第3章

解析式

解析式是中学数学课程的重要内容之一，是在数的概念的基础上发展起来的，是数的概念的进一步抽象与概括，是研究方程、函数的基础.

3.1 相关概念

定义 3.1 用运算符号和括号把数和表示数的字母连接而成的式子叫做解析式. 解析式又称数学式子，简称式.

初等数学里的运算包括初等代数运算和初等超越运算. 初等代数运算是指有限次的加、减、乘、除、正整数次乘方、开方. 初等超越运算包括无理数次乘方、对数、三角和反三角运算.

解析式按字母进行什么运算加以分类.

定义 3.2 在一个解析式中，对字母只进行有限次的代数运算，这个解析式就称为代数式. 对字母进行了有限次的初等超越运算，这个解析式就称为初等超越式，简称超越式.

下面对代数式作进一步的分类.

定义 3.3 只含有加、减、乘、除、指数为整数的乘方运算的代数式，叫做有理式.

只含有加、减、乘(包括非负整数次乘方)运算的有理式叫做有理整式(或多项式). 特别地，只含有乘法(包括非负整数次乘方)运算的有理整式，叫做单项式. 单独一个数或一个字母也看作单项式.

含有除法运算的有理式叫做有理分式. 含有开方运算的代数式叫做无理式.

这样，在中学范围内解析式可分类如下：

$$\text{解析式}\begin{cases}\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{有理整式(多项式)}\\ \text{有理分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}\\ \text{超越式}\end{cases}$$

关于这个分类有几点要说明.

1. 定义中的运算是针对字母而言的

例如$\sqrt{3}x^2+2x$，针对字母 x 来说，是多项式而不是无理式.

有时甚至还要看对哪个字母来说的. 例如 $\frac{a^2}{2b^2}+a$ 对于字母 a,b 来说是分式,单就字母 a 来说,则是整式.

2. 这种分类方法是就形式而言的

例如 $\sqrt{x^4}$,虽然恒等于整式 x^2,但它是无理式.

3. 对超越式未作进一步分类

按照习惯,把只含有对字母的指数运算、对数运算、三角运算和反三角运算的超越式分别叫做指数式、对数式、三角式和反三角式. 至于对字母来说含有两种或两种以上不同的超越运算,则笼统地叫做超越式.

3.2 多项式

有理整式简称整式,也称多项式.

一元多项式经过恒等变形后,都可表示为下面的标准形式:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0),$$

这里 n 是正整数,当 $a_n\neq 0$ 时,叫做一元 n 次多项式.

如果除 a_0 外的所有系数都是 0,那么多项式就变成异于零的数 a_0,我们约定把每一个异于零的数看作零次多项式.

如果所有系数都是零,那么有 $0x^n+0x^{n-1}+\cdots+0x+0$,这样的多项式叫做零多项式. 零多项式不给予任何次数.

3.2.1 多项式的恒等

数域 F 泛指有理数域$\mathbb{Q}$,实数域$\mathbb{R}$ 和复数域$\mathbb{C}$.

定理 3.1 设 F 上的多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,如果对任意的 $x_0\in F$,多项式的值都等于零,那么它的所有系数都是零.

此定理表明表示成标准形式的任何多项式,除了零多项式外,不能恒等于零.

证明 对次数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,$f(x)=a_1x+a_0$,因为对 F 内的一切值,$f(x)$的值都等于零,所以当 $x=0$ 时,$f(x)$的值也等于零,从而有 $a_0=0$,代入 $f(x)=a_1x+a_0$ 中可得 $f(x)=a_1x\equiv 0$,当 $x=1$ 时,则有 $a_1=0$. 由此证明了命题对于一次多项式成立.

假定命题对于次数低于 n 的多项式成立,我们证明,在此假定下,它对于 n 次多项式也将成立.

如果对 F 内的一切值,都有

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv 0. \tag{3.1}$$

在(3.1)式中,用 $2x$ 代换 x,得恒等式

$$f(2x) = 2^n a_n x^n + 2^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + 2a_1 x + a_0 \equiv 0. \tag{3.2}$$

(3.1)×2^n－(3.2)得

$$2^{n-1}(2-1)a_{n-1}x^{n-1} + 2^{n-2}(2^2-1)a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + (2^n-1)a_0 \equiv 0.$$

这是一个低于 n 次的多项式,它恒等于零,由归纳假设知,它的一切系数必须都等于零,故 $2^{n-1}(2-1)a_{n-1}=0, 2^{n-2}(2^2-1)a_{n-2}=0, \cdots, 2^{n-k}(2^k-1)a_{n-k}=0, \cdots, (2^n-1)a_0=0$. 因为 $2^{n-k}\neq 0$,且 $2^{k-1}\neq 0(k=1,2,\cdots,n)$,所以 $a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$. 把它们代入(3.1)式,得 $f(x)=a_nx^n\equiv 0$.

