PART 1

第一部分

百题精讲精练

专题一 数 与 式

001 定义新运算

典型例题

例 001.(13定西)现定义运算“★”,对于任意实数 a,b,都有 $a★b=a^2-3a+b$,如:$3★5=3^2-3\times3+5$.若 $x★2=6$,则实数 x 的值是________.

【解析】

$\because a★b=a^2-3a+b$,

$\therefore x★2=x^2-3x+2=6$,即 $x^2-3x-4=0$,解得 $x_1=4$,$x_2=-1$,

则实数 x 的值是 -1 或 4.

故答案为:-1 或 4.

【总结】 根据新定义表示出 $x★2$,即可建立等量关系求出 x 的值.

拓展延伸

“新定义”问题,主要是指在问题中定义了初中数学中没有学过的一些新概念、新运算、新符号,要求学生读懂题意并结合已有知识、能力进行理解,根据新定义进行运算、推理、迁移的一种题型.

常见的定义新运算有以下几种.

(1)在平面直角坐标系中,对于平面内任意一点 (x,y),规定以下两种变换.

① $f(x,y)=(y,x)$.如 $f(2,3)=(3,2)$.

② $g(x,y)=(-x,-y)$,如 $g(2,3)=(-2,-3)$.

(2)规定符号 $[m]$ 表示一个实数 m 的整数部分,例如:$\left[\frac{2}{3}\right]=0$,$[3.14]=3$.

(3)现定义运算“★”,对于任意实数 a,b,都有 $a★b=a^2-3a+b$.

(4)对于实数 a,b,定义运算“$*$”:$a*b=\begin{cases}a^2-ab(a\geqslant b)\\ ab-b^2(a<b)\end{cases}$.

(5)对于点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,定义一种运算:$A\oplus B=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)$.例如:$A(-5,4)$,$B(2,-3)$,$A\oplus B=(-5+2)+(4-3)=-2$.

(6)对非负实数 x“四舍五入”到个位的值记为 $<x>$,即当 n 为非负整数时,若 $n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2}$,则 $<x>=n$,例如:$<0.46>=0$,$<3.67>=4$.

（7）对于实数 a,b，定义一种运算“$\otimes$”为：$a\otimes b=a^2+ab-2$.

（8）定义符号 $\min\{a,b\}$ 的含义为：当 $a\geqslant b$ 时，$\min\{a,b\}=b$；当 $a<b$ 时，$\min\{a,b\}=a$. 例如：$\min\{1,-3\}=-3$，$\min\{-4,-2\}=-4$.

举一反三

001.（16 岳阳）对于实数 a,b，我们定义符号 $\max\{a,b\}$ 的意义为：当 $a\geqslant b$ 时，$\max\{a,b\}=a$；当 $a<b$ 时，$\max\{a,b\}=b$. 例如：$\max\{4,-2\}=4$，$\max\{3,3\}=3$. 若关于 x 的函数为 $y=\max\{x+3,-x+1\}$，则该函数的最小值是（　　）.

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

002　与高中知识点有关的新定义问题

典型例题

例 002.（14 常德）阅读理解：如图 1.1.1 所示，在平面内选一定点 O，引一条有方向的射线 Ox，再选定一个单位长度，那么平面上任一点 M 的位置可由 $\angle MOx$ 的度数 θ 与 OM 的长度 m 确定，有序数对 (θ,m) 称为 M 点的“极坐标”，这样建立的坐标系称为“极坐标系”.

应用：在图 1.1.2 的极坐标系下，如果正六边形的边长为 2，有一边 OA 在射线 Ox 上，则正六边形的顶点 C 的极坐标应记为（　　）.

A.（60°，4）　　B.（45°，4）　　C.（60°，$2\sqrt{2}$）　　D.（50°，$2\sqrt{2}$）

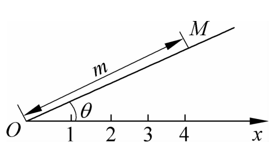


图　1.1.1

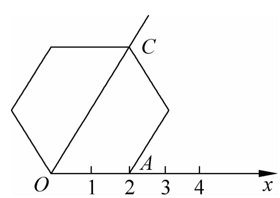


图　1.1.2

【解析】

如图 1.1.3 所示，设正六边形的中心为 D，连接 AD.

$\because \angle ADO=360°\div 6=60°$，$OD=AD$，

$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形，$\therefore OD=OA=2$，$\angle AOD=60°$，

$\therefore OC=2OD=2\times 2=4$，

$\therefore$ 正六边形的顶点 C 的极坐标应记为（60°，4）.

故答案为：A.

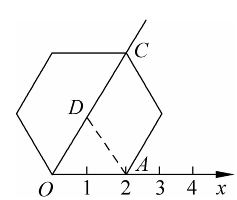


图　1.1.3

【总结】　根据题意，求出 $\angle AOC$ 的度数与 OC 的长度，即可表示出点 C 的极坐标.

