题

1.（1987 年）　反常积分收敛的是（　　）.

(A) $\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$　　(B) $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx$　　(C) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$　　(D) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

2.（1989 年）　在下列等式中，正确的结果是（　　）.

(A) $\int f'(x)dx = f(x)$　　(B) $\int df(x) = f(x)$

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$　　(D) $d\int f(x)dx = f(x)$

3.（1992 年）　设 $F(x) = \frac{x^2}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于（　　）.

(A) a^2　　(B) $a^2 f(a)$　　(C) 0　　(D) 不存在

4.（1993 年）　设 $f(x)$为连续函数，且 $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)dt$，则 $F'(x)$等于（　　）.

(A) $\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$　　(B) $f(\ln x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

(C) $\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$　　(D) $f(\ln x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$

5.（1995 年）　下列反常积分发散的是（　　）.

(A) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sin x} dx$　　(B) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(C) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$　　(D) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} dx$

6.（1997 年）　设 $f(x) = \int_{0}^{1-\cos x} \sin t^2 dt$，$g(x) = \frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是 $g(x)$的（　　）.

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价的无穷小

7.（1997 年）　设 $f(x)$，$\varphi(x)$在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是 $\varphi(x)$的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，$\int_{0}^{x} f(t)\sin t dt$ 是$\int_{0}^{x} t\varphi(t)dt$ 的（　　）.

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

8.（1999 年）　设 $f(x)$是连续函数，$F(x)$是 $f(x)$的原函数，则（　　）.

(A) 当 $f(x)$是奇函数时，$F(x)$必为偶函数

(B) 当 $f(x)$是偶函数时，$F(x)$必为奇函数

(C) 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必为周期函数

(D) 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必为单调增函数

9.(2002 年)　设函数 $f(x)$连续,则在下列变上限定积分定义的函数中,必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

10.(2004 年)　设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则(　　).

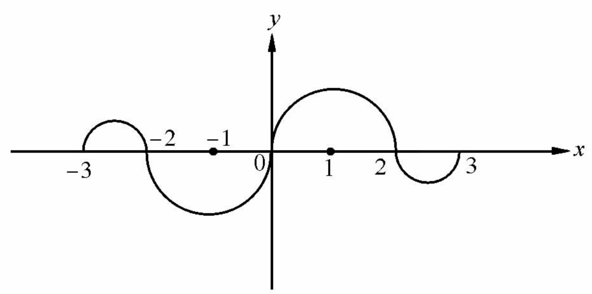
(A) $F(x)$在 $x=0$ 点不连续

(B) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,但在 $x=0$ 点不可导

(C) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且满足 $F'(x)=f(x)$

(D) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,但不一定满足 $F'(x)=f(x)$

11.(2007 年)　如题 11 图,连续函数 $y=f(x)$在区间$[-3,-2]$,$[2,3]$上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则下列结论正确的是(　　).



题 11 图

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

12.(2008 年)　设函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的(　　)

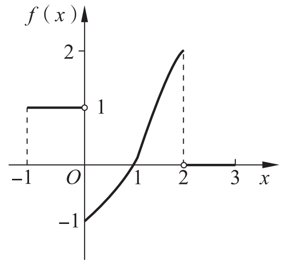
(A) 跳跃间断点　　(B) 可去间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 振荡间断点

13.(2009 年)　使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是(　　).

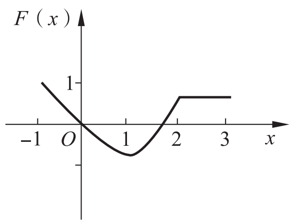
(A) $(0,1)$　　　(B) $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　　(C) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　　(D) $(\pi,+\infty)$

14.（2009 年）　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如题 14 图所示，

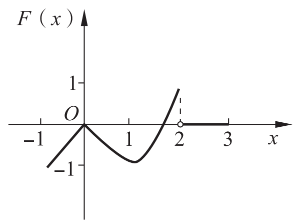


题 14 图

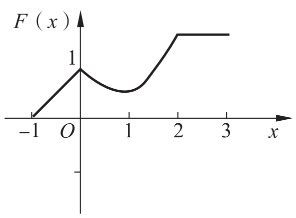
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为（　　）.