令 $x=1$,则得 $a_n=0$,于是 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$. 即命题对任意次的一元多项式都成立.

定理 3.2(多项式恒等定理) F 上的两个多项式

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

恒等的充要条件是它们的次数相同,且同次项系数对应相等,即

$$n = m, \quad 且\ a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots, a_m = b_n.$$

证明(充分性) 如果两个多项式的次数相同且同次项系数对应相等,那么对于 F 内的一切值,两个多项式的值显然都相等,实际上它们是同一个多项式,因而是恒等的.

必要性 不妨设 $m\geqslant n$,则有

$$f(x)-g(x) = a_m x^m + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + (a_n-b_n)x^n + (a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1-b_1)x + (a_0-b_0).$$

如果对于 F 内的一切值,$f(x)$与 $g(x)$的值都相等,那么这时 $f(x)-g(x)$的值也都等于零,即

$$a_m x^m + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + (a_n-b_n)x^n + (a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1-b_1)x + (a_0-b_0) \equiv 0,$$

所以根据定理 3.1 有,$a_m=\cdots=a_{n+1}=0, a_n=b_n, a_{n-1}=b_{n-1}, \cdots, a_1=b_1, a_0=b_0$.

可见 $f(x)$与 $g(x)$由完全相同的项所组成,即它们的次数相同且同次项系数对应相等.

定理 3.2 是待定系数法的理论根据.待定系数法是一种重要的方法.

定理 3.3 如果 F 上的两个次数都不高于 n 的多项式 $f(x)$与 $g(x)$对于 F 内的 $n+1$ 个不同的值,都有相等的值,那么它们恒等.

证明 如果 $f(x)$不恒等于 $g(x)$,那么 $f(x)-g(x)$不是零多项式.因为 $f(x)$与 $g(x)$的次数都不高于 n,所以 $f(x)-g(x)$的次数也不可能高于 n,但根据"高等代数"课程中著名的根的存在定理,$f(x)-g(x)=0$ 不可能有多于 n 个的根.由已知条件,$f(x)-g(x)=0$ 有 $n+1$ 个根,这是不可能的.所以 $f(x)\equiv g(x)$.

定理 3.3 简化了判别两个多项式是否恒等的方法,因为根据多项式恒等的定义,两个多项式是否恒等,需要看对于 F 内的一切值是否有相等的对应值,这几乎是不可能实现的,但定理 3.3 告诉我们,不必检验一切值,只需检验比多项式次数多一个数的值就可以了.

定理 3.3 还告诉我们,给了 F 内的 $n+1$ 个互不相同的数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 以及任意 $n+1$ 个数 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$ 后,存在 F 上的一个次数不超过 n 的多项式 $f(x)$,能使 $f(a_i)=b_i$, $i=1,2,\cdots,n+1$,而且这样的多项式是唯一的.

例 3.1 求多项式 $y=Ax^2+Bx+C$,已知 $x_1=1$ 时,$y_1=1$; $x_2=-1$ 时,$y_2=3$; $x_3=2$ 时,$y_3=3$.

解 把$(x_i,y_i)(i=1,2,3)$代入 $y=Ax^2+Bx+C$ 得

$$\begin{cases}A+B+C=1,\\A-B+C=3,\\4A+2B+C=3.\end{cases}$$

解这个线性方程组得 $A=1,B=-1,C=1$. 所以所求二次多项式是 $x^2-x+1=0$.

一般地,我们有较为方便的拉格朗日插值公式,这就是:

一个次数不大于 n 的多项式,如果当 x 等于 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$时,它的 $n+1$ 个值 y_1, $y_2,\cdots,y_{n+1}$是已知的,那么它的一般公式是

$$\begin{aligned}f(x)=&y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)(x_1-x_{n+1})}+\\&y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{n+1})}+\cdots+\\&y_n\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n+1})}+\\&y_{n+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)}.\end{aligned}$$

一般地说,这个式子是一个 n 次多项式(在特殊情况下,次数可能低于 n). 如果令 $x=x_k$,那么上式中与 y_k 相乘的分式变为 1,而一切其他分式变为零. 所以 $f(x_k)=y_k$,即多项式 $f(x)$满足提出的条件.