拓展延伸

常见的与高中知识点有关的新定义问题有以下几种.

(1) 我们知道,一元二次方程 $x^2=-1$ 没有实数根,即不存在一个实数的平方等于-1.若我们规定一个新数“i”,使其满足 $i^2=-1$(即方程 $x^2=-1$ 有一个根为 i),并且进一步规定:一切实数可以与新数进行四则运算,且原有运算律和运算法则仍然成立,于是有 $i^1=i, i^2=-1, i^3=i^2\cdot i=-i, i^4=(i^2)^2=1$.

(2) 一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体称为集合.一个给定集合中的元素是互不相同的,也就是说,集合中的元素是不重复出现的.如一组数 1,1,2,3,4 就可以构成一个集合,记为 $A=\{1,2,3,4\}$.

类比实数有加法运算,集合也可以“相加”.集合 A 与集合 B 中的所有元素组成的集合称为集合 A 与集合 B 的和,记为 $A+B$.

(3) 规定:$\sin(-x)=-\sin x, \cos(-x)=\cos x, \sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$.

(4) 一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列(arrangement).

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示.公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m-1)$,这里,$n,m\in\mathbf{N}^*$,并且 $m\leqslant n$,这个公式叫作排列数公式.

(5) 正整数 1 到 n 的连乘积,叫作 n 的阶乘,用 $n!$ 表示.n 个不同元素的全排列数公式可以写成 $A_n^n=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$.另外规定 $0!=1$.

(6) 一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素合成一组,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合(combination).

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同组合的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示.公式 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m-1)}{m!}$,这里,$n,m\in\mathbf{N}^*$,并且 $m\leqslant n$,这个公式叫作组合数公式.

举一反三

002.(13 永州)我们知道,一元二次方程 $x^2=-1$ 没有实数根,即不存在一个实数的平方等于-1.若我们规定一个新数“i”,使其满足 $i^2=-1$(即方程 $x^2=-1$ 有一个根为 i).并且进一步规定:一切实数可以与新数进行四则运算,且原有运算律和运算法则仍然成立,于是有 $i^1=i, i^2=-1, i^3=i^2\cdot i=-i, i^4=(i^2)^2=1$.从而对于任意正整数 n,我们可以得到 $i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=(i^4)^n\cdot i=i$,同理可得 $i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i^{4n}=1$.那么 $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{2012}+i^{2013}$ 的值为( ).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. i

003　定义新概念

典型例题

例 003.（14 泰州）如果三角形满足一个角是另一个角的 3 倍，那么我们称这个三角形为“智慧三角形”. 下列各组数据中，能作为一个智慧三角形三边长的一组是（　　）.

A. 1，2，3　　B. 1，1，$\sqrt{2}$　　C. 1，1，$\sqrt{3}$　　D. 1，2，$\sqrt{3}$

【解析】

（1）∵$1+2=3$，不能构成三角形，故选项 A 错误.

（2）∵$1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$，是等腰直角三角形，故选项 B 错误.

（3）∵底边上的高是 $\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，可知是顶角 120°，底角 30°的等腰三角形，故选项 C 错误.

（4）∵$1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$，易得该三角形是三个角分别是 90°，60°，30°的直角三角形，其中 $90°\div30°=3$，符合“智慧三角形”的定义，故选项 D 正确.

故答案为：D.

【总结】 根据三角形三边的大小关系得到角的关系，需要利用特殊三角形三边的关系求出对应三角形的角度. 本题可以使用排除法逐一排除错误的答案.

拓展延伸

常见的定义新概念问题有以下几种.

（1）在△ABC 中，P 是 AB 上的动点（P 异于 A，B），过点 P 的直线截△ABC，使截得的三角形与△ABC 相似，我们不妨称这种直线为过点 P 的△ABC 的相似线，简记为 $P(l_x)$（x 为自然数）.

（2）定义：直线 l_1 与 l_2 相交于点 O，对于平面内任意一点 M，点 M 到直线 l_1，l_2 的距离分别为 p，q，则称有序实数对（p，q）是点 M 的“距离坐标”.

（3）连接一个几何图形上任意两点间的线段中，最长的线段称为这个几何图形的直径.

（4）当三角形中一个内角 α 是另一个内角 β 的两倍时，我们称此三角形为“特征三角形”，其中 α 称为“特征角”.

（5）如图 1.1.4 所示，在 10×10 的网格中，每个小方格都是边长为 1 的小正方形，每个小正方形的顶点称为格点. 若抛物线经过图中的三个格点，则以这三个格点为顶点的三角形称为抛物线的“内接格点三角形”.

