

在电路分析中,当需要求解多条支路上或者多个元件上的电流、电压时,利用回路电流法等方法列方程组求解比较方便,但如果只求某一条支路的电流、电压时,采用等效法或应用电路定理求解更为简单。本章介绍一些重要的电路定理:叠加定理、齐性定理、替代定理、戴维宁定理和诺顿定理、特勒根定理、互易定理。电路定理不仅为电路分析提供了等效变换的分析方法,而且为电路理论问题的证明提供了基本的理论依据。

3.1 叠加定理和齐性定理

3.1.1 叠加定理

线性系统(无论是电系统还是非电系统),都同时具有齐次性和叠加性。由线性元件和独立电源组成的电路为线性电路,叠加定理和齐性定理是反映线性电路本质的重要定理。

叠加定理指出,在线性电路中,任一支路的电流(或电压)可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时,在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

下面以一个简单电路为例,来验证叠加定理的正确性。如图 3-1(a)所示的电路中有两个独立源(激励),现在求解电路中的电流 i_2 和电压 u_1 (响应)。

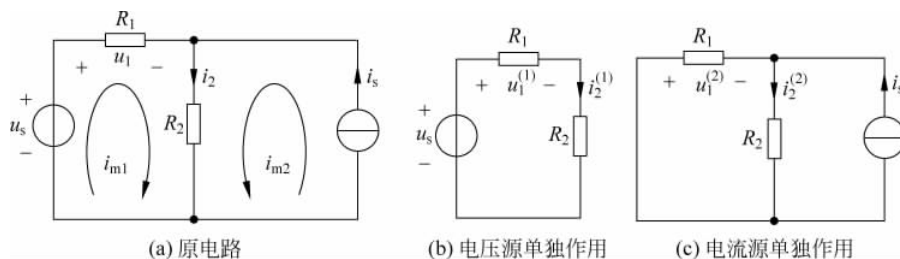


图 3-1 叠加定理

选用网孔电流法解题,设网孔电流分别为 i_{m1} 和 i_{m2} ,方向如图 3-1(a)所示。则网孔电流方程如下:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_{m1} + R_2i_{m2} = u_s \\ i_{m2} = i_s \end{cases}$$

求解方程组有

$$\begin{cases} i_{m1} = \frac{1}{R_1 + R_2} u_s - \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s \\ i_{m2} = i_s \end{cases}$$

故

$$\begin{cases} i_2 = i_{m1} + i_{m2} = \frac{1}{R_1 + R_2} u_s + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s \\ u_1 = R_1 i_{m1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s \end{cases} \quad (3-1)$$

在线性电路中, R_1 、 R_2 是常量, 所以式(3-1)中 u_s 和 i_s 项的系数也都是常量, 因此电流 i_2 和电压 u_1 都是电压源 u_s 和电流源 i_s 的一次函数。

假设 $i_s = 0$, 即只有电压源 u_s 单独作用, 电流源 i_s 处用开路来代替, 如图 3-1(b) 所示。此时电路中待求量为

$$\begin{cases} i_2^{(1)} = \frac{1}{R_1 + R_2} u_s \\ u_1^{(1)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s \end{cases}$$

同理, 假设 $u_s = 0$, 即只有电流源 i_s 单独作用, 电压源 u_s 处用短路来代替, 如图 3-1(c) 所示。此时待求量为

$$\begin{cases} i_2^{(2)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s \\ u_1^{(2)} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s \end{cases}$$

可见

$$\begin{cases} i_2 = i_2^{(1)} + i_2^{(2)} = \frac{1}{R_1 + R_2} u_s + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s \\ u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s \end{cases}$$

以上分析表明, 电路中的支路电压 u_1 和支路电流 i_2 都是 u_s 和 i_s 单独作用时产生的分量的叠加, 说明了叠加定理的正确性。

上述分析可以推广到一般情况, 如果电路中含有 g 个电压源 u_{sm} ($m=1, 2, \dots, g$) 和 h 个电流源 i_{sn} ($n=1, 2, \dots, h$), 则任意一处的电压 u_f 或电流 i_f 都可以表示为电路中每一个独立电压源 u_{sm} 或者独立电流源 i_{sn} 单独作用于电路时, 在该支路产生的电流(或电压)的代数和, 即

$$\begin{aligned} u_f &= k_{f1} u_{s1} + k_{f2} u_{s2} + \dots + k_{fg} u_{sg} + K_{f1} i_{s1} + K_{f2} i_{s2} + \dots + K_{fh} i_{sh} \\ &= \sum_{m=1}^g k_{fm} u_{sm} + \sum_{n=1}^h K_{fn} i_{sn} \\ i_f &= k'_{f1} u_{s1} + k'_{f2} u_{s2} + \dots + k'_{fg} u_{sg} + K'_{f1} i_{s1} + K'_{f2} i_{s2} + \dots + K'_{fh} i_{sh} \\ &= \sum_{m=1}^g k'_{fm} u_{sm} + \sum_{n=1}^h K'_{fn} i_{sn} \end{aligned}$$

