第 5 章　相量法基础

5.1　知识点概要

正弦电路分析
- 理论——相量基尔霍夫定律
  - 相量基尔霍夫电流定律 KCL，$\sum \dot{I} = 0$—— 满足电荷守恒
  - 相量基尔霍夫电压定律 KVL，$\sum \dot{U} = 0$—— 满足能量守恒
- 电路元件
  - 电阻器：电阻用 R 表示，单位欧姆(Ω)；电导：用 G 表示，单位西门子(S)
  - 电感器：感抗用 $\mathrm{j}\omega L$ 表示，单位欧姆(Ω)；其倒数称为感纳，单位西门子(S)
  - 电容器：容抗用 $1/\mathrm{j}\omega C$ 表示，单位欧姆(Ω)；其倒数称为容纳，单位西门子(S)
  - 电压源：电压恒定或时间函数，电流可任意值
  - 电流源：电流恒定或时间函数，电压可任意值
- 物理量
  - 电压：用 $\dot{U}$ 表示，单位伏特(V)
  - 电流：用 $\dot{I}$ 表示，单位安倍(A)
  - 电功率：瞬时功率、有功功率、无功功率等
  - 能量：表示有功功率发生变化的度量，单位焦耳(J)

1. 正弦量

电路中按正弦规律变化的电压或电流，统称为正弦量。例如正弦电流 i，在规定的参考方向下，其数学表达式定义为

$$i = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_i) \quad 或 \quad i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

其中的 3 个常数 I_{m}、ω 和 φ_i 称为正弦量的三要素。I_{m} 称为正弦量的振幅。正弦量是一个等幅振荡的、正负交替变化的周期函数，振幅是正弦量在整个振荡过程中达到的最大值，即 $\cos(\omega t+\varphi_i)=1$ 时，有 $i_{\max}=I_{\mathrm{m}}$，这也是正弦量的极大值。当 $\cos(\omega t+\varphi_i)=-1$ 时，将有最小值(也是极小值)$i_{\min}=-I_{\mathrm{m}}$。

随时间变化的角度$(\omega t+\varphi_i)$称为正弦量的相位，或称相角。ω 称为正弦量的角频率，它是正弦量的相位随时间变化的角速度，即 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t+\varphi_i)$，单位为 rad/s(弧度每秒)。它与正弦量的周期 T 和频率 f 之间的关系为

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

频率 f 的单位为赫兹(Hz)。我国工业用电的频率为 50Hz。

φ_i 是正弦量在 $t=0$ 时刻的相位，称为正弦量的初相位(角)，简称初相，即$(\omega t+\varphi_i)|_{t=0}=\varphi_i$，初相的单位用弧度或度表示，通常在主值范围内取值，即$|\varphi_i|\leqslant 180°$。初相与计时零点的确定有关。对任一正弦量，初相是允许任意指定的，但对于一个电路中的许多相关的正弦量，它们只能相对于一个共同的计时零点确定各自的相位。正弦量的三要素是正弦量之间进行比较和区分的依据。

2. 相位差

电路中常引用“相位差”的概念描述两个同频正弦量之间的相位关系。例如，设两个同频正弦电流 i_1、电压 u_2 分别为 $i_1=\sqrt{2}I_1\cos(\omega t+\varphi_{i1})$，$u_2=\sqrt{2}U_2\cos(\omega t+\varphi_{u2})$。

两个同频正弦量的相位差等于它们相位相减的结果。如设 φ_{12} 表示电流 i_1 与电压 u_2 之间的相位差，则有 $\varphi_{12}=(\omega t+\varphi_{i1})-(\omega t+\varphi_{u2})=\varphi_{i1}-\varphi_{u2}$。

相位差也是在主值范围内取值。上述结果表明：同频正弦量的相位差等于它们的初相之差，为一个与时间无关的常数。电路常采用“超（越）前”和“滞（落）后”等概念来说明两个同频正弦量相位比较的结果。

当 $\varphi_{12}>0$，称为 i_1 超前 u_2；$\varphi_{12}<0$，称 i_1 滞后 u_2；当 $\varphi_{12}=0$，称 i_1 和 u_2 同相；当 $|\varphi_{12}|=\pi/2$，称 i_1 与 u_2 正交；当 $|\varphi_{12}|=\pi$，称 i_1 与 u_2 彼此反相。

3. 有效值

工程中常将周期电流或电压在一个周期内产生的平均效应换算为在效应上与之相等的直流量，以衡量和比较周期电流或电压的效应，这一直流量就称为周期量的有效值，用相对应的大写字母表示。可通过比较电阻的热效应获得周期电流 i 与其有效值 I 之间的关系，有效值 I 定义为