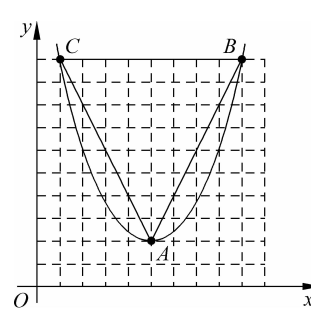


图　1.1.4

(6) 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x,y)$，我们把点 $P'(-y+1,x+1)$ 叫作点 P 的“伴随点”.

(7) 如果三角形满足一个角是另一个角的 3 倍，那么我们称这个三角形为“智慧三角形”.

(8) 对于平面直角坐标系中任意两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，称 $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为 P_1，P_2 两点的直线距离.

(9) 统计学规定：某次测量得到 n 个结果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，当函数 $y=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ 取最小值时，对应 x 的值称为这次测量的“最佳近似值”.

(10) 已知点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且它到三角形的三个顶点距离之和最小，则 P 点叫作 $\triangle ABC$ 的费马点(Fermat point). 已经证明：在三个内角均小于 $120°$ 的 $\triangle ABC$ 中，当 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120°$ 时，P 就是 $\triangle ABC$ 的费马点.

举一反三

003. (16 常德)平面直角坐标系中有两点 $M(a,b)$，$N(c,d)$，规定 $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$，则称点 $Q(a+c,b+d)$ 为 M，N 的“和点”. 若以坐标原点 O 与任意两点及它们的“和点”为顶点能构成四边形，则称这个四边形为“和点四边形”. 现有点 $A(2,5)$，$B(-1,3)$，若以 O，A，B，C 四点为顶点的四边形是“和点四边形”，则点 C 的坐标是________.

004 流 程 图

典型例题

例 004. (13 湘潭)根据图 1.1.5 所示程序计算，若输入 $x=\sqrt{3}$，则输出结果为________.

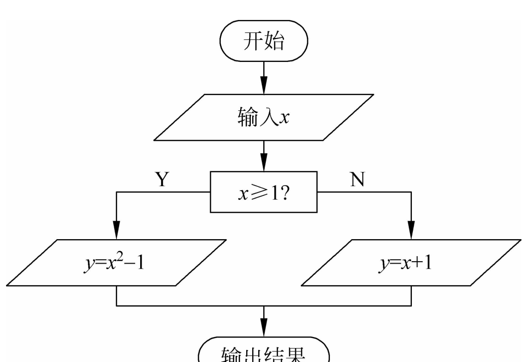


图 1.1.5

【解析】

$\because x=\sqrt{3}>1$，$\therefore y=(\sqrt{3})^2-1=3-1=2$.

故答案为：2.

【总结】 从上至下观察流程图，了解整个流程，通过判定“$x\geqslant 1$”是否成立，得到相应的结论.

拓展延伸

> 流程图（程序框图）是一种用规定的图形、指向线及文字说明来准确、直观地表示算法的图形.

举一反三

004.（16 青岛）输入一组数据，按图 1.1.6 所示的程序进行计算，输出结果如表 1.1.1 所示.

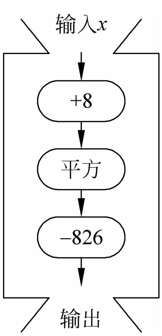


图　1.1.6

表　1.1.1

x	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9
输出	-13.75	-8.04	-2.31	3.44	9.21

分析表格中的数据，估计方程$(x+8)^2-826=0$ 的一个正数解 x 的大致范围为（　　）.

A. $20.5<x<20.6$　　　　B. $20.6<x<20.7$

C. $20.7<x<20.8$　　　　D. $20.8<x<20.9$

005　等差数列

典型例题

例 005.（13 遂宁）为庆祝“六一”儿童节，某幼儿园举行用火柴棒摆“金鱼”比赛. 如图 1.1.7 所示. 按照图中的规律，摆第(n)个图，需用火柴棒的根数为________.

【解析】

第(1)个图形有 8 根火柴棒，第(2)个图形有 14 根火柴棒，第(3)个图形有 20 根火柴棒，…，第(n)个图形有 $6n+2$ 根火柴棒.

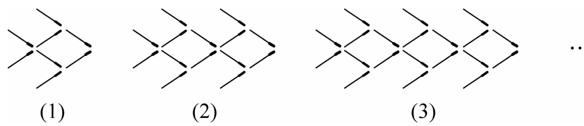


图 1.1.7

故答案为：$6n+2$.

【总结】 观察图形，得出火柴棒的数目，发现相邻两个图形增加 6 根火柴棒，可得这是等差数列的规律. 利用高中数学中等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $a_n=8+6(n-1)=6n+2$.