使用叠加定理分析电路时应注意以下几个问题:

(1) 叠加定理只适用于线性电路,不适用于非线性电路。

(2) 在叠加的各分电路中,不作用的电压源置零,在电压源处用短路代替;不作用的电流源置零,在电流源处用开路代替。电路中所有的电阻不予更改,受控源保留在各分电路中,控制支路用相应的分量表示且不能简化、消除。

(3) 各分响应叠加时是代数和,注意电流、电压的参考方向。为方便可以选择各分响应的参考方向与原响应参考方向一致,则电路的原响应为各分响应的和。

(4) 叠加定理只适用于计算电压、电流,而不能用于计算功率和能量,因为功率和能量是电压或电流的二次函数。

(5) 叠加方式是任意的,可以一次使一个独立源单独作用,也可以一次使几个独立源共同作用。

例 3-1 电路如图 3-2(a)所示,已知 $R_1=6\Omega, R_2=4\Omega, R_3=8\Omega, R_4=6\Omega, U_s=10V, I_s=2A$ 。试用叠加定理计算通过 R_2 的电流 I_2 。

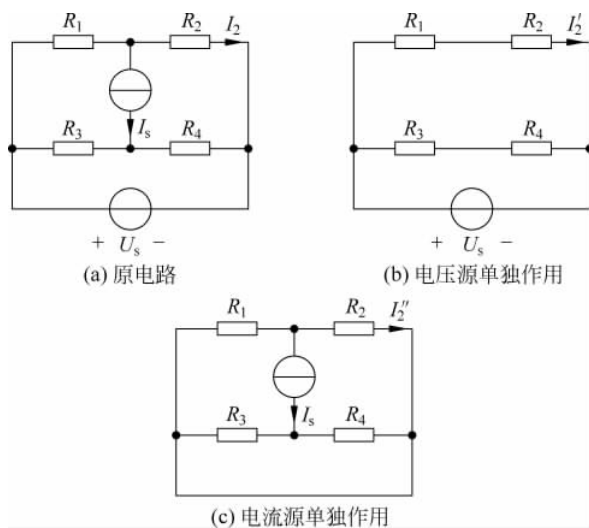


图 3-2 例 3-1 图

解: 根据叠加定理计算 R_2 的电流 I_2 。

当电压源 U_s 单独作用时,电路如图 3-2(b)所示。

$$I_2' = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \left(\frac{10}{6 + 4} \right) \text{A} = 1 \text{A}$$

当电流源 I_s 单独作用时,电路如图 3-2(c)所示。

$$I_2'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times (-I_s) = \left[\frac{4}{6 + 4} \times (-2) \right] \text{A} = -0.8 \text{A}$$

图 3-2(b)、图 3-2(c)所规定的电流的参考方向与图 3-2(a)中的参考方向相同,则有

$$I_2 = I_2' + I_2'' = (1 - 0.8) \text{A} = 0.2 \text{A}$$

例 3-2 电路如图 3-3(a)所示,其中受控源 CCVS 的电压受流过电阻 R_1 的电流 I_1 的控制,已知 $U_s=10V, I_s=4A, R_1=6\Omega, R_2=4\Omega$,求电压 U_3 。