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}$$

上式表示：周期量的有效值等于其瞬时值的平方在一个周期内积分的平均值再取平方根，因此有效值又称为均方根值。上式的定义是周期量有效值普遍适用的公式。当电流 i 是正弦量时，可以推出正弦量的有效值与正弦量的振幅之间的特殊关系。此时有

$$I = I_{\mathrm{m}}/\sqrt{2} = 0.707I_{\mathrm{m}}$$

所以正弦量的有效值与其最大值之间有 $\sqrt{2}$ 关系，但是，正弦量的有效值与正弦量的频率和初相无关。根据这一关系常将正弦量 i 改写成如下的形式

$$i = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

其中，I、ω、φ_i 也可用来表示正弦量的三要素，电压也有相同关系。

4. 相量

设正弦电流 i 为

$$i = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

正好对应复数的实部，即

$$i = \mathrm{Re}(I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

而如果设正弦电流 i 为：

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

正好对应复数的虚部，即

$$i = \mathrm{Im}(I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}) = \mathrm{Im}(\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

对应的相量定义为

$$\dot{I} \overset{\text{def}}{=} I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = I\angle\varphi_i \text{（有效值相量）}$$

字母 I 上的小圆点表示这一复常数与正弦量关联的特殊身份，同时也区别于电流、电压

的有效值。相量是以正弦量的有效值为模,以初相为辐角的一个复常数。正弦量的相量可直接根据正弦量的表达式按定义写出。正弦电压同正弦电流说明。

5. 相量图

相量是一个复数,它在复平面上表示的图形称为相量图。

6. 理想元件的电压与电流关系相量表达式

进行电路分析时,各个元件有相应的相量表达式,表5-1可以作为参考。

表5-1 理想元件电压、电流、功率的关系相量表达式

元件	相量表达式		有功功率	无功功率
电阻	$\dot{U}=R\dot{I}$	$\dot{I}=G\dot{U}$	U^2/R 或 I^2R	0
电感	$\dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$	$\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega L}$	0	$\dfrac{U^2}{X_L}$ 或 I^2X_L
电容	$\dot{U}=\dfrac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega C}$	$\dot{I}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}$	0	$\dfrac{-U^2}{X_C}$ 或 $-I^2X_C$

其中:$X_L=\omega L$,表示感抗;$X_C=1/\omega C$,表示容抗;用 X 表示电抗;单位欧姆(Ω)。
$B_L=1/\omega L$,表示感纳;$B_C=\omega C$,表示容纳;用 B 表示电纳;单位西门子(S)。

7. 瞬时功率

设 $u=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$,$i=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)$,则 $p=ui$ 直接用三角函数求解。

8. 基尔霍夫定律的相量形式

正弦交流电路中,通过任一结点电流相量的代数和等于零,即 $\sum\dot{I}=0$。

正弦交流电路中,任一闭合回路电压相量的代数和等于零,即 $\sum\dot{U}=0$。

5.2 学习指导

本章的关键是瞬时电压、电流的表达式,相量电压电流的表达式,以及它们的互相转换关系。需要理解的是,$i(t)\neq\dot{I}$,即瞬时电压、电流不等于相量电压、电流,但可以等效转换,转换关系如下。

欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi,\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}=\cos\varphi-\mathrm{j}\sin\varphi$$

电流

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}),\quad 其中\quad \dot{I}=I\angle\varphi_i$$

电压

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}),\quad 其中\quad \dot{U}=U\angle\varphi_u$$

或电流

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}),\quad 其中\quad \dot{I}=I\angle\varphi_i$$

或电压

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}),\quad 其中\quad \dot{U}=U\angle\varphi_u$$

进行相量加、减运算时，需要把相量转化为代数式来计算

$$I\angle\varphi_i = I\cos\varphi_i + \mathrm{j}I\sin\varphi_i$$

进行相量乘、除运算时，需要把相量转化为极坐标式来计算。

$$a + \mathrm{j}b = |F|\angle\varphi$$

其中

$$|F| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

进行相量微分、积分运算时，必须利用上述公式来解答。

电流微分

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\dot{I}\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{I}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

微分相量为 $\omega\dot{I}$ 。

电流积分

$$\int i\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\dot{I}\int\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\dot{I}\,\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

积分相量为$\frac{1}{\omega}\dot{I}$ 。

电压的微分和积分用同样方法求出。

5.3 课后习题分析

1. 若线圈电阻为50Ω，外加200V正弦电压时电流为2A，则其感抗为(　　)。

A. 50Ω　　B. 70.7Ω　　C. 86.6Ω　　D. 100Ω

答：C。把线圈看成是电感和电阻的串联，这样阻抗为 $50 + \mathrm{j}X_L$，求感抗 X_L，即 $50^2 + X_L^2 = (200/2)^2$。

2. 把一个额定电压为220V的灯泡分别接到220V的交流电源和直流电源上，灯泡的亮度为(　　)。

A. 相同亮度　　B. 接到直流电源上亮

C. 接到交流电源上亮　　D. 烧毁

答：A。交流电的有效值是根据相同时间直流电消耗能量相等的原则推导出来的，所以它们有相同亮度。

3. RL串联电路接到12V直流电压源时，电流为2A，接到12V正弦电压时，电流为1.2A，则感抗为(　　)。

A. 4Ω　　B. 8Ω　　C. 10Ω　　D. ∞

答：B。RL串联电路接直流电时，电感相当于短路，因此电阻 $R=12/2\Omega=6\Omega$；接正弦电时阻抗为 $6+\mathrm{j}X_L$，求感抗 X_L，即 $6^2+X_L^2=(12/1.2)^2$。

