第 5 章　相量法基础

内容提要

本章介绍相量法，相量法是线性电路正弦稳态分析的一种简单易行的方法。相量可认为是对正弦量的一种变换，相量与正弦量是一一对应的。相量是复数，而正弦量是实数。正弦量所满足的时域常微分方程，可转换成相量所满足的复系数代数方程。代数方程的求解显然比常微分方程求解更容易。

本章主要内容有：复数、正弦量、相量法基础、电路定律的相量形式。正弦量表示大小和方向随时间按正弦规律变化的电流、电压，简称交流（AC）。

5.1　正弦量的三要素

正弦量用三角函数表示的瞬时值表示式和波形图来描述。正弦电压 u 和电流 i 的瞬时值函数表示式分别为

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_u) \tag{5-1}$$

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_i) \tag{5-2}$$

一个正弦量可以用它的最大值 U_{m}、I_{m}，角频率 ω 和初相角 φ_u、φ_i 三个要素唯一地确定。

1．最大值 U_{m}、I_{m}

这是正弦量 u 和 i 的振幅，正弦量瞬时值中的最大量值，也就是 $\sin(\omega t+\varphi_u)=1$ 和 $\sin(\omega t+\varphi_i)=1$ 时的正弦电压和电流值。其单位分别是伏特（V）和安培（A）。

2．角频率 ω

从正弦量瞬时值表示式可以看出，正弦量随时间变化的部分是式中的$(\omega t+\varphi)$，它反映了正弦电压和电流随时间 t 变化的进程，称为正弦量的相角或相位。ω 就是相角随时间变化的速度，即

$$\frac{\mathrm{d}(\omega t + \varphi)}{\mathrm{d}t} = \omega \tag{5-3}$$

单位是弧度/秒（rad/s）。

正弦量随时间变化正、负一周所需要的时间 T 称为周期，单位是秒（s）。单位时间内正弦量重复变化一周的次数 f 称为频率，$f=\dfrac{1}{T}$，单位是赫兹（Hz）。正弦量变化一周，相当于正弦函数变化 2π 弧度的电角度，正弦量的角频率 ω 就是单位时间变化的弧度数。即

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{5-4}$$

式(5-4)就是角频率 ω 与周期 T 和频率 f 的关系式。

3．初相角 φ（即 φ_u，φ_i）

它是 $t=0$ 时刻正弦电压和电流的相角。即$(\omega t+\varphi)|_{t=0}=\varphi$ 初相角的单位可以用弧度（rad）或角度（deg）来表示，两者的对应关系为 $\pi(\mathrm{rad})=180°(\mathrm{deg})$。通常初相角应在$|\varphi|\leqslant\pi$ 的范围内取主值，即 φ 一般限定在$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 的范围。如果$|\varphi|>\pi$ 时，则应以 $\varphi\pm2\pi$ 进行

替换。例如 $\varphi=\frac{3\pi}{2}(270°)$，应替换成 $\varphi=\frac{3\pi}{2}-2\pi=-\frac{\pi}{2}(-90°)$；又如 $\varphi=-1.2\pi(-216°)$ 时，则应替换为 $\varphi=-1.2\pi+2\pi=0.8\pi(144°)$。

正弦量初相角 φ 的大小和正负，与选择正弦量的计时起点有关。在波形图上，与 $\omega t+\varphi=0$ 相应的点，即正弦量瞬时值由负变正的零值点，称为零值起点，用 s 表示，计时起点是 $\omega t=0$ 的点，即坐标原点 0。初相角 φ 就是计时起点对零值起点(即以零值起点为参考)的点角度。

顺便指出，如果正弦量是余弦函数如 $u=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$ 时，则正弦量的起点 s 是 $\omega t+\varphi=0$，即 $u=+U_{\mathrm{m}}$ 对应的横坐标点。

一个正弦量当计时起点选定后，初相角 φ 便是已知量，则某一给定时刻，相角$(\omega t+\varphi)$便决定了该时刻正弦量瞬时值的大小、方向(正值或是负值)，也可以决定正弦量该时的变化趋势，即正弦量的数值是趋于增加抑或趋于减小。由此可见，正弦量的相位角也是一个重要的物理量。