解: 由叠加定理,作出 10V 电压源和 4A 电流源分别作用时的分电路,如图 3-3(b)和图 3-3(c)所示,受控源不是独立源,应该保留在各分电路中。

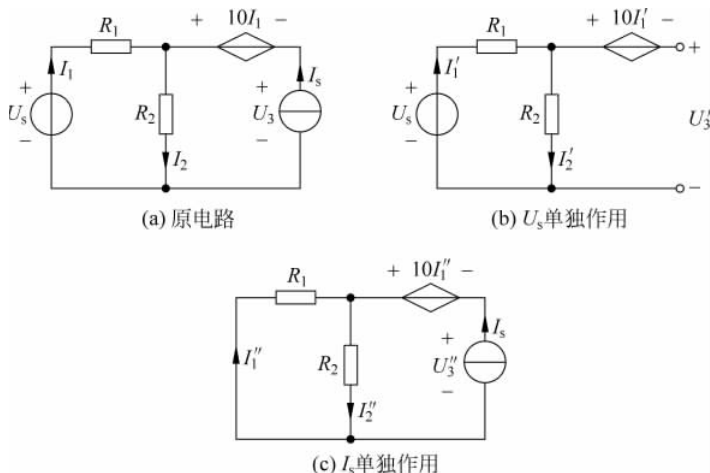


图 3-3 例 3-2 图

对图 3-3(b)有

$$I'_1 = I'_2 = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \left(\frac{10}{6 + 4}\right)\text{A} = 1\text{A}$$

$$U'_3 = -10I'_1 + 4I'_2 = (-10 + 4)\text{V} = -6\text{V}$$

对图 3-3(c)有

$$I''_1 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}I_s = \left(-\frac{4}{6 + 4} \times 4\right)\text{A} = -1.6\text{A}$$

$$I''_2 = I_s + I''_1 = (4 - 1.6)\text{A} = 2.4\text{A}$$

$$U''_3 = -10I''_1 + 4I''_2 = [-10 \times (-1.6) + 4 \times 2.4]\text{V} = 25.6\text{V}$$

由于图 3-3(b)、图 3-3(c)所规定的电压的参考方向与图 3-3(a)中 U_3 的参考方向相同,则有

$$U_3 = U'_3 + U''_3 = (-6 + 25.6)\text{V} = 19.6\text{V}$$

3.1.2 齐性定理

仍以图 3-1 为例,当电路中独立电压源和电流源都增大 K 倍(K 为实常数)时,电路中的待求量为

$$\begin{cases} i_2 = i_2^{(1)} + i_2^{(2)} = \frac{1}{R_1 + R_2}Ku_s + \frac{R_1}{R_1 + R_2}Ki_s = K \text{ 倍原电流} \\ u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}Ku_s - \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}Ki_s = K \text{ 倍原电压} \end{cases}$$

即各电压和电流也将同样增大 K 倍。当独立电源同时缩小 K 倍时,电压和电流也将同样缩小 K 倍。可见在线性电路中,当所有激励(电压源和电流源)都同时增大或减小 K 倍(K 为常数)时,响应(电压和电流)也将同样增大或缩小 K 倍,这就是齐性定理。齐性定理可由叠加定理推出,用该定理分析梯形电路时特别有效。

例 3-3 求图 3-4 所示的梯形电路中的电压 U 。

解: 假设 $U=10\text{V}$,则 10Ω 电阻中电流为 1A ,由图 3-4 容易计算出此时 $I_s=3\text{A}$ 。而题中 I_s 实际为 1.5A ,由齐性定理可得

$$U = \left(10 \times \frac{1.5}{3}\right) \text{V} = 5 \text{V}$$

本例从梯形电路中远离电源的一端开始计算,先设某一电压或电流为一便于计算的值(如本例中设 $U=10\text{V}$),然后根据 KCL、KVL 倒退算到电源端,最后按齐性定理予以修正,这种方法称为“倒退法”,它比用串并联化简计算要简捷得多。梯形电路的级数越多越显示此法的优越性。

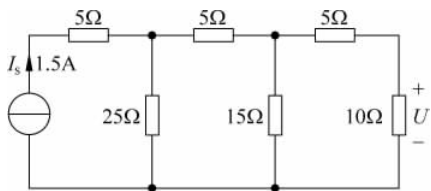


图 3-4 例 3-3 图

3.2 替代定理

替代定理是电路基本定理之一,对于线性或非线性电路的分析十分重要,应用替代定理可以简化电路,使电路更直观,便于分析。

替代定理指出,在给定的任意一个线性或非线性电路中,若第 k 条支路的电压 u_k 和电流 i_k 已知,则此支路可用一个电压为 $u_s = u_k$ 的电压源或用一个电流为 $i_s = i_k$ 的电流源替代,替代后电路中的全部电压和电流均保持原值。但是被替代支路与其他支路之间不能有耦合关系,例如,如果第 k 条支路上的电压或电流为电路中受控源的控制量,而替代后该电压或电流不复存在,则此支路不能被替代。