4. 选择RL串联电路的 u 与 i 为关联参考方向，$u=100\sqrt{2}\sin(\omega t+30^\circ)$V，$\dot{I}=2\angle-30^\circ$A，则 R 和 X_L 分别为(　　)。

A. 25Ω和−43.3Ω　　B. 25Ω和43.3Ω　　C. 43.3Ω和25Ω　　D. 43.3Ω和−25Ω

答：B。已知$\dot{U}=100\angle 30°\text{V}$，所以$R+\text{j}X_L=\dot{U}/\dot{I}=50\angle 60°(\Omega)=25+\text{j}25\sqrt{3}\,\Omega$。

5. 图 5-1 所示正弦交流电路中，已知 $u_S=U_m\sin\omega t\,\text{V}$，欲使电流 i 为最大，则 C 应等于(　　)。

A. 2F　　B. 1F　　C. ∞　　D. 0

答：C。当电容 C 为∞时，其阻抗为零，相当于电容短路，此时相对来说，电流 i 将达到最大值。

6. 如图 5-2 所示正弦交流电路，已知$\dot{I}=1\angle 0°\text{A}$，则图中$\dot{I}_R$为(　　)。注：cos53.13°=0.6

A. $0.8\angle 53.1°\text{A}$　　B. $0.6\angle 53.1°\text{A}$　　C. $0.8\angle 36.9°\text{A}$　　D. $0.6\angle 36.9°\text{A}$

答：C。可用分流法求解，$\dot{I}_R=\dfrac{\text{j}40}{30+\text{j}40}\dot{I}=0.8\angle 36.87°\text{A}$。

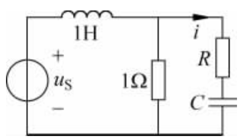

图 5-1　题 5 图

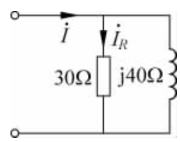

图 5-2　题 6 图

7. 当 5Ω 电阻与 8.66Ω 感抗串联时，电感电压超前于总电压的相位差为(　　)。

A. 30°　　B. 60°　　C. −60°　　D. −30°

答：A。对于串联电路，可用分压法来分析，即电感电压相量与总电压相量的比值为

$$\frac{\text{j}8.66}{5+\text{j}8.66}=\frac{\text{j}\sqrt{3}}{1+\text{j}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\angle 90°}{2\angle 60°}=\frac{\sqrt{3}}{2}\angle 30°$$

8. 在频率为 f 的正弦电流电路中，一个电感的感抗等于一个电容的容抗。当频率变为 $2f$ 时，感抗为容抗的(　　)。

A. 1/4　　B. 1/2　　C. 4 倍　　D. 2 倍

答：C。感抗与频率成正比，容抗与频率成反比；使用频率放大 2 倍，感抗放大 2 倍，而容抗缩小 2 倍；因此当频率变为 $2f$ 时，感抗为容抗的 4 倍。

9. 若线圈与电容 C 串联，测得线圈电压 $U_L=50\text{V}$，电容电压 $U_C=30\text{V}$，且在关联参考方向下端电压与电流同相，则端电压为(　　)。

A. 20V　　B. 40V　　C. 80V　　D. 58.3V

答：B。把线圈看成是电感和电阻的串联，在关联参考方向下端电压与电流同相，表示总阻抗等效为电阻，即感抗与容抗之和为零；也就是说电感的电压与电容电压相等，都是 30V，但互相抵消；因此线圈电压就是电阻电压：$(\sqrt{50^2-30^2})\text{V}=40\text{V}$。

10. 如果 $u=50\sqrt{2}\sin\omega t\,\text{V}$，$i=5\sqrt{2}\cos(\omega t+30°\text{A})$，则电压与电流的相位差为(　　)。

A. −30°　　B. −120°　　C. 30°　　D. 120°

答：B。利用相量法求相位差直接用除法即可，$\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{50\angle -90°}{5\angle 30°}=10\angle -120°$

11. 电路如图 5-3 所示，若$\dot{U}=(10+\text{j}30)\text{V}$，$\dot{I}=(2+\text{j}2)\text{A}$，则当电压为同频率的 $u=$

$2\sqrt{10}\sin(\omega t+30°)$V 时，电流 i 的表达式为(　　)。

A. $0.4\sqrt{2}\sin(\omega t+26.6°)$A　　B. $0.4\sqrt{2}\sin(\omega t-86.6°)$A

C. $0.4\sqrt{2}\sin(\omega t+3.4°)$A　　D. $0.2\sqrt{2}\cos(\omega t+3.4°)$A

答：C。先求出阻抗

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{10+\mathrm{j}30}{2+\mathrm{j}2}\Omega=10+\mathrm{j}5\Omega$$

当电压改变后

$$\dot{I}=\frac{2\sqrt{5}\angle 30°}{10+\mathrm{j}5}\mathrm{A}=\frac{2\sqrt{5}\angle 30°}{5\sqrt{5}\angle 26.6°}\mathrm{A}=0.4\angle 3.4°\mathrm{A}$$