读者可以应用拉格朗日公式解上例.

3.2.2 齐次、对称、轮换、交代多项式

1. 齐次多项式

定义 3.4 若以标准形式给定的多元多项式

$f(x,y,\cdots,z)=a_1x^{k_1}\cdots z^{k_n}+a_2x^{l_1}\cdots z^{l_n}+\cdots+a_tx^{s_1}\cdots z^{s_n}$的所有项有相同的次数 m,即 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=\sum\limits_{i=1}^{n}l_i=\sum\limits_{i=1}^{n}s_i=\cdots=m$, 那么 $f(x,y,\cdots,z)$叫做 m 次齐次多项式(简称齐次式).

任一单项式或非零数都可看作是齐次多项式.

例如,多项式 $ax+by$ 是关于 x,y 的一次齐次多项式 ;$x^2+2xy+y^2$, x^2-2xy 等是二次齐次多项式;x^2-xy^2+4 不是齐次多项式.

齐次多项式有下面的重要性质:

两个同元齐次多项式的积仍是一个齐次多项式,其次数等于两个因式的次数和.

例 3.2 已知 $x>0,y>0$,求$\dfrac{x^2+2y^2}{2xy}$的最小值.

解 令 $t=\dfrac{x}{y}$,则$\dfrac{x^2+2y^2}{2xy}=\dfrac{t^2+2}{2t}=\dfrac{t+\dfrac{2}{t}}{2}\geqslant\sqrt{2}$,当 $x=\sqrt{2}y$ 时取等号. 故所求最小值为$\sqrt{2}$.

注 本题的解答利用了齐次式的特征.

例 3.3 已知 $x>0,y>0,x^3+2y^3=x-y$,且 $x^2+ky^2\leqslant1$ 恒成立,求 k 的最大值.

解 由 $x^3+2y^3=x-y>0$ 得$\dfrac{x^3+2y^3}{x-y}=1$. 于是

$$k \leqslant \frac{1-x^2}{y^2} = \frac{\dfrac{x^3+2y^3}{x-y}-x^2}{y^2} = \frac{2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}{\dfrac{x}{y}-1}.$$

令 $t=\dfrac{x}{y}$则 $t>1$，$k\leqslant\dfrac{2+t^2}{t-1}$恒成立. 而

$$\frac{2+t^2}{t-1} = (t-1)+\frac{3}{t-1}+2 \geqslant 2\sqrt{3}+2, \quad \text{且当 } t=\sqrt{3}+1 \text{ 时等号成立},$$

故 k 的最大值为 $2\sqrt{3}+2$.

例 3.4 已知 $\tan\theta=2$，求 $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta$ 的值.

分析

$$\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta = \frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta-2}{\tan^2\theta+1}=\frac{4+2-2}{4+1}=\frac{4}{5}.$$

2. 对称多项式

定义 3.5 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 n 元多项式. 如果对于任意的 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$都有 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$叫做对称多项式(简称对称式).

也就是说，如果一个多元多项式中任意交换两个变数的位置后，原多项式不变，那么它就是一个对称多项式.

例如，多项式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$，$x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)$是关于 x,y,z 的对称多项式.

在高等代数里，关于对称多项式，有结论：

(1) 下面的 n 元多项式称为基本(或初等)对称多项式：

$$\sigma_1 = x_1+x_2+\cdots+x_n,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n,$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n.$$

(2) 任一对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都能表示成关于基本对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的多项式，并且表法是唯一的.

(3) 两个对称多项式(元相同)的和、差、积、商(可整除时)仍是对称多项式.

3. 交代式

定义 3.6 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 n 元多项式，如果对于任意的 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=-f(x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$叫做交代多项式(简称交代式).

也就是说，如果多项式中对换其中两个变数字母后原多项式仅改变符号，那么这个多项式就叫做关于这两个变数字母的交代式.

4. 轮换式

定义 3.7 把一个多元多项式中的变数字母按照某种次序排列，同时把第一个变数字

母换成第二个变数字母，第二个变数字母换成第三个变数字母，依次类推，直至最后一个变数字母换成第一个变数字母为止，这种变换叫做轮换.

定义 3.8 如果一个多项式中的变数字母按照任何次序轮换后，原多项式不变，那么称该多项式是轮换多项式(简称轮换式).