下面证明替代定理。图 3-5(a)所示线性电阻电路中, N 表示第 k 条支路外的电路其余部分,第 k 条支路的电流、电压分别为 i_k 和 u_k 。将第 k 条支路用电流源 $i_s = i_k$ 替代后,如图 3-5(b)所示,由于替代前后电路的几何结构完全相同,所以两个电路的 KCL 和 KVL 方程也相同。除第 k 条支路外,两个电路中各支路电压、电流的约束关系也完全相同。新电路中第 k 条支路的电流用电流源替代了,即 $i_s = i_k$,而该电流源端电压 u'_k 可以是任意的。但原电路的全部电压和电流又将满足新电路的全部 KCL 和 KVL 方程,再根据两电路的解均唯一的假设,必须满足 $u_k = u'_k$ 。当然 N 内部各支路的电压、电流替代前后也均一致。如果第 k 条支路被一个电压源替代(如图 3-5(c)所示),可做类似的证明。

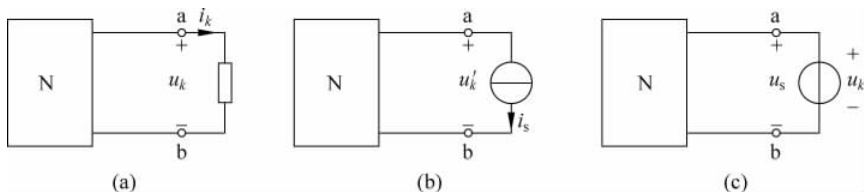


图 3-5 替代定理

以上证明仅用到 KCL 和 KVL,所以对线性电路和非线性电路均适用。

图 3-6(a)所示的电阻电路,不难求得 $U_3 = 8\text{V}$, $I_3 = (U_3 - 4)/4 = 1\text{A}$, $I_2 = U_3/8 = 1\text{A}$, $I_1 = I_2 + I_3 = 2\text{A}$ 。现将支路 3 分别以电压 $U_s = U_3 = 8\text{V}$ 的电压源或 $I_s = I_3 = 1\text{A}$ 的电流源替代,分别如图 3-6(b)和图 3-6(c)所示,则不难求出各支路电流均保持不变,即 $I_1 = 2\text{A}$, $I_2 = 1\text{A}$,说明了替代定理的正确性。