5.2 相　位　差

相位角：$(\omega t+\varphi_u)$称为正弦量的相位角，简称相位。

初相位(初相角)：$t=0$ 时的相位角，简称初相。

同频正弦量的相位如图 5-1 所示。

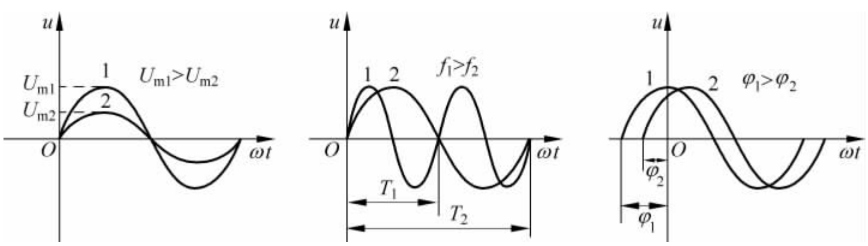


图 5-1　同频正弦量的相位

规定：相位角 $|\varphi_u|\leqslant\pi$。

相位差：两个同频率正弦量的相位之差，即为初相位之差。

例如

$$u_1=U_{\mathrm{m1}}\sin(\omega t+\varphi_1)$$

$$u_2=U_{\mathrm{m2}}\sin(\omega t+\varphi_2)$$

相位差为

$$\varphi=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$$

(1) 超前：$\varphi=\varphi_1-\varphi_2>0$，$u_1$超前 u_2角 φ。

(2) 滞后：$\varphi=\varphi_1-\varphi_2<0$，$u_1$滞后 u_2角 φ。

(3) 同相：$\varphi=2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$，$u_1$和 u_2同相；即 u_1和 u_2同时达到最大。

(4) 反相：$\varphi=n\pi$(n 为奇数)，u_1和 u_2反相。

(5) 正交：$\varphi=\frac{n}{2}\pi$(n 为奇数)，u_1 和 u_2 正交。

结论：两个同频率正弦量的计时起点变化时，它们各自的初相位会跟着变化，但它们的相位差不变。

5.3 有 效 值

有效值定义：把一交变电流 i 和一直流电流 I 分别通过两个阻值相同的电阻 R，如果在一个周期内，它们产生的热量相等，便称此 I 为 i 的有效值

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t} \tag{5-5}$$

正弦量有效值与最大值关系

$$\begin{aligned}I&=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t}\\&=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_\mathrm{m}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{I_\mathrm{m}^2}{T}\int_0^T\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t}\\&=\sqrt{\frac{I_\mathrm{m}^2}{T}\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{5-6}$$

即

$$I=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}\quad 或\quad I_\mathrm{m}=\sqrt{2}I \tag{5-7}$$

注：在实际应用中，通常用有效值来表示交流电的大小。例如，电表测出的交流电压；电气设备的额定值；家庭用电的交流电压 220V 等都是有效值。

5.4 正弦量的相量表示

复数常用的表达方式包括代数式、三角函数式、指数式、极坐标形式等。

1. 代数式

$$A=a+\mathrm{j}b\quad a、b 为实数\quad a 实部，a=\mathrm{Re}[A],\quad b 虚部，b=\mathrm{Im}[A] \tag{5-8}$$

2. 三角函数式

$$A=|A|(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)\quad |A| 为 A 的模，\varphi 为 A 的辐角 \tag{5-9}$$

转换关系为

$$\begin{aligned}|A|&=\sqrt{a^2+b^2}\\\varphi&=\arctan\frac{b}{a}\\a&=|A|\cos\varphi\\b&=|A|\sin\varphi\end{aligned} \tag{5-10}$$

3. 指数形式

$$A=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{5-11}$$

4. 极坐标形式

$$A = |A| \angle \varphi \tag{5-12}$$

复数 A 的极坐标如图 5-2 所示。

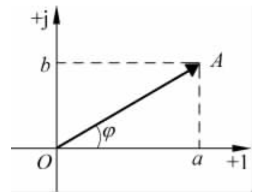


图 5-2　复数 A 的极坐标

复数的运算符合代数运算中的交换律、结合律和分配律。

(1) 复数的加、减运算

已知：

$$A_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1, \quad A_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$

则：

$$A = A_1 \pm A_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2) \tag{5-13}$$

(2) 复数的乘、除运算

已知

$$A_1 = |A_1| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} = |A_1| \angle \varphi_1, \quad A_2 = |A_2| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = |A_2| \angle \varphi_2$$

则

$$A_1 \cdot A_2 = |A_1| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} \cdot |A_2| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = |A_1||A_2| \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} = |A_1||A_2| \angle \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{|A_2| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}} = \frac{|A_1| \angle \varphi_1}{|A_2| \angle \varphi_2} = \frac{|A_1|}{|A_2|} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{|A_1|}{|A_2|} \angle \varphi_1 - \varphi_2 \tag{5-14}$$

5.5　正弦量的相量

根据欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta \tag{5-15}$$

其虚部为

$$\sin\theta = \mathrm{Im}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}]$$

若正弦电压 $u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi)$，则

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}[\sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}] \\ &= \mathrm{Im}[\sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \end{aligned} \tag{5-16}$$

式(5-16)中，$\dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=U\angle\varphi$，称为正弦电压的相量。

同理，若正弦电流 $i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$，则它的相量为：$\dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=I\angle\varphi$。