例如

$$x^2y+y^2z+z^2x,\quad (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3,$$
$$x^3+y^3+z^3,\quad (x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)$$

等都是轮换多项式. 而 $x+y-z$ 不是轮换多项式.

由定义可知，对称多项式一定是轮换多项式. 例如，$k(x+y+z)$，$x^3+y^3+z^3$ 等对 x,y,z 来说，既是对称多项式，又是轮换多项式.

但是轮换多项式不一定是对称多项式. 例如，$x^2y+y^2z+z^2x$ 则是 x,y,z 的轮换多项式，但不是对称多项式.

容易证明，关于对称多项式、轮换多项式、交代多项式有下面一些性质：

(1) 两个轮换多项式的和、差、积、商(能整除)仍是轮换多项式.

(2) 两个交代多项式的和、差仍是交代多项式；它们的积、商(能整除)是对称多项式.

(3) 对称多项式与交代多项式的积、商(能整除)是交代多项式.

例 3.5 已知 $x+y+z=0$，求证 $\dfrac{x^5+y^5+z^5}{5}=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$.

证明
$$\begin{aligned}(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)&=x^5+y^5+z^5+x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+x^2z^2(x+z)\\&=x^5+y^5+z^5-xyz(xy+yz+zx).\end{aligned}\tag{3.3}$$

因为 $x+y+z=0$，所以

$$x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx),\tag{3.4}$$
$$x^3+y^3+z^3=3xyz.\tag{3.5}$$

将(3.4)式、(3.5)式代入(3.3)式右端，得

$$(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)=x^5+y^5+z^5+\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

所以，原等式成立.

例 3.6 已知 $abcd=1$，求证：

$$\frac{a}{abc+ab+a+1}+\frac{b}{bcd+bc+b+1}+\frac{c}{cda+cd+c+1}+\frac{d}{dab+da+d+1}=1.$$

证明 记

$$S=\frac{a}{abc+ab+a+1}+\frac{b}{bcd+bc+b+1}+\frac{c}{cda+cd+c+1}+\frac{d}{dab+da+d+1}.\tag{3.6}$$

将每个分母的 1 用 $abcd$ 代替，同时每个分式约分得

$$S=\frac{1}{abc+ab+a+1}+\frac{1}{bcd+bc+b+1}+\frac{1}{cda+cd+c+1}+\frac{1}{dab+da+d+1}.\tag{3.7}$$

将(3.6)式中的第一个、第二个、第三个、第四个分式的分子和分母分别同乘以 d,a,b,c，并利用 $abcd=1$，得

$$S=\frac{da}{1+dab+da+d}+\frac{ab}{1+abc+ab+a}+\frac{bc}{1+bcd+bc+b}+\frac{cd}{1+cda+cd+c},$$

即

$$S=\frac{ab}{abc+ab+a+1}+\frac{bc}{bcd+bc+b+1}+\frac{cd}{cda+cd+c+1}+\frac{da}{dab+da+d+1}. \quad (3.8)$$

再将(3.8)式中的第一个、第二个、第三个、第四个分式的分子和分母分别同乘以 d,a,b,c,并利用 $abcd=1$,又得

$$S=\frac{dab}{1+dab+da+d}+\frac{abc}{1+abc+ab+a}+\frac{bcd}{1+bcd+bc+b}+\frac{cda}{1+cda+cd+c},$$

即

$$S=\frac{abc}{abc+ab+a+1}+\frac{bcd}{bcd+bc+b+1}+\frac{cda}{cda+cd+c+1}+\frac{dab}{dab+da+d+1}. \quad (3.9)$$

(3.6)+(3.7)+(3.8)+(3.9)得

$$4S=\frac{abc+ab+a+1}{abc+ab+a+1}+\frac{bcd+bc+b+1}{bcd+bc+b+1}+\frac{cda+cd+c+1}{cda+cd+c+1}+\frac{dab+da+d+1}{dab+da+d+1}=4,$$

所以 $S=1$.

3.2.3 多项式因式分解

定义 3.9 若数域 F 上的多项式 $f(x),g(x),\varphi(x)$,满足 $f(x)=g(x)\varphi(x)$,则称 $g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的因式.

非零的数以及与 $f(x)$ 只相差一个数值因子的多项式,叫做 $f(x)$ 的当然因式,其他因式叫做 $f(x)$ 的非当然因式.

定义 3.10 设 $f(x)$ 是数域 F 上的多项式,如果 $f(x)$ 除当然因式外,没有其他非当然因式,那么 $f(x)$ 就叫做在 F 上既约,否则叫做在 F 上可约.