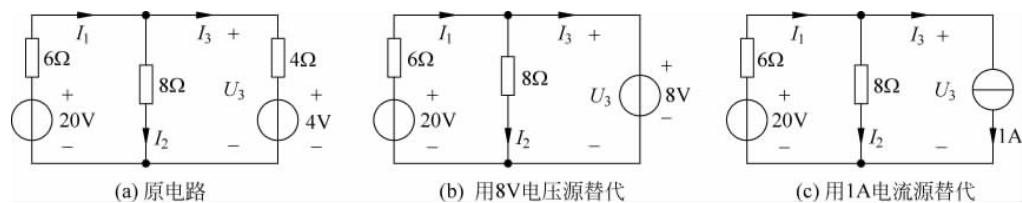


图 3-6 替代定理示例

例 3-4 求图 3-7(a)所示的电路中 U_1 和 I , 已知 $U = 3\text{V}$ 。

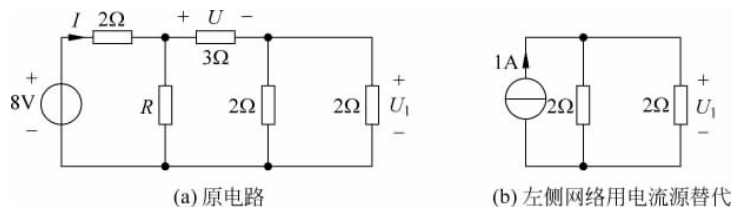


图 3-7 例 3-4 图

解: 根据替代定理, 可将 3Ω 电阻连同左边网络用 $\frac{3}{3} = 1\text{A}$ 的电流源置换(如图 3-7(b)所示), 可得

$$U_1 = [(2 // 2) \times 1]\text{V} = 1\text{V}$$

再回到图 3-7(a)中, 由 KVL 有

$$2I + U + U_1 - 8 = 0$$

则有

$$I = \frac{8 - U - U_1}{2} = 2\text{A}$$

例 3-5 如图 3-8(a)所示的电路中, 若要使 $I_x = \frac{1}{8}I$, 试求 R_x 。

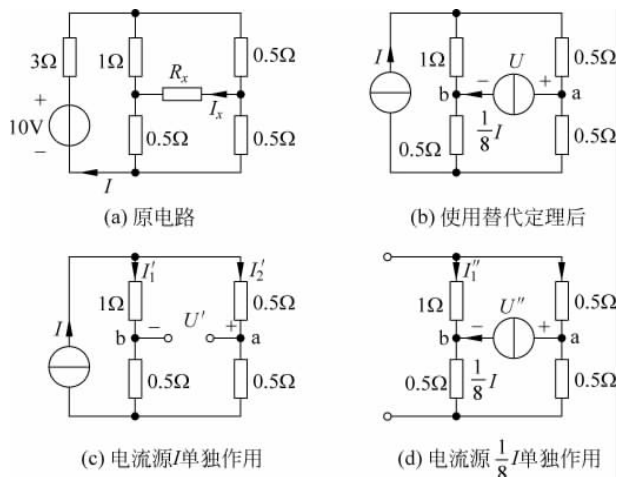


图 3-8 例 3-5 图

解: 根据替代定理, 可将 10V 电压源与 3Ω 电阻串联支路用值为 I 的电流源替代, 将电阻 R_x 所在支路用值为 $\frac{1}{8}I$ 的电流源替代, 如图 3-8(b)所示。

再利用叠加定理,让两个独立电流源分别单独作用(如图 3-8(c)、图 3-8(d)所示),则 a、b 两点间电压 $U=U'+U''$ 。

其中,

$$U' = 0.5I_2' - 0.5I_1' = 0.5 \times \frac{1.5}{2.5}I - 0.5 \times \frac{1.0}{2.5}I = 0.1I$$

$$U'' = 1.5I_1'' = 1.5 \times \left(-\frac{1.0}{2.5} \times \frac{1}{8}I\right) = -0.075I$$

所以 $U=U'+U''=0.025I, R_x = \frac{U}{I_x} = 0.2\Omega$ 。

3.3 戴维宁定理和诺顿定理

在复杂的电路中,如果只要求某一条支路中的电压、电流或功率时,列方程组求解有时会比较复杂。利用本节介绍的戴维宁和诺顿定理,先求出含源一端口的等效电路,进而对支路电压、电流等进行求解,有时能够达到简化分析的目的。

3.3.1 一端口

电路或网络的一个端口是它向外引出的一对端子,这对端子可以与外部电源或其他电路相连接并且从它的一个端子流入的电流一定等于从另一个端子流出的电流。这种具有向外引出一对端子的电路或网络称为一端口(网络),也叫二端网络。

如果一个端口内部含有独立电源,则称此端口为含源一端口,常用 N_s 表示,当有外电路与它连接时如图 3-9(a)所示。如果一个一端口内部仅含有电阻和受控源,不含任何独立电源,则称此端口为无源一端口,常用 N_0 表示。可以证明,不论其内部如何复杂,无源一端口的端口电压与端口电流成正比,比值定义为该一端口的输入电阻 $R_{in} = \frac{u}{i}$,如图 3-9(b)所示。

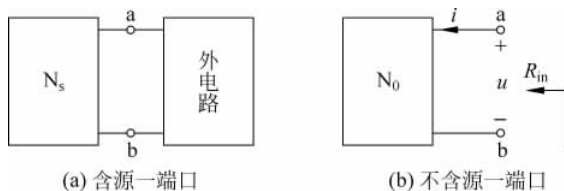


图 3-9 一端口

下面介绍含源一端口的几个概念。

1) 开路电压 u_{oc}

把图 3-9(a)所示的外电路断开,如图 3-10(a)所示,此时由于 N_s 内部含有独立电源,一般在端口 a-b 间将出现电压,这个电压称为 N_s 的开路电压,用 u_{oc} 表示。

2) 短路电流 i_{sc}

将图 3-9(a)所示的外电路用一根导线短路,如图 3-10(b)所示,此时由于 N_s 内部含有独立电源,一般在短路导线上将出现电流,这个电流称为 N_s 的短路电流,用 i_{sc} 表示。

3) 等效电阻 R_{eq}

将 N_s 内部的所有独立源置零,即独立电压源用短路替代,独立电流源用开路替代,受控源和电阻留下,得到不含源一端口,用 N_0 表示, N_0 可以用一个等效电阻 R_{eq} 代替,此等效电阻等于 N_0 在端口 a-b 处的输入电阻(如图 3-10(c)所示)。