由此可见，一个正弦量的相量，就是在给定角频率 ω 条件下，用它的有效值(也可用最大值)和初相角两个要素的表征量。在概念上关于相量应明确如下几点。

- 正弦量的相量，用有效值和初相角表示时，称为效相量；用最大值和初相角表示时，称为最大值相量或振幅相量。本课程在教学中是采用有效值相量。因此，不特别说明相量是指有效值相量。
- 正弦量的相量是用有效值的初相角表征的量，不是时间 t 的函数，而是一个复数。
- 相量是正弦量的交换量，它与时域正弦函数之间，有确定的对应变换关系，如

$$\sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi) \rightarrow U\angle\varphi \quad \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi) \rightarrow I\angle\varphi$$

如果正弦量是余弦函数时，它对应的相量形式与正弦函数是相同的，即

$$\sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow U\angle\varphi \quad \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow I\angle\varphi$$

因此,要区分正弦函数相量与余弦函数相量。在进行电路分析时,必须是相同函数的相量。如果电路中有正弦函数和余弦函数电量时,必须转化为一种函数,如余弦函数的电量,才可以进行分析计算。

- 相量是时域正弦量变换为频域的变换量,不能把相量误认为是正弦量。
- 相量只能用来进行同频率正弦电源电路的分析计算。
- 非正弦周期函数电量不能用相量来表征。
- 由于电量是复数,可以在复平面上用矢量来表示,即相量图,而且可以按平行四边形法则求相量之和或差。但是,应该明确的是,相量在复平面上是一种几何表示,与物理学中所介绍的空间矢量的物理内容不同的,应加以区别。

相量表示正弦量还有如下的几个性质。

(1) 同频率正弦量代数和的相量表示

如正弦电压 $u_1=\sqrt{2}U_1\sin(\omega t+\varphi_1)$,$u_2=\sqrt{2}U_2\sin(\omega t+\varphi_2)$。则它们的代数和为

$$u_1 \pm u_2 = u$$

即

$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \pm \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}(\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

式中

$$\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2 = \dot{U}$$

由此可见,同频率正弦量的代数和仍是一个同频率的正弦量,其相量是各正弦量相量的代数和。表明:同频率正弦量的代数运算可以转变为对应相量的代数运算。

(2) 正弦量微分的相量表示

正弦量 $u=\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$,它的微分为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})] = \mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sqrt{2}\,\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\mathrm{j}\omega\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

由此可见,正弦量的一阶导数仍是一个同频率的正弦量,其相量等于正弦量的相量乘以 $\mathrm{j}\omega$。表明:$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$的相量为 $\mathrm{j}\omega\dot{U}=\omega U\angle(\varphi+90^\circ)$,它的模是正弦量相量模的 ω 倍,初相角超前于正弦量相量相位90°。

(3) 正弦量积分的相量表示

正弦量 $u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi)$,则它的积分为

$$\int u\mathrm{d}t = \int\mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\int\sqrt{2}\,\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

由此可见,正弦量的积分仍是一个同频率的正弦量,其相量等于正弦量的相量除以 $\mathrm{j}\omega$。表明:$\int u\mathrm{d}t$ 的相量为$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{U}=\frac{U}{\omega}\angle(\varphi-90^\circ)$,它的模是正弦量相量模的$\frac{1}{\omega}$倍,初相角滞后于正弦量相量相位$90^\circ$。

由上述分析可以看出,利用相量法,能够将正弦交流电路分析求解微分方程特解问题,转变为求解相量代数方程问题。后者比前者要易于进行。因此,在单一频率激励正弦交流电路中相量法成为分析计算有效的工具。

5.6　正弦电流电路中的电阻

在正弦电流电路中，电路仍然适用欧姆定律和基尔霍夫定律。

1. 电压和电流关系

如图 5-3 所示关联参考方向下，设 $u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)$，则电流为

$$i=\frac{u}{R}=\frac{\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)}{R}=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$$

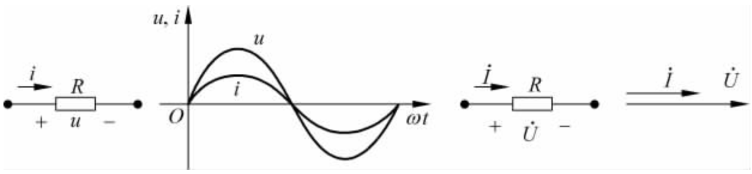


图 5-3　电阻的相量模型

结论：① 电压和电流为同频率的正弦量；

② 电阻上的电压和电流同相位；

③ 有效值关系为 $U=IR$；

④ 相量关系为$\dot{U}=\dot{I}R$。其中，$\dot{U}=U\angle\varphi_u$，$\dot{I}=I\angle\varphi_i$；

⑤ 欧姆定律的相量形式为$\dot{U}=\dot{I}R$。

2. 功率

（1）瞬时功率

设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$，则瞬时功率 p_R 为

$$\begin{aligned}p_R&=u_Ri=\sqrt{2}U_R\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin\omega t\\&=U_RI(1-\cos2\omega t)\geqslant 0\end{aligned}$$