12. 图 5-4 所示电路中若 $i_1=3\sqrt{2}\sin\omega t$A，$i_2=4\sqrt{2}\sin(\omega t+90°)$A，则电流表读数为(　　)。

A. 7A　　B. 9.9A　　C. 1A　　D. 5A

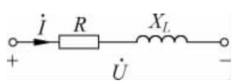

图 5-3　题 11 图

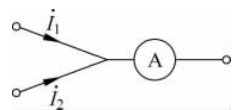

图 5-4　题 12 图

答：D。电流 I_1 的有效值为 3A，电流 I_2 的有效值为 4A，它们相差 90°，因此叠加后电流的有效值为($\sqrt{3^2+4^2}$)A=5A。

13. 图 5-5 所示正弦电流电路中，电流表 A_1、A_2 的读数分别为 8A、6A，则电流表 A 的读数为(　　)。

A. 14A　　B. 2A　　C. 10A　　D. −2A

答：C。电阻与电感并联，即它们两端电压相同，而电阻电流与电压同相，电感电流落后电压 90°，所以总电流有效值为 $\sqrt{6^2+8^2}$A=10A。

14. 图 5-6 所示正弦电流电路中，电流表 A_1 的读数为 4A，A_2 的读数为 3A，则电流表 A 的读数是(　　)。

A. 1A　　B. 5A　　C. 7A　　D. 10A

答：B。电感与电容并联后，可以等效为一个电感或一个电容，等效后再与电阻并联，则电流相差±90°，所以总电流有效值为 $\sqrt{4^2+3^2}$A=5A。

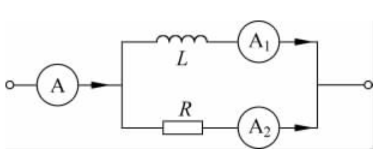

图 5-5　题 13 图

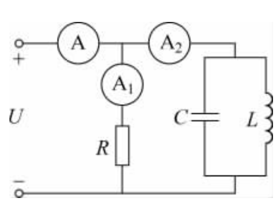

图 5-6　题 14 图

15. RC 并联电路接到 12V 直流电压源时，电源电流为 2.4A，接到 12V 正弦电压时，电

源电流为4A,则容抗为(　　)。

A. 3Ω　　B. 3.75Ω　　C. 5Ω　　D. 7.5Ω

答:B。接直流电时,电容相当于开路,所以电导 $G=2.4/12=0.2\text{S}$;接到正弦电时,导纳为 $0.2+\text{j}B_C$,求容纳 B_C,即 $0.2^2+B_C^2=(4/12)^2$,解得 $B_C=4/15(\text{S})$,故容抗 $X_C=3.75\Omega$。

16. 选择RC串联电路的 u 与 i 为关联参考方向,其 $u=100\sqrt{2}\sin(\omega t+30°)\text{V}$,$\dot{I}=2\angle 60°\text{A}$,则 R 和 X_C 分别为(　　)。

A. 25Ω和−43.3Ω　　B. 25Ω和43.3Ω

C. −43.3Ω和25Ω　　D. 43.3Ω和−25Ω

答:D。已知

$$\dot{U}=100\angle 30°\text{V}$$

所以

$$R+\text{j}X_C=\dot{U}/\dot{I}=50\angle -30°\Omega=25\sqrt{3}-\text{j}25\Omega$$

17. 当5Ω电阻与−8.66Ω容抗串联时,电容电压落后于总电压的相位差为(　　)。

A. 30°　　B. 60°　　C. −60°　　D. −30°

答:A。对于串联电路,可用分压法来分析,即电容电压相量与总电压相量的比值为

$$\frac{-\text{j}8.66}{5-\text{j}8.66}=\frac{-\text{j}\sqrt{3}}{1-\text{j}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\angle -90°}{2\angle -60°}=\frac{\sqrt{3}}{2}\angle -30°$$

18. RL串联电路两端的电压 $u=50\sqrt{2}\sin 3\omega t\,\text{V}$,$R=8\Omega$,$\omega L=2\Omega$,该电路中电流的有效值为(　　)。

A. 3A　　B. 4A　　C. 5A　　D. 6.06A

答:C。感抗重新计算 $3\omega L=6\Omega$,则电流的有效值为 $\frac{50}{\sqrt{8^2+6^2}}\text{A}=5\text{A}$。

19. RLC串联电路两端的电压 $u=5\sqrt{2}\sin 3\omega t\,\text{V}$,$R=5\Omega$,$\omega L=5\Omega$,$\frac{1}{\omega C}=45\Omega$,该电路中电流的有效值为(　　)。

A. 124mA　　B. 1A　　C. 0.707A　　D. 2A

答:B。感抗与容抗都要重新计算,在 3ω 下,感抗为15Ω,容抗也为15Ω,在串联电路中正好互相抵消,所以总阻抗就是电阻5Ω,故电流有效值为(5/5)A=1A。

20. 请计算表达式 $10\angle -20°-10\angle 40°$ 等于(　　)。

A. $10\angle -80°$　　B. $10\angle 80°$　　C. $-10\angle 80°$　　D. $10\angle 280°$

答:A。$10\angle -20°-10\angle 40°=10\angle 10°(1\angle -30°-1\angle 30°)=-\text{j}10\angle 10°=10\angle -80°$