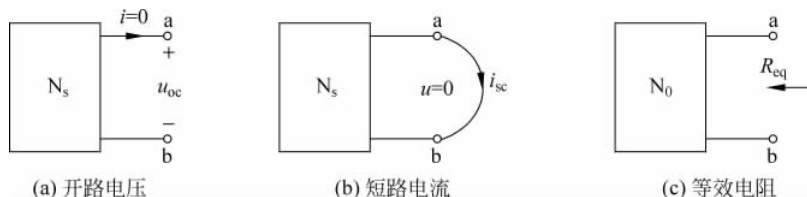


图 3-10 一端口相关概念

端口的输入电阻大小等于端口的等效电阻,但两者的含义有区别。求端口等效电阻的一般方法称为电压电流法,即将端口内部所有独立源置零后,在端口加以电压源 u_s ,然后求出端口电流 i ; 或者在端口加以电流源 i_s ,然后求出端口电压 u 。根据输入电阻的定义,可知

$$R_{eq} = R_{in} = \frac{u_s}{i} = \frac{u}{i_s}。$$

3.3.2 戴维宁定理

戴维宁定理指出,一个含有独立源、线性电阻和受控源的一端口 N_s ,对外电路来说,可以用一个电压源和电阻的串联组合等效替换,电压源的电压等于该一端口的开路电压 u_{oc} ,电阻等于一端口 N_s 中全部独立源置零后的等效电阻 R_{eq} 。该电压源与电阻的串联组合称作戴维宁等效电路,如图 3-11(b)所示。当一端口图 3-11(a)用戴维宁等效电路图 3-11(b)替换后,端口以外的电路(以后简称外电路)中的电压、电流均保持不变。这种等效变换称为对外等效。

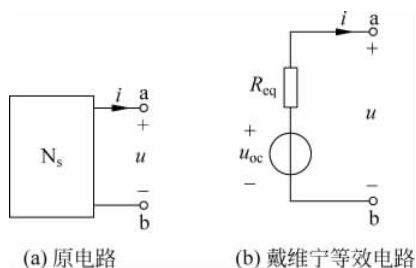


图 3-11 戴维宁等效电路

戴维宁定理的证明过程如下:

图 3-12(a)所示的电路中, N_s 为含源一端口网络,外电路为一电阻 R ,流过电阻 R 的电流已知为 i ,根据替代定理,用 $i_s = i$ 的电流源代替电阻 R ,则得图 3-12(b)所示的电路。对图 3-12(b)应用叠加定理,所得分电路如图 3-12(c)和图 3-12(d)所示。图 3-12(c)是电流源 $i_s = i$ 不作用而 N_s 中的全部独立源作用时的情况,此时 $i^{(1)} = 0, u^{(1)} = u_{oc}$, u_{oc} 是含源一端口的开路电压;图 3-12(d)是电流源 i_s 单独作用而 N_s 中的全部独立源不作用时的情况, N_0 是 N_s 中全部独立源置零后的不含源一端口,此时 $u^{(2)} = -R_{eq} i^{(2)} = -R_{eq} i, R_{eq}$ 是 N_0 端口间的等效电阻。按叠加定理,图 3-12(b)中的电压 u 为

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = u_{oc} - R_{eq} i \quad (3-2)$$

式(3-2)表明,含源一端口 N_s 对外作用等效于一个电压为 u_{oc} 的电压源和一个阻值为 R_{eq} 的电阻的串联组合的对外作用,所以图 3-12(a)中的 N_s 的对外作用可用 u_{oc} 与 R_{eq} 串联组合代替,如图 3-12(e)所示,戴维宁定理得证。如果外部电阻 R 换成一个含源一端口,以上证明仍能成立。应用戴维宁定理,关键是要求出一端口 N_s 的开路电压 u_{oc} 和等效电阻 R_{eq} 。