即电阻是一个耗能元件。电阻消耗的功率如图 5-4 所示。

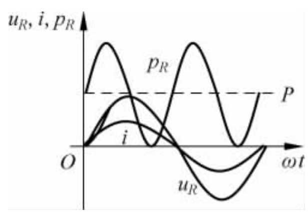


图 5-4　电阻消耗的功率

（2）平均功率

平均功率：瞬时功率在一个周期内的平均值（又称为有功功率），用 P 表示。即

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t=U_RI=I^2R=\frac{U_R^2}{R}$$

它代表了电路实际消耗的功率大小，单位是瓦特（W）。

【例 5-1】　将 220V 的交流电压加在额定值为 220V、25W 的白炽灯上，求白炽灯的电阻大小和流过白炽灯的电流。

解　白炽灯的电阻

$$R=\frac{U^2}{P}=\frac{220^2}{25}\Omega=1936\Omega$$

流过白炽灯的电流

$$I=\frac{P}{U}=\frac{25}{220}\mathrm{A}=0.114\mathrm{A}$$

5.7 正弦电流电路中的电感

1. 电压和电流关系

如图 5-5 所示关联参考方向下,设电感线圈中电流

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$$

则电感两端的感应电压 u_L 为

$$\begin{aligned}u_L&=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}L\omega I\cos(\omega t+\varphi_i)\\&=\sqrt{2}L\omega I\sin\left(\omega t+\varphi_i+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}U_L\sin(\omega t+\varphi_u)\end{aligned}$$

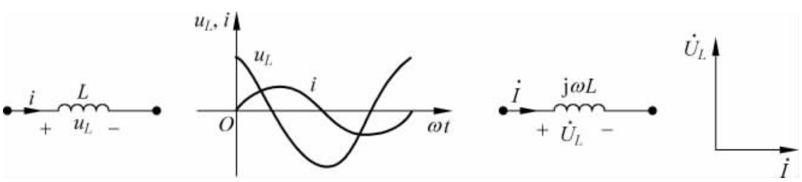


图 5-5　电感的相量模型

结论:① 电压和电流为同频率的正弦量;

② 电感上的电压超前电流 90°;

③ 有效值关系为 $U_L=\omega LI=X_LI$,$X_L=\omega L=U_L/I$ 感抗(Ω);

④ 相量关系为 $\dot{U}_L=\mathrm{j}X_L\dot{I}$ 。其中:$\dot{U}_L=U_L\angle\varphi_u$,$\dot{I}=I\angle\varphi_i$;

⑤ 感抗随频率变化,频率越低,感抗 X_L 就越小;直流时,电感相当于短路。感抗具有阻碍电流通过的性质。

2. 功率

(1) 瞬时功率

设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$,则瞬时功率为

$$p_L=u_Li=\sqrt{2}U_L\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}I\sin\omega t=U_LI\sin2\omega t$$

结论:① 在第一、三的 1/4 周期(u_L 和 i 同相),电感吸收电源的电能($p=u_Li>0$),并转换成磁场能量储存在电感线圈中。

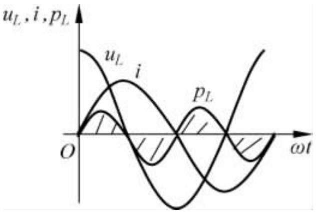


图 5-6　电感的功率

② 第二、四的 1/4 周期(u_L 和 i 反相),电感将储存在电感线圈中的磁场能量释放出来($p=u_Li<0$),还给电源。

③ 电感在电路中起能量交换作用。电感是一个储能元件,它不消耗能量。电感的功率如图 5-6 所示。

(2) 平均功率

$$P_L=\frac{1}{T}\int_0^T p_L\mathrm{d}t=0$$

（3）无功功率

反映电感在电路中与电源进行的能量交换的大小，即瞬时功率的最大值U_LI。用Q_L代表。单位：乏（Var）或千乏（kVar）。

$$Q_L = U_LI = I^2X_L = \frac{U_L^2}{X_L}$$

5.8　正弦电流电路中的电容

1. 电压和电流关系

如图5-7所示，关联参考方向下，设电容端电压为$u_C=\sqrt{2}U_C\sin(\omega t+\varphi_u)$，则电容中的电流为

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\omega CU_C\sin\left(\omega t+\varphi_u+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$$

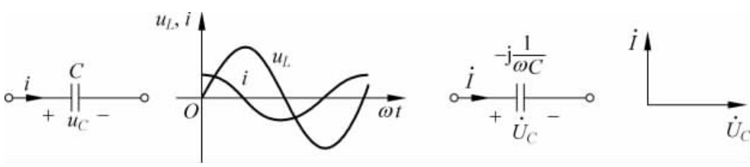


图5-7　电容的相量模型

结论：① 在纯电容电路中，电压和电流为同频率的正弦量。

② 电容中的电流超前端电压90°。

③ 有效值关系为$U_C=\frac{1}{\omega C}I=X_CI$，$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{U_C}{I}$，容抗（Ω）。