21. 某正弦电流的频率为20Hz,有效值为 $5\sqrt{2}\text{A}$,在 $t=0$ 时,电流的瞬时值为5A,且此时刻电流在增加,求该电流的瞬时值表达式。

答:根据题意令电流为

$$i(t)=10\sin(40\pi t+\phi),\quad 5=10\sin(40\pi\times 0+\phi)$$

解得 $\phi=30°$,因此有

$$i(t)=10\sin(40\pi t+30°)\text{A}$$

22. 已知复数 $A_1=6+\text{j}8\Omega$,$A_2=4+\text{j}4\Omega$,试求它们的和、差、积、商。

答：

$$A_1 + A_2 = 10 + j12\Omega$$
$$A_1 - A_2 = 2 + j4\Omega$$
$$A_1 \cdot A_2 = -8 + j56\Omega$$
$$A_1/A_2 = 1.75 + j0.25\Omega$$

23. 试将下列各时间函数用对应的相量来表示。

(1) $i_1 = 5\sin(\omega t)$A；

(2) $i_2 = 10\sin(\omega t + 60°)$A；

(3) $i = i_1 + i_2$。

答：(1) $\dot{I}_1 = 2.5\sqrt{2}$A；(2) $\dot{I}_2 = 2\sqrt{2}\angle 60°$A；(3) $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$。

24. 计算下列正弦波的相位差。

(1) $u = 10\sin(314t + 50°)$V 和 $i = 20\sin(314t - 20°)$A；

(2) $u_1 = 5\sin(60t + 10°)$V 和 $u_2 = -8\sin(60t + 95°)$V；

(3) $u = 5\cos(20t + 5°)$V 和 $i = 7\sin(30t - 20°)$A；

(4) $u = 5\sin(6\pi t + 10°)$V 和 $i = 4\cos(6\pi t - 15°)$A；

(5) $i_1 = -6\sin 4t$A 和 $i_2 = -9\cos(4t + 30°)$A。

答：(1)65°；(2)95°；(3)无解；(4)−65°；(5)−120°。

25. 设 $A = 3 + j4$，$B = 10\angle 60°$，计算 $A + B$，$A \cdot B$，A/B。

答：

$$A + B = 3 + j4 + 10\angle 60° = 3 + j4 + 5 + j5\sqrt{3} = 8 + j(4 + 5\sqrt{3}) = 8 + j12.66$$
$$A \cdot B = (3 + j4) \times 10\angle 60° = 5\angle 53.13° \times 10\angle 60° = 50\angle 113.13°$$
$$A/B = (3 + j4)/10\angle 60° = 5\angle 53.13°/10\angle 60° = 0.5\angle -6.87°$$

26. 在图 5-7 中所示的相量图中，已知 $U = 220$V，$I_1 = 10$A，$I_2 = 5\sqrt{2}$A，它们的角频率是 ω，试写出各正弦量的瞬时值表达式及其相量。

答：

$$u(t) = 220\sqrt{2}\sin\omega t\ \text{V}$$
$$i_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 90°)\text{A}$$
$$i_2(t) = 10\sin(\omega t - 45°)\text{A}$$

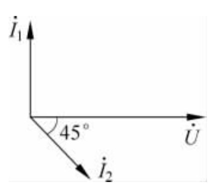

图 5-7　题 26 图

相量形式为

$$\dot{U} = 220\angle 0°\text{V},\quad \dot{I}_1 = 10\angle 90°\text{A},\quad \dot{I}_2 = 5\sqrt{2}\angle -45°\text{A}$$

27. 220V、50Hz 的电压电流分别加在电阻、电感和电容负载上，此时它们的电阻值、电感值、电容值均为 22Ω，试分别求出三个元件中的电流，写出各电流的瞬时值表达式，并以电压为参考相量画出相量图。若电压的有效值不变，频率由 50Hz 变到 500Hz，重新回答以上问题。

答：

(1) 设电压为 $u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$V，则

$$i_R(t) = 10\sqrt{2}\sin(100\pi t)\text{A}$$
$$i_L(t) = 10\sqrt{2}\sin(10\pi t - 90°)\text{A}$$

$$i_C(t) = 10\sqrt{2}\sin(100\pi t + 90°)\text{A}$$

相量图如图 5-8(a)所示。

(2) 设电压为

$$u(t) = 220\sqrt{2}\sin(10^3\pi t)\text{V}$$

此时电阻、电感、电容分别为 22Ω,220Ω,2.2Ω,则

$$i_R(t) = 10\sqrt{2}\sin(10^3\pi t)\text{A}$$

$$i_L(t) = \sqrt{2}\sin(10^3\pi t - 90°)\text{A}$$

$$i_C(t) = 100\sqrt{2}\sin(10^3\pi t + 90°)\text{A}$$

相量图如图 5-8(b)所示。

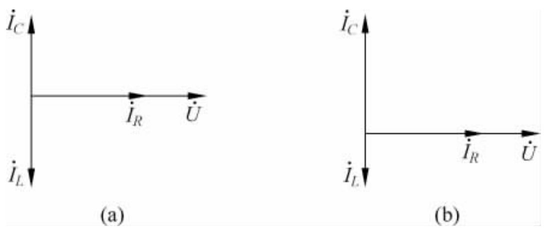

图 5-8 解题 27 图

28. 已知 RC 串联电路的电源频率为 $1/(2\pi RC)$,试问电阻电压相位超前电源电压多少度?