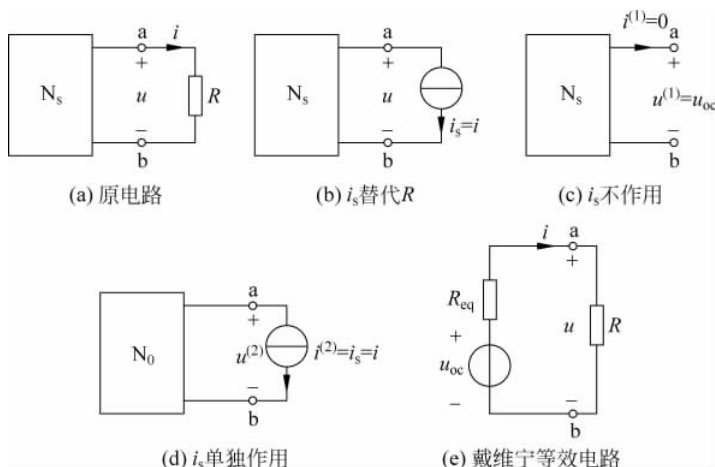


图 3-12 戴维宁定理证明

例 3-6 试求图 3-13(a)所示电路中的电流 I 。

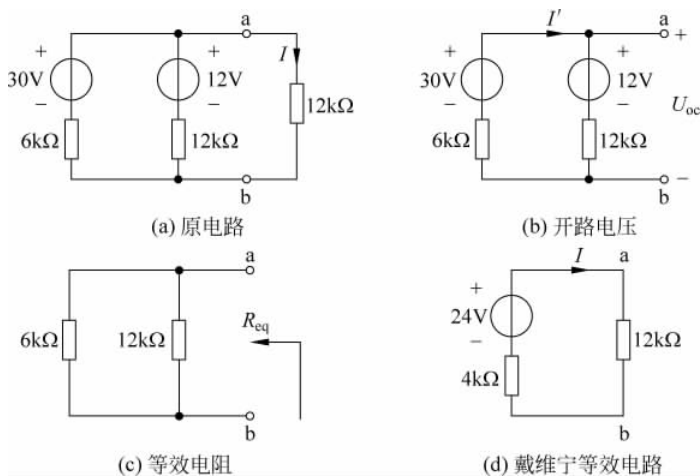


图 3-13 例 3-6 图

解：根据戴维宁定理，除 $12\text{k}\Omega$ 电阻以外的部分可等效为电压源 U_{oc} 与电阻 R_{eq} 的串联组合，先求开路电压 U_{oc} 。端口 a-b 开路时的电路如图 3-13(b)所示，不难求得

$$I' = \left(\frac{30 - 12}{6 \times 10^3 + 12 \times 10^3} \right) \text{A} = 1\text{mA}$$

$$U_{oc} = 12 + 12 \times 10^3 I' = 24\text{V}$$

然后求等效电阻 R_{eq} ，将各独立源置零，如图 3-13(c)所示，有

$$R_{eq} = (6 \times 10^3 // 12 \times 10^3) \Omega = 4 \times 10^3 \Omega$$

最后按图 3-13(d)所示的戴维宁等效电路求得

$$I = \frac{U_{oc}}{R_{eq} + 12 \times 10^3} = \left(\frac{24}{4 \times 10^3 + 12 \times 10^3} \right) \text{mA} = 1.5\text{mA}$$

例 3-7 求图 3-14(a)所示电路的戴维宁等效电路。

解：利用电源的等效变换，可以将图 3-14(a)变换成图 3-14(b)所示的电路，可求得

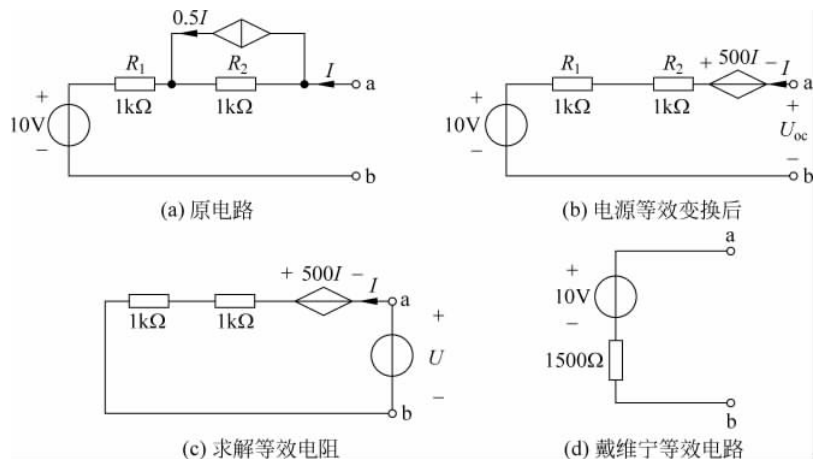


图 3-14 例 3-7 图

$$U_{oc} = 10V$$

然后将图 3-14(b)中独立电压源置零,变为不含源一端口,因为该不含源一端口内包含受控电源,所以外加电压 U ,如图 3-14(c)所示,则由 KVL 有

$$U = -500I + 2000I$$

所以有

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 1500\Omega$$

戴维宁等效电路如图 3-14(d)所示。

以上求等效电阻 R_{eq} 的方法采用的是外加电压电流法。由图 3-15 可知,一端口的短路电流与其等效电路的短路电流 i_{sc} 是一致的。根据图 3-15(b)可知