④ 相量关系为$\dot{U}_C=-\mathrm{j}X_C\dot{I}$。其中，$\dot{U}_C=U_C\angle\varphi_u$，$\dot{I}=I\angle\varphi_i$。

⑤ 容抗随频率变化，频率越低，容抗X_C就越大；直流时，电容相当于开路。容抗具有“通交流、隔直流”的作用。

2. 功率

（1）瞬时功率

设$u_C=\sqrt{2}U_C\sin(\omega t)$，如图5-8所示，则瞬时功率为

$$p_C = u_Ci = \sqrt{2}U_C\sin(\omega t)\cdot\sqrt{2}I\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) = U_CI\sin(2\omega t)$$

结论：① 在第一、三的$\frac{1}{4}$周期（u_C和i同相），电容吸收电源的电能（$p=u_Ci>0$），并转换成电场能量储存在电容器中。

② 第二、四的$\frac{1}{4}$周期（u_C和i反相），电容将储存在电容器中的电场能量释放出来（$p=u_Ci<0$），还给电源。

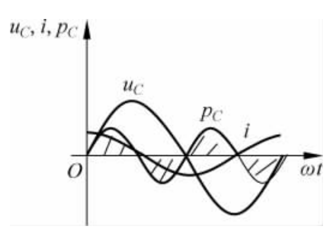


图5-8　电容的功率

③ 电容在电路中起能量交换作用，电容是一个储能元

件,它不消耗能量。

(2) 平均功率

$$P_C = \frac{1}{T}\int_0^T p_C \mathrm{d}t = 0$$

(3) 无功功率

反映电容元件在电路中进行能量交换的大小,用瞬时功率的最大值 $U_C I$,即无功功率 Q_C 表示;其单位:乏(Var)或千乏(kVar)。

5.9 关于基尔霍夫定律的相量形式

1. KCL 的相量形式

正弦交流电路中,通过任一结点电流相量的代数和等于零,即 $\sum \dot{I} = 0$。

特别要注意的是,正弦电流的有效值一般都不满足 KVL 的关系,即 $\sum I \neq 0$。

2. KVL 的相量形式

正弦交流电路中,任一闭合回路电压相量的代数和等于零,即 $\sum \dot{U} = 0$。

特别要注意的是,正弦电压的有效值一般都不满足 KVL 的关系,即 $\sum U \neq 0$。

本 章 小 结

一个正弦量的相量,就是在给定角频率 ω 条件下,用它的有效值(也可用最大值)和初相角两个要素的表征量。在概念上关于相量应明确以下几点。

① 正弦量的相量,用有效值和初相角表示时,称为效相量;用最大值和初相角表示时,称为最大值相量或振幅相量。本课程在教学中是采用有效值相量。因此,不特别说明相量是指有效值相量。

② 正弦量的相量是用有效值的初相角表征的量,它不是时间的函数,而是一个复数。

③ 相量是正弦量的交换量,它与时域正弦函数之间,有确定的对应变换关系,如

$$\sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi) \rightarrow U\angle\varphi \qquad \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi) \rightarrow I\angle\varphi$$

如果正弦量是余弦函数时,它对应的相量形式与正弦函数是相同的,即

$$\sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow U\angle\varphi \qquad \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow I\angle\varphi$$

因此,要区分正弦函数相量与余弦函数相量。在进行电路分析时,必须是相同函数的相量。如果电路中有正弦函数和余弦函数电量时,必须转化为一种函数,如余弦函数的电量,才可以进行分析计算。

④ 相量是时域正弦量变换为频域的变换量,不能把相量误认为是正弦量。

⑤ 相量只能用来进行同频率正弦电源电路的分析计算。

⑥ 非正弦周期函数电量不能用相量来表征。

⑦ 由于电量是复数,可以在复平面上用矢量来表示,即相量图,而且可以按平行四边形法则求相量之和或差。但是,应该明确的是,相量在复平面上是一种几何表示,与物理学中

所介绍的空间矢量的物理内容不同的，应加以区别。

⑧ 进行电路分析，各个元件有相应的相量表达式，表 5-1 可以作为参考。

表 5-1 理想元件的电压与电流关系的瞬时表达式和相量表达式

元　件	瞬时表达式		相量表达式	
电阻	$u=Ri$	$i=Gu$	$\dot{U}=R\dot{I}$	$\dot{I}=G\dot{U}$
电感	$u=L\dfrac{di}{dt}$	$i=\dfrac{1}{L}\int u\,dt$	$\dot{U}=j\omega L\dot{I}$	$\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{j\omega L}$
电容	$u=\dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$i=C\dfrac{du}{dt}$	$\dot{U}=\dfrac{\dot{I}}{j\omega C}$	$\dot{I}=j\omega C\dot{U}$
电压源	u_S		$\dot{U}_S$	
电流源		i_S		$\dot{I}_S$