答:由题意的$\dot{U}_R = \dfrac{R}{R - \text{j}\dfrac{1}{\omega C}}\dot{U} = \dfrac{1}{1-\text{j}1}\dot{U} = \dfrac{1+\text{j}1}{2}\dot{U} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dot{U}\angle 45°$,所以超前 45°。

29. 已知一段电路的电压 $u = 10\sin(10t - 20°)$V,电流 $i = 5\cos(10t - 50°)$A。试问该段电路可能是哪两个元件构成的?并分别求出它们的值。

答:要求同频率、同函数、同符号,因此电流需要变换,即 $i = 5\sin(10t + 40°)$A。

因为电压电流相位差 $\phi = -20° - 40° = -60°$,所以两个元件是电阻和电容。

电阻值

$$R = \frac{10}{5}\cos(-60°)\Omega = 1\Omega$$

电容值

$$\frac{1}{\omega C} = -\frac{10}{5}\sin(-60°)\Omega = \sqrt{3}\Omega, \quad C = \frac{1}{\omega\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{30}\text{F}$$

30. 图 5-9 所示电路,电流表 A_1:5A,A_2:20A,A_3:25A,求电流表 A 和 A_4 的读数。

答:由于电容、电感并联,电容电流超前电压 90°,而电感电流落后电压 90°,所以它们的电流并联后,直接相减并取绝对值即可,故电流表 A_4 的读数为(25−20)A=5A。

而电阻电流与电压同相位,所以电流表 A 的读数为 $\sqrt{5^2 + (25-20)^2}\text{A} = 5\sqrt{2}\text{A}$。

31. 正弦交流电路如图 5-10 所示,用交流电压表测得 $U_{\text{AD}} = 5$V,$U_{\text{AB}} = 3$V,$U_{\text{CD}} = 6$V,试问 U_{DB}是多少?

答:根据有效值相等进行求解,设电流的有效值为 I

$$U_{\text{AB}} = RI = 3\text{V}, \quad U_{\text{AD}} = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 5\text{V}$$

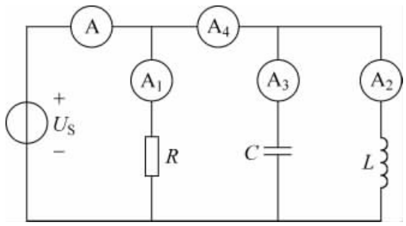

图 5-9 题 30 图

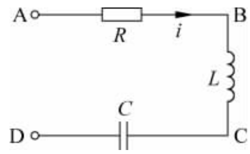

图 5-10 题 31 图

两式相比得：$\left|\omega L-\frac{1}{\omega C}\right|=\frac{4}{3}R$，而 $U_{DB}=I\left|\omega L-\frac{1}{\omega C}\right|=\frac{4}{3}IR=\frac{4}{3}\times 3=4\text{V}$。

32. 某一元件的电压、电流(关联方向)分别为下述 4 种情况时，它可能是什么元件？

(1) $\begin{cases}u=10\cos(10t+45°)\text{V}\\ i=2\sin(10t+135°)\text{A}\end{cases}$　(2) $\begin{cases}u=-10\cos t\text{V}\\ i=-\sin t\text{A}\end{cases}$

(3) $\begin{cases}u=10\sin(100t)\text{V}\\ i=2\cos(100t)\text{A}\end{cases}$　(4) $\begin{cases}u=10\cos(314t+45°)\text{V}\\ i=2\cos(314t)\text{A}\end{cases}$

答：要求同频率、同函数、同符号，即先变换，后分析

(1) $\begin{cases}u=10\sin(10t+135°)\text{V}\\ i=2\sin(10t+135°)\text{A}\end{cases}$ 所以判断为电阻 $R=5\Omega$。

(2) $\begin{cases}u=-10\sin(t+90°)\text{V}\\ i=-\sin t\text{A}\end{cases}$ 所以判断为电感 $L=10\text{H}$。

(3) $\begin{cases}u=10\sin(100t)\text{V}\\ i=2\sin(100t+90°)\text{A}\end{cases}$ 所以判断为电容 $C=2\text{mF}$。

(4) $\begin{cases}u=10\cos(314t+45°)\text{V}\\ i=2\cos(314t)\text{A}\end{cases}$ 所以判断为电阻 $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}\Omega$ 和电感 $L=\frac{5\sqrt{2}}{628}\text{H}$。