关于既约多项式,在高等代数中证明过如下定理.

定理 3.4 数域 F 上的任一个 n 次($n>0$)多项式 $f(x)$,都可以表示成既约多项式乘积的形式

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x),$$

这里 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)$ 都是既约多项式,除数值因子与因式次序外,这种形式是唯一的.

定义 3.11 在给定的数域 F 上,把一个多项式表示成若干个既约多项式乘积的形式,叫做在 F 上的多项式的因式分解.

由多项式因式分解的意义可知,多项式因式分解主要讨论两个基本问题.第一个问题:怎样判断一个多项式是否可约?第二个问题:如果一个多项式是可约的,究竟如何去分解?

关于第一个问题,在高等代数里已作了回答,我们简单地回顾一下:

(1) 在复数域$\mathbb{C}$内,只有一次式是既约的,任何次数大于 1 的多项式,都可以分解成一次因式的乘积.

(2) 在实数域$\mathbb{R}$内,次数大于或等于 3 的多项式总是可约的.就是说,在实数范围内,除一次式是既约的以外,可能有的二次式也是既约的(二次式 ax^2+bx+c 在 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时是既约的),但不存在次数大于或等于 3 的既约多项式.

(3) 在有理数域$\mathbb{Q}$内,情况比较复杂,除一次式是既约的以外,任何高于一次的多项式都可能是既约的.例如,对于任意的正整数 n,x^n+2 在有理数域上是既约的.

关于第二个问题,在中学课程里,已学习过提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分

解法等，下面再作一些补充.

(1) 应用因式定理分解因式

其原理是，当 $f(a)=0$ 时，$f(x)$ 有 $x-a$ 的因式.因此，可以通过找有理根来分解因式.

这种方法的步骤是：

首先，写出 $f(x)$ 的最高次项系数 a_n 和常数项 a_0 的所有因数.

其次，以 a_n 的因数为分母，a_0 的因数为分子，作出所有可能的有理数.若 $f(x)$ 存在有理数根，则必在这些有理数中.

最后，将这些有理数用综合除法一一试除，即可判断是否为原多项式的有理根.

例 3.7 在$\mathbb{R}$上分解 $f(x)=x^5-5x^4+6x^3+6x^2-16x+8$ 的因式.

解 因为 $f(x)$ 的最高次项的系数是 1，常数项是 8，所以 $f(x)$ 可能的有理数根为 ±1，±2，±4，±8，用综合除法试除得

$$\begin{array}{l|l}
1-5+6+6-16+8 & 1 \\
\quad\ 1-4+2+8-8 & \\
\hline
1-4+2+8-8+0 & \\
\quad\ 2-4-4+8 & 2 \\
\hline
1-2-2+4+0 & \\
\quad\ 2+0-4 & 2 \\
\hline
1+0-2+0 &
\end{array}$$

故

$$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x^2-2)=(x-1)(x-2)^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

(2) 应用待定系数法分解因式

应用待定系数法分解因式，关键在于判定给定的多项式分解后的结果的形式，下面通过例子来说明.

例 3.8 在$\mathbb{R}$上分解 $x^4-2x^3-27x^2-44x+7$ 的因式.

解 因为 $f(x)$ 是四次多项式，且最高次项系数是 1，所以在$\mathbb{R}$上可以假定它的分解式为 $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 的形式，然后再考察 x^2+ax+b 及 x^2+cx+d 是否还可以再分解，为此，由上所设，有

$$\begin{aligned}x^4-2x^3-27x^2-44x+7&=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)\\&=x^4+(a+c)x^3+(d+ac+b)x^2+(ad+bc)x+bd.\end{aligned}$$

比较两端系数，得

$$\begin{cases}a+c=-2,\\d+ac+b=-27,\\ad+bc=-44,\\bd=7.\end{cases}$$

由 $bd=7$，先考虑 $b=1,d=7$ 是否有解，这时有

$$\begin{cases}a+c=-2,\\ac=-35,\\7a+c=-44.\end{cases}$$

解之得 $a=-7$，$c=5$. 所以

$$原式=(x^2-7x+1)(x^2+5x+7).$$

然后再分解 x^2-7x+1 就可以得到最后的答案.

注意 为什么可以先考虑 $b=1$，$d=7$，因为这里只要得到方程组的一组解即可. 由于因式分解的唯一性，其他情况如 $b=-1$，$d=-7$ 等就不必再考虑.

例 3.9 在$\mathbb{R}$上分解 $f(x,y)=12x^2+13xy-35y^2-5x+17y-2$ 的因式.