课后习题

1　若线圈电阻为 50Ω，外加 200V 正弦电压时电流为 2A，则其感抗为(　　)。

A. 50Ω　　B. 70.7Ω　　C. 86.6Ω　　D. 100Ω

2　把一个额定电压为 220V 的灯泡分别接到 220V 的交流电源和直流电源上，灯泡的亮度为(　　)。

A. 相同亮度　　B. 接到直流电源上亮

C. 接到交流电源上亮　　D. 烧毁

3　R、L 串联电路接到 12V 直流电压源时，电流为 2A，接到 12V 正弦电压时，电流为 1.2A，则感抗为(　　)。

A. 4Ω　　B. 8Ω　　C. 10Ω　　D. ∞

4　选择 R、L 串联电路的 u 与 i 为关联参考方向，其 $u=100\sqrt{2}\sin(\omega t+30°)$V，$\dot{I}=2\angle-30°$A，则 R 和 X_L 分别为(　　)。

A. 25Ω 和 −43.3Ω　　B. 25Ω 和 43.3Ω

C. 43.3Ω 和 25Ω　　D. 43.3Ω 和 −25Ω

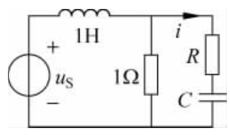
5　图题 5 所示正弦交流电路中，已知 $u_S=U_m\sin\omega t$V，欲使电流 i 为最大，则 C 应等于(　　)。

A. 2F　　B. 1F　　C. ∞　　D. 0

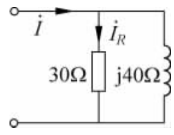
6　图题 6 所示正弦交流电路，已知 $\dot{I}=1\angle0°$A，则图中 $\dot{I}_R$ 为(　　)。

A. 0.8∠53.1°A　　B. 0.6∠53.1°A

C. 0.8∠36.9°A　　D. 0.6∠36.9°A



图题 5



图题 6

7　当 5Ω 电阻与 8.66Ω 感抗串联时,电感电压超前于总电压的相位差为(　　)。

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $-60°$　　D. $-30°$

8　在频率为 f 的正弦电流电路中,一个电感的感抗等于一个电容的容抗。当频率变为 $2f$ 时,感抗为容抗的(　　)。

A. $\frac{1}{4}$倍　　B. $\frac{1}{2}$倍　　C. 4 倍　　D. 2 倍

9　若线圈与电容 C 串联,测得线圈电压 $U_L=50\text{V}$,电容电压 $U_C=30\text{V}$,且在关联参考方向下端电压与电流同相,则端电压为(　　)。

A. 20V　　B. 40V　　C. 80V　　D. 58.3V

10　如 $u=50\sqrt{2}\sin\omega t\,\text{V}$,$i=5\sqrt{2}\cos(\omega t+30°)\text{A}$,则电压与电流的相位差为(　　)。

A. $-30°$　　B. $-120°$　　C. $30°$　　D. $120°$

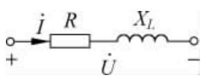
11　电路如图题 11 所示,若 $\dot{U}=(10+\text{j}30)\text{V}$,$\dot{I}=(2+\text{j}2)\text{A}$,则当电压为同频率的 $u=2\sqrt{10}\sin(\omega t+30°)\text{V}$ 时,电流 i 的表达式为(　　)。

A. $0.4\sqrt{2}\sin(\omega t+26.6°)\text{A}$　　B. $0.4\sqrt{2}\sin(\omega t-86.6°)\text{A}$

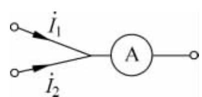
C. $0.4\sqrt{2}\sin(\omega t+3.4°)\text{A}$　　D. $0.2\sqrt{2}\cos(\omega t+3.4°)\text{A}$

12　如图题 12 所示电路中若 $\dot{I}_1=3\sqrt{2}\sin\omega t\,\text{A}$,$\dot{I}_2=4\sqrt{2}\sin(\omega t+90°)\text{A}$,则电流表读数为(　　)。

A. 7A　　B. 9.9A　　C. 1A　　D. 5A



图题 11



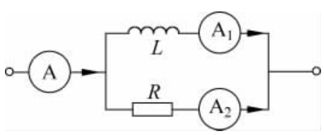
图题 12

13　如图题 13 所示正弦电流电路中,电流表 A_1、A_2 的读数各为 8A、6A,则电流表 A 的读数为(　　)。

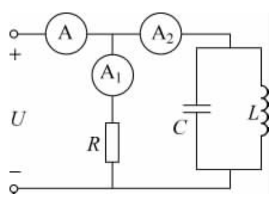
A. 14A　　B. 2A　　C. 10A　　D. −2A

14　如图题 14 所示正弦电流电路中,电流表 A_1 的读数为 4A,A_2 的读数为 3A,则电流表 A 的读数是(　　)。

A. 1A　　B. 5A　　C. 7A　　D. 10A



图题 13



图题 14

15　R、C 并联电路接到 12V 直流电压源时,电源电流为 2.4A,接到 12V 正弦电压时,电源电流为 4A,则容抗为(　　)。

A. 3Ω　　B. 3.75Ω　　C. 5Ω　　D. 7.5Ω

16　选择 R、C 串联电路的 u 与 i 为关联参考方向，其 $u=100\sqrt{2}\sin(\omega t+30^\circ)$V，$\dot{I}=2\angle 60^\circ$A，则 R 和 X_C 分别为（　　）。