33. 图 5-11 所示电路，已知电压表 V_1：3V，V_2：4V，分别求电压表 V 的读数。

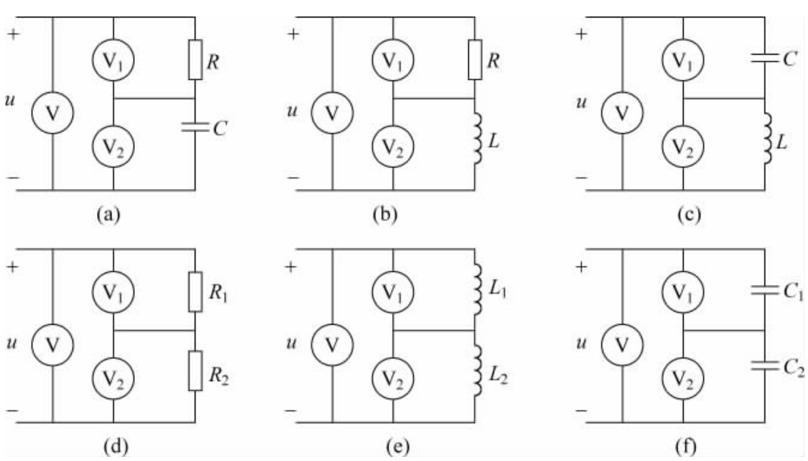

图 5-11 题 33 图

答：图 5-11(a)～(b)：$\sqrt{3^2+4^2}=5\text{V}$,图 5-11(c)：$(4-3)\text{V}=1\text{V}$,图 5-11(d)～(f)：$(4+3)\text{V}=7\text{V}$。

34. 图 5-12 所示电路,已知图 5-12(a)中电压表 V_1：30V,V_2：60V;图 5-12(b)中电压表 V_1：15V,V_2：80V,V_3：100V;求电源 u_S 的有效值 U_S。

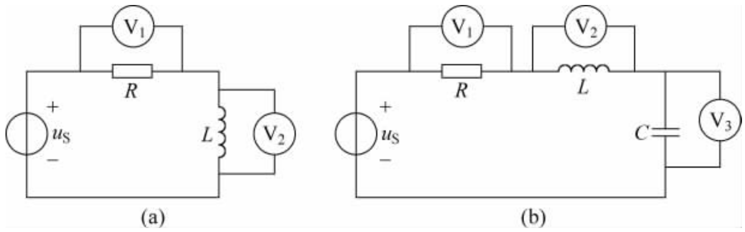

图 5-12　题 34 图

答：(a) $U_\text{S}=\sqrt{30^2+60^2}\text{V}=30\sqrt{3}\text{V}$　　(b) $U_\text{S}=\sqrt{15^2+(100-80)^2}\text{V}=25\text{V}$

35. 已知 $i_1(t)=\sqrt{2}I\sin 314t\text{A}$,$i_2(t)=-\sqrt{2}I\sin(314t+120°)\text{A}$,求 $i_3(t)=i_1(t)+i_2(t)$。

答：用相量法求

$$\dot{I}_1=I\angle 0°\text{A},\quad \dot{I}_2=-I\angle 120°\text{A},\quad \dot{I}_3=I\angle 0°-I\angle 120°=\sqrt{3}I\angle -30°\text{A}$$

所以

$$i_3(t)=\sqrt{6}\sin(314t-30°)\text{A}$$

36. 电感电压为 $u(t)=80\sin(1000t+105°)\text{V}$,若 $L=0.02\text{H}$,求电感电流 $i(t)$。

答：用相量法求

$$\dot{U}=40\sqrt{2}\angle 105°\text{V}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{\text{j}\omega L}=\frac{40\sqrt{2}\angle 105°}{\text{j}\times 1000\times 0.02}=2\sqrt{2}\angle 15°\text{A}$$

故

$$i(t)=4\sin(1000t+15°)\text{A}$$

37。已知元件 A 为电阻或电容,若其两端电压、电流各为如下列情况所示,试确定元件的参数 R、L、C。

(1) $u(t)=300\sin(1000t+45°)\text{V}$,$i(t)=60\sin(1000t+45°)\text{A}$

(2) $u(t)=250\sin(200t+50°)\text{V}$,$i(t)=0.5\sin(200t+140°)\text{A}$

答：

(1) 电压与电流相位差是零,判断元件为电阻,$R=(300/60)\Omega=5\Omega$。

(2) 电压与电流相位差是$-90°$,判断元件为电容,$C=1/(500\omega)=10\mu\text{F}$。

38. 电路如图 5-13 所示,试确定方框内最简单组合的元件值。

答：图 5-13(a)中电压与电流相位差$-60°$,判断元件的组合为电阻和电容的串联。

$$R-\text{j}\frac{1}{\omega C}=\frac{50\sqrt{2}\angle 0°}{5\sqrt{2}\angle 60°}=10\angle -60°$$