解 $f(x,y)$是二元二次多项式，可先考虑二次项，可以分解为两个一次项的乘积，$12x^2+13xy-35y^2=(4x-5y)(3x+7y)$，故假定 $f(x,y)=(4x-5y+n)(3x+7y+m)$，即

$$\begin{aligned}&12x^2+13xy-35y^2-5x+17y-2\\=&12x^2+13xy-35y^2+(4m+3n)x+(7n-5m)y+mn.\end{aligned}$$

比较两端系数，有

$$\begin{cases}4m+3n=-5,\\7n-5m=17,\\mn=-2.\end{cases}$$

解之，得 $n=1$，$m=-2$. 所以

$$f(x,y)=(4x-5y+1)(3x+7y-2).$$

(3) 齐次对称(或轮换)多项式的因式分解

利用前面齐次式、对称式、轮换式、交代式的性质及因式定理，有时可以对一些齐次对称式、轮换式与交代式进行因式分解.

例 3.10 分解 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$的因式.

解 这是一个四次齐次轮换交代多项式.

令 $x=y$，则有 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=0$，所以由因式定理可知，它有因式 $x-y$. 同理它有因式 $y-z$，与 $z-x$，即它有因式$(x-y)(y-z)(z-x)$，这个多项式是一个三次齐次轮换交代多项式. 由前面已述的性质知，还有一个一次齐次对称多项式的因式 $k(x+y+z)$，即

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

比较两端 x^3y 项的系数，得 $k=-1$. 所以

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

例 3.11 分解$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$的因式.

解 这是一个五次齐次对称式. 令 $x=-y$，则有 $(-y+y+z)^5-(-y)^5-y^5-z^5=0$. 所以 $x+y$ 是它的因式. 同理 $y+z$，$z+x$ 也是它的因式，即它有$(x+y)(y+z)(z+x)$因式，这个因式是三次齐次对称多项式，由于原式为五次齐次对称式，所以还有一个二次齐次对称多项式的因式，设为 $m(x^2+y^2+z^2)+n(xy+yz+zx)$. 于是

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5\\=&(x+y)(y+z)(z+x)[m(x^2+y^2+z^2)+n(xy+yz+zx)].\end{aligned}$$

令 $x=0$，$y=1$，$z=1$ 得 $2m+n=15$；令 $x=1$，$y=1$，$z=1$，得 $m+n=10$. 因此，$m=n=5$. 所以

$$原式=5(x+y)(y+z)+(z+x)[(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx].$$

(4) 添项拆项等方法的分解因式

例 3.12 分解因式 $x^4+y^4+(x+y)^4$.

解 为了使 x^4+y^4 能够分解，添项 x^2y^2，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (x^4+x^2y^2+y^4)+[(x+y)^4-x^2y^2] \\
&= [(x^2+y^2)^2-x^2y^2]+[(x+y)^4-x^2y^2] \\
&= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)+[(x+y)^2-xy][(x+y)^2+xy] \\
&= (x^2+xy+y^2)[(x^2-xy+y^2)+(x+y)^2+xy] \\
&= 2(x^2+xy+y^2)^2.
\end{aligned}
$$

3.3 分式

3.3.1 基本概念

定义 3.12 两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的比 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x)$ 不是零多项式）叫做有理分式（简称分式）.

定理 3.5 两个分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与 $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 恒等的充要条件是 $f(x)g_1(x)\equiv f_1(x)g(x)$.

证略

3.3.2 部分分式

我们知道，几个分式的代数和可以合并成一个分式，例如

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

反过来就是这里所说的把一个分式化成部分分式. 将分式化为部分分式是数学中常见的一种变形.

在下面的定理中，所表示的分式都是有理分式，并且约定，如果分子的次数低于分母的次数，则分式称作真分式；如果分子的次数不低于分母的次数，则分式称作假分式.

部分分式需要研究下面几个问题：怎样的分式可以分成部分分式？怎样分法？分到什么程度为止？以及结果是不是唯一等？这里只作结论性的介绍.

在高等代数里证过下面的定理.

定理 3.6 如果多项式 $f(x)$ 的次数不低于多项式 $g(x)$ 的次数，那么存在两个多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，其中 $r(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数（或者 $r(x)=0$），即

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}.$$

定理 3.7 如果多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 既约，那么存在两个多项式 $m(x)$ 和 $n(x)$，使

$$m(x)f(x)+n(x)g(x)=1.$$