A. 25Ω 和－43.3Ω　　B. 25Ω 和 43.3Ω

C. －43.3Ω 和 25Ω　　D. 43.3Ω 和－25Ω

17　当 5Ω 电阻与－8.66Ω 容抗串联时，电容电压落后于总电压的相位差为（　　）。

A. 30°　　B. 60°　　C. －60°　　D. －30°

18　R、L 串联电路两端的电压 $u=50\sqrt{2}\sin 3\omega t$V，$R=8\Omega$，$\omega L=2\Omega$，该电路中电流的有效值为（　　）。

A. 3A　　B. 4A　　C. 5A　　D. 6.06A

19　RLC 串联电路两端的电压 $u=5\sqrt{2}\sin 3\omega t$V，$R=5\Omega$，$\omega L=5\Omega$，$\frac{1}{\omega C}=45\Omega$，该电路中电流的有效值为（　　）。

A. 124mA　　B. 1A　　C. 0.707A　　D. 2A

20　请计算表达式 $10\angle -20^\circ-10\angle 40^\circ$ 等于（　　）。

A. $10\angle -80^\circ$　　B. $10\angle 80^\circ$　　C. $-10\angle 80^\circ$　　D. $10\angle 280^\circ$

21　某正弦电流的频率为 20Hz，有效值为 $5\sqrt{2}$A，在 $t=0$ 时，电流的瞬时值为 5A，且此时刻电流在增加，求该电流的瞬时值表达式。

22　已知复数 $A_1=6+\mathrm{j}8\Omega$，$A_2=4+\mathrm{j}4\Omega$，试求它们的和、差、积、商。

23　试将下列各时间函数用对应的相量来表示。

① $i_1=5\sin(\omega t)$A　　② $i_2=10\sin(\omega t+60^\circ)$A　　③ $i=i_1+i_2$

24　计算下列正弦波的相位差。

① $u=10\sin(314t+45^\circ)$V 和 $i=20\sin(314t-20^\circ)$A

② $u_1=5\sin(60t+10^\circ)$V 和 $u_2=-8\sin(60t+95^\circ)$V

③ $u=5\cos(20t+5^\circ)$V 和 $i=7\sin(30t-20^\circ)$A

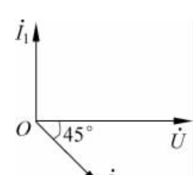
④ $u=5\sin(6\pi t+10^\circ)$V 和 $i=4\cos(6\pi t-15^\circ)$A

⑤ $i_1=-6\sin 4t$A 和 $i_2=-9\cos(4t+30^\circ)$A

25　设 $A=3+\mathrm{j}4$，$B=10\angle 60^\circ$，计算 $A+B$，$A\cdot B$，A/B。

26　在图题 26 中所示的相量图中，已知 $U=220$V，$I_1=10$A，$I_2=5\sqrt{2}$A，它们的角频率是 ω，试写出各正弦量的瞬时值表达式及其相量。

27　220V、50Hz 的电压电流分别加在电阻、电感和电容负载上，此时它们的电阻值、电感值、电容值均为 22Ω，试分别求出三个元件中的电流，写出各电流的瞬时值表达式，并以电压为参考相量画出相量图。若电压的有效值不变，频率由 50Hz 变到 500Hz，重新回答以上问题。



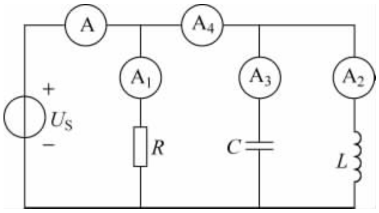
图题 26

28　已知 RC 串联电路的电源频率为 $\frac{1}{(2\pi RC)}$，试问电阻电压相位超前电源电压多少度？

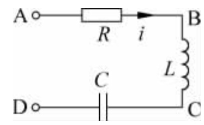
29　已知一段电路的电压 $u=10\sin(10t-20^\circ)$V，电流 $i=5\cos(10t-50^\circ)$A。试问该段电路可能是哪两个元件构成的？并分别求出它们的值。

30　图题 30 所示电路，电流表 A_1：5A，A_2：20A，A_3：25A，求电流表 A 和 A_4 的读数。

31　正弦交流电路如图题31所示,用交流电压表测得$U_{AD}=5V$,$U_{AB}=3V$,$U_{CD}=6V$,试问U_{DB}是多少?