解得

$$R=5\Omega,\quad C=\frac{\sqrt{3}}{30}\text{F}\approx 58\text{mF}$$

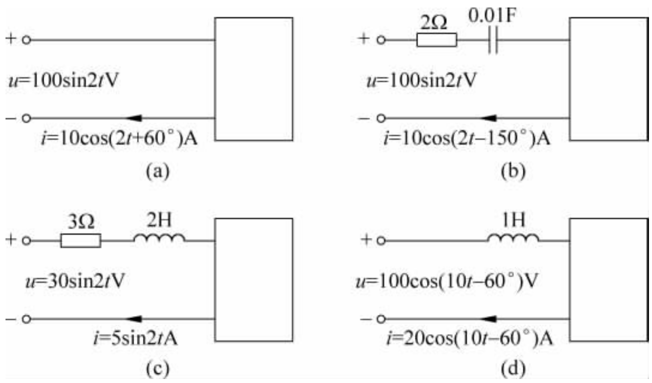

图 5-13　题 38 图

图 5-13(b)中电压与电流相位差 60°,判断元件的组合为电阻和电感的串联。

$$R+\mathrm{j}\omega L+2-\mathrm{j}\frac{1}{0.01\omega}=\frac{50\sqrt{2}\angle 0^\circ}{5\sqrt{2}\angle -60^\circ}=10\angle 60^\circ$$

解得

$$R=3\Omega,\quad L=29.33\mathrm{H}$$

图 5-13(c)中电压与电流相位差 0°,判断元件的组合为电阻和电容的串联。

$$R-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}+3+\mathrm{j}2\omega=\frac{15\sqrt{2}\angle 0^\circ}{2.5\sqrt{2}\angle 0^\circ}=6\angle 0^\circ$$

解得

$$R=3\Omega,\quad C=\frac{1}{8}\mathrm{F}$$

图 5-13(d)中电压与电流相位差 90°,元件应该为电感,但题中已有电感,故判断元件为电容。

$$\mathrm{j}1\omega-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}=\frac{50\sqrt{2}\angle 30^\circ}{10\sqrt{2}\angle -60^\circ}=\mathrm{j}5$$

解得

$$C=\frac{1}{50}\mathrm{F}$$

39. RLC 串联电路中 $R=1\Omega, L=0.01\mathrm{H}, C=1\mu\mathrm{F}$。则输入阻抗与频率 ω 的关系是什么?

答:

$$Z=1+\mathrm{j}\left(0.01\omega-\frac{1}{10^{-6}\omega}\right)\Omega=1+\left(\frac{\omega}{100}-\frac{10^6}{\omega}\right)\Omega$$

40. 已知图 5-14 中 $u_S=25\sqrt{2}\cos(10^6t-126.87^\circ)\mathrm{V}$, $u_C=20\sqrt{2}\cos(10^6t-90^\circ)\mathrm{V}$, $R=3\Omega$, $C=0.2\mu\mathrm{F}$。求:

(1) 各支路电流;

(2) 框 1 可能是什么元件?

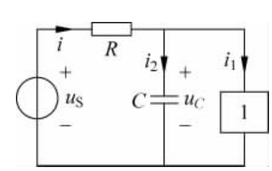

图 5-14　题 40 图

答：

(1) 用相量法求解

$$\dot{U}_S = 25\angle -126.87°\text{V}$$

$$\dot{U}_C = 20\angle -90°\text{V}$$

$$\dot{I}_2 = j\omega C\dot{U}_C = j10^6 \times 0.2 \times 10^{-6} \times 20\angle -90°\text{A} = 4\angle 0°\text{A}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S - \dot{U}_C}{R} = \frac{25\angle -126.78° - 20\angle -90°}{3}\text{A}$$

$$= \frac{25(-0.6 - j0.8) + j20}{3}\text{A} = 5\text{A}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I} - \dot{I}_2 = (-5-4)\text{A} = -9\text{A}$$

故

$$\begin{cases} i_1 = 9\sqrt{2}\cos(10^6 t \pm 180°)\text{A} \\ i_2 = 4\sqrt{2}\cos(10^6 t)\text{A} \\ i = 5\sqrt{2}\cos(10^6 t \pm 180°)\text{A} \end{cases}$$

(2) 支路1电压与电流的相位差是

$$\phi = -90° + 180° = 90°$$

故判断框1为电感元件。

5.4 思考改错题

1. RLC串联电路与正弦电压源 $u_S(t)$ 相连，若 L 的感抗与 C 的容抗相等，电路两端的电压 $u_S(t)$ 与 $i(t)$ 取关联参考方向，则 u_S 与 i 值相等。

2. 电感元件因其不消耗平均功率，所以在正弦稳态时它的瞬时功率也为零。

3. 将正弦量表示为相量，意味着相量等于正弦量。

4. 正弦电流电路中，电感元件的电流有效值不变时，其电压的有效值与频率成反比。

5. 如 $U=\sqrt{2}U\sin\omega t\,\text{V}$，$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi)\text{A}$，则电压电流的相位差为 φ。

6. 若电压超前电流 α，而电流相位为 $-\beta$ 时，则电压相位为 $\alpha+\beta$。

7. 请判断 $U\angle\alpha + U\angle -\beta = U\angle(\alpha-\beta)$。

8. 电感的电压 U 与电流 I 的关系式为 $U=j\omega LI$，而电容 UI 的关系式为 $I=j\omega CU$。

9. 容抗随频率变化：频率越高，容抗就越大；直流时，电容相当于短路。

10. 感抗随频率变化：频率越低，感抗就越小；直流时，电感相当于开路。