拓展延伸

按照一定顺序排列着的一列数称为数列(sequence of number)，数列中的每一个数叫作这个数列的项. 数列中的每一项都和它的序号有关，排在第 1 位的数称为这个数列的第 1 项(通常也叫作首项)，排在第 2 位的数称为这个数列的第 2 项，…，排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项. 所以，数列的一般形式可以写成

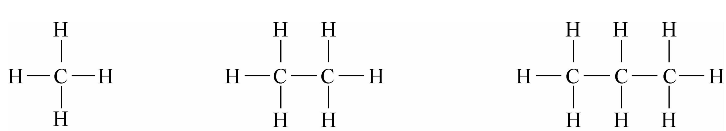
$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

简记为 $\{a_n\}$. 项数有限的数列叫作有穷数列，项数无限的数列叫作无穷数列.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列(arithmetic sequence)，这个常数叫作等差数列的公差(common difference)，公差通常用字母 d 表示.

举一反三

005. (13 崇左)如图 1.1.8 所示是三种化合物的结构式及分子式. 请按其规律，写出后面第 2013 种化合物的分子式________.



CH_4 C_2H_6 C_3H_8

图 1.1.8

006 等差数列求和

典型例题

例 006. (13 昭通)图 1.1.9 中每一个小方格的面积为 1，则可根据面积计算得到如

下算式：$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$________(用 n 表示，n 是正整数).

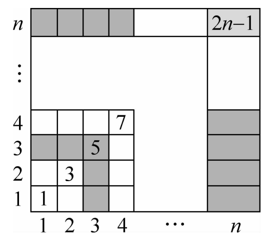


图　1.1.9

【解析】

利用每个小方格的面积为 1，可以得出：

$1+3=4=2^2$，$1+3+5=9=3^2$，$1+3+5+7=16=4^2$，…，$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$.

故答案为：n^2.

【总结】　本题利用正方形的面积来求等差数列的前 n 项和.通过观察易发现，从每个数字开始分别往左往下数，得到的正方形数目恰好等于这个数字，易得所有正方形的面积恰好等于所有正方形的个数.根据面积公式即可求出题目中算式的值.本题也可以利用高中等差数列的前 n 项和的公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，代入得出结论.

举一反三

006.(16 安顺)观察下列砌钢管的横截面(见图 1.1.10).

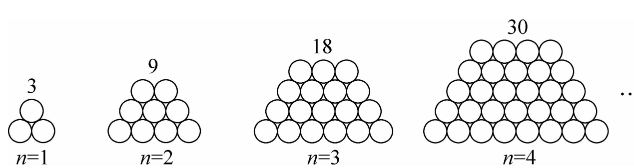


图　1.1.10

则第 n 个图的钢管数是________(用含 n 的式子表示).

007　等比数列

典型例题

例 007.已知一列数 2，8，26，80，…，按此规律，则第 n 个数是________.(用含 n 的代数式表示)

【解析】

已知一列数 2，8，26，80，…，按此规律，则第 n 个数是 3^n-1.

故答案为：3^n-1.

【总结】 通过观察 $8-2=6$，$26-8=18$，$80-26=54$，发现这些差都是 3 的倍数，易发现这个规律和等比数列有关系，且 $2+1=3$，$8+1=9$，以此类推，可得第 n 个数是 3^n-1.

拓展延伸

> 一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫作等比数列(geometric sequence)，这个常数叫作等比数列的公比(common ratio)，公比通常用字母 q 表示($q\neq0$).

举一反三

007.（16 内江）一组正方形按如图 1.1.11 所示的方式放置，其中顶点 B_1 在 y 轴上，顶点 C_1，E_1，E_2，C_2，E_3，E_4，C_3，…在 x 轴上，已知正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，$\angle B_1C_1O=60°$，$B_1C_1\parallel B_2C_2\parallel B_3C_3$，…则正方形 $A_{2016}B_{2016}C_{2016}D_{2016}$ 的边长是(　　).

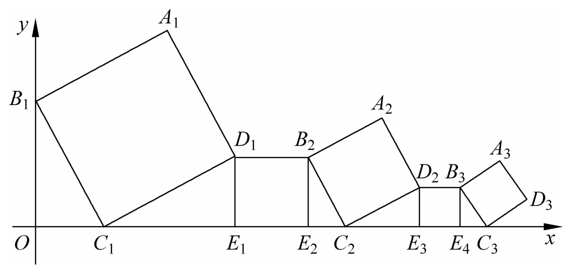


图 1.1.11

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}$　　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2016}$　　C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2016}$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2015}$

008 等比数列求和

典型例题

例 008. 为了求 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$ 的值，可令 $S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$，则 $2S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{101}$，因此 $2S-S=2^{101}-1$，所以 $S=2^{101}-1$，即 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}=2^{101}-1$，仿照以上推理计算 $1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{2014}$ 的值是________.

【解析】

设 $S=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{2014}$. ①