图题30



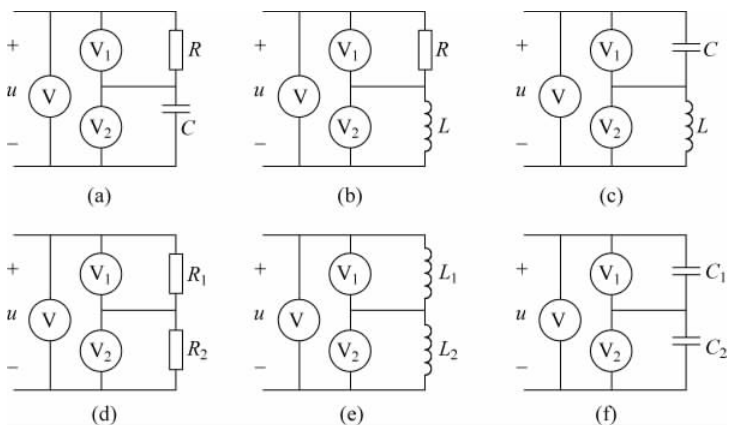
图题31

32　某一元件的电压、电流(关联方向)分别为下述4种情况时,它可能是什么元件?

① $\begin{cases} u=10\cos(10t+45^\circ)\text{V} \\ i=2\sin(10t+135^\circ)\text{A} \end{cases}$　　② $\begin{cases} u=-10\cos t\text{V} \\ i=-\sin t\text{A} \end{cases}$

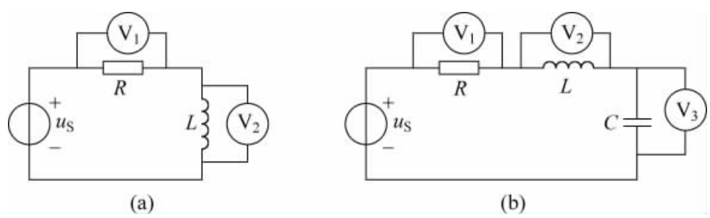
③ $\begin{cases} u=10\sin(100t)\text{V} \\ i=2\cos(100t)\text{A} \end{cases}$　　④ $\begin{cases} u=10\cos(314t+45^\circ)\text{V} \\ i=2\cos(314t)\text{A} \end{cases}$

33　图题33电路,已知电压表V_1:3V,V_2:4V,分别求电压表V的读数。



图题33

34　图题34电路,已知图(a)中电压表V_1:30V,V_2:60V;图(b)中电压表V_1:15V,V_2:80V,V_3:100V;求电源u_S的有效值U_S。



图题34

35　已知 $i_1(t)=\sqrt{2}I\sin 314t\,\text{A}$，$i_2(t)=-\sqrt{2}I\sin(314t+120^\circ)\,\text{A}$，求 $i_3(t)=i_1(t)+i_2(t)$。

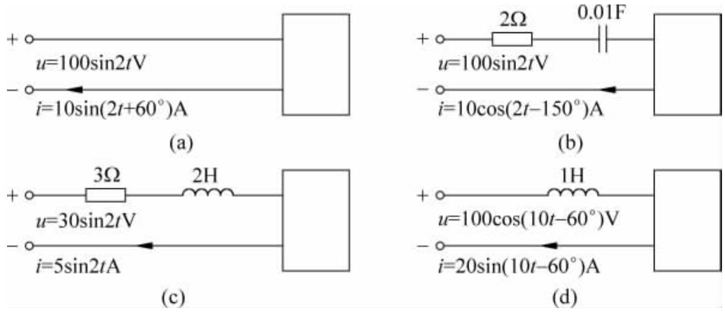
36　电感电压为 $u(t)=80\sin(1000t+105^\circ)\,\text{V}$，若 $L=0.02\text{H}$，求电感电流 $i(t)$。

37　已知元件 A 为电阻或电容，若其两端电压、电流各为如下列情况所示，试确定元件的参数 R、L、C。

① $u(t)=300\sin(1000t+45^\circ)\,\text{V}$，$i(t)=60\sin(1000t+45^\circ)\,\text{A}$

② $u(t)=250\sin(200t+50^\circ)\,\text{V}$，$i(t)=0.5\sin(200t+140^\circ)\,\text{A}$

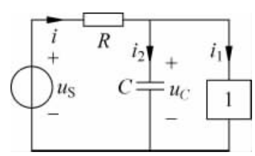
38　电路如图题 38 所示，试确定方框内最简单组合的元件值。



图题 38

39　RLC 串联电路中 $R=1\Omega$，$L=0.01\text{H}$，$C=1\mu\text{F}$。则输入阻抗与频率 ω 的关系是什么？

40　已知图题 40 中 $u_S=25\sqrt{2}\cos(10^6t-126.87^\circ)\,\text{V}$，$u_C=20\sqrt{2}\cos(10^6t-90^\circ)\,\text{V}$，$R=3\Omega$，$C=0.2\mu\text{F}$。求：①各支路电流；②框 1 可能是什么元件？



图题 40