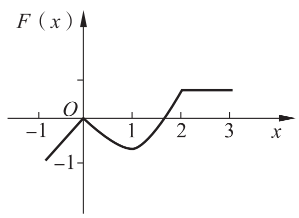
(A)



(B)



(C)



(D)

15.（2011 年）　设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系是（　　）.

(A) $I<J<K$　　　(B) $I<K<J$

(C) $J<I<K$　　　(D) $K<J<I$

二、填空题

16.（1988 年）　$\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

17.（1994 年）　$\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

18.（1995 年）　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$，则常数 $a=$ ________.

19.（1995 年）　设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$ ________.

20.(1996 年)　设 $\int xf(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + C$,则$\int \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

21.(1997 年)　若 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

22.(1997 年)　设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

23.(1999 年)　设 $f(x)$的一个原函数$\dfrac{\sin x}{x}$,则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

24.(2000 年)　$\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2-x}} =$ ＿＿＿＿＿＿.

25.(2000 年)　$\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

26.(2000 年)　已知 $f(x)$的一个原函数为 $\ln^2 x$,则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

27.(2003 年)　$\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

28.(2004 年)　设 $f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{x^2}, & -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -1, & x > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 则$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

29.(2008 年)　设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

30.(2013 年)　$\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

31.(2014 年)　设 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$,则 $a =$ ＿＿＿＿＿＿.

32.(2015 年)　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + |x|\right)\mathrm{d}x =$ ＿＿＿＿＿＿.

33.(2015 年)　设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$. 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$,则 $f(1)=$ ＿＿＿＿＿＿.

34.(2016 年)　极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿.

三、解答题

35.(1987 年)　求不定积分 $\int \dfrac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}$.

36.(1987 年)　求不定积分 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$.

37.(1987 年)　计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$.

38.(1988 年)　计算定积分 $\int_0^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

39.(1989 年)　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 计算下列各题:

(1) $S_0 = \int_0^2 f(x)e^{-x}dx$;

(2) $S_1 = \int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx$;

(3) $S_n = \int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x}dx(n=2,3,\cdots)$;

(4) $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$.

40.(1989 年)　假设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)\leqslant 0$,记 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$, 证明在$(a,b)$内 $F'(x)\leqslant 0$.

41.(1989 年)　求$\int \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$.

42.(1990 年)　求不定积分$\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$.

43.(1990 年)　计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

44.(1991 年)　计算定积分 $I=\int_{-1}^1(2x+|x|+1)^2dx$.

45.(1991 年)　求不定积分 $I=\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx$.

46.(1992 年)　计算定积分 $I=\int\frac{\mathrm{arccot}e^x}{e^x}dx$.

47.(1992 年)　计算定积分 $I=\int\frac{\arctan e^x}{e^x}dx$.

48.(1993 年)　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$, 求常数 a 的值.

49.(1995 年)　设 $f(x)$,$g(x)$在区间$[-a,a]$$(a>0)$上连续,$g(x)$为偶函数,且 $f(x)$满足条件 $f(x)+f(-x)=A$(A 为常数).

(1) 证明$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$;

(2) 利用(1)的结论计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$.

50.(1994 年)　设函数 $f(x)$可导,且 $f(0)=0$, $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.

51.(1994 年)　已知$\frac{\sin x}{x}$是 $f(x)$的一个原函数,求$\int x^3 f'(x)dx$.

52.(1995 年)　求不定积分$\int(\arcsin x)^2 dx$.

53．(1995 年)　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$

讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

54．(1996 年)　计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

55．(1997 年)　设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，单调不减且 $f(0)\geqslant 0$，试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t, & x>0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[0,+\infty)$上连续且单调不减(其中 $n>0$).

56．(1997 年)　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $F(x)=\displaystyle\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$. 试证：

(1) 若 $f(x)$为偶函数，则 $F(x)$也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$单调不增，则 $F(x)$单调不减.

57．(1999 年)　设函数 $f(x)$连续，且 $\displaystyle\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$，求 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

58．(1999 年)　已知 $f(x)$连续，$\displaystyle\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

59．(2000 年)　计算 $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

60．(1996 年)　设 $f(x)$在区间$[0,1]$上可微，且满足条件 $f(1)=2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$. 试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

61．(1996 年)　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)$. 求证：在$(a,b)$内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

62．(2000 年)　设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

63．(2001 年)　设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\quad(k>1),$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

64．(2001 年)　设 $f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足 $f(1)=3\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.