$$i_{sc} = \frac{u_{oc}}{R_{eq}}$$

则等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} \quad (3-3)$$

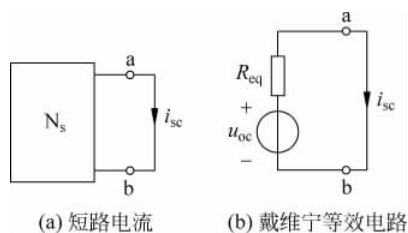


图 3-15 求输入电阻的开路短路法

由此可知,只要求出开路电压 u_{oc} 及短路电流 i_{sc} ,也可利用式(3-3)求得 R_{eq} 。这也是求 R_{eq} 的非常有效的方法,称为开路短路法。

利用这种方法,对例 3-7 进行求解。首先求 U_{oc} ,由图 3-16(a)知

$$I = 0$$

$$U_{oc} = 10V$$

然后求短路电流 I_{sc} ,按图 3-16(b)可以求得

$$I_{sc} = \frac{10}{R_1 + 0.5R_2} = \frac{1}{150}A$$

根据式(3-3)得

$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \left(\frac{10}{1/150}\right)\Omega = 1500\Omega$$

戴维宁等效电路如图 3-14(d)所示。

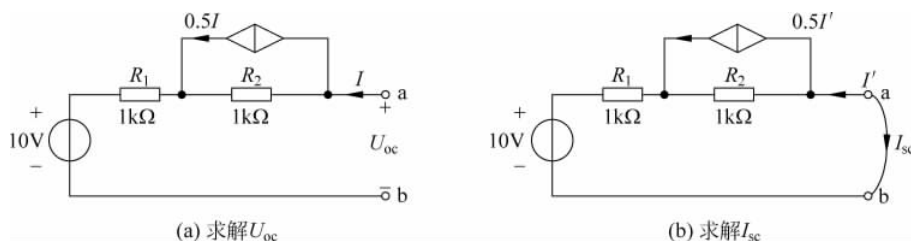


图 3-16 例 3-7 的第二种解法

3.3.3 诺顿定理

诺顿定理指出,一个含源一端口 N_s (如图 3-17(a)所示),对外电路的作用可以用一个电流源和电导的并联组合等效替换。等效电流源的电流等于该一端口 N_s 的短路电流 i_{sc} ,电导等于该一端口 N_s 全部独立源置零后的等效电导 G_{eq} 。该电流源和电导的并联组合称为诺顿等效电路,如图 3-17(b)所示。

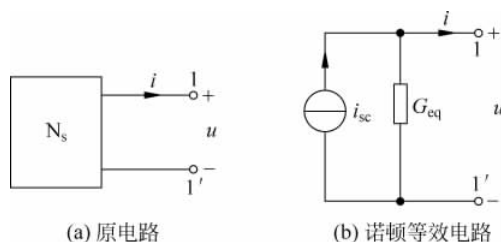


图 3-17 诺顿等效定理

诺顿定理的证明如下:

利用电压源和电阻串联组合与电流源和电阻并联组合间的等效变换公式,可把图 3-11(b)所示的串联组合等效电源变换成图 3-17(b)所示的并联组合等效电源,于是诺顿等效定理得以证明。

例 3-8 求图 3-18(a)所示电路的诺顿等效电路。

解: 将图 3-18(a)所示的电路中 a、b 两端短接,如图 3-18(b)所示,则短路电流 I_{sc} 为

$$I_{sc} = I_1 + I_2 - I_3 = \left(\frac{0.2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) \text{A} = 0.267 \text{A}$$

等效电阻 R_{eq} 按图 3-18(c)计算,有

$$R_{eq} = [(1+1) \parallel (1+2) \parallel 2] \Omega = \frac{3}{4} \Omega = 0.75 \Omega$$

诺顿等效电路如图 3-18(d)所示。

戴维宁定理和诺顿定理使用说明:

- (1) 在求开路电压、短路电流时可以使用叠加定理,有时很有效。
- (2) 对于含源一端口,若 $R_{eq}=0$,只有戴维宁等效电路,而无诺顿等效电路;若 $G_{eq}=0$,则只有诺顿等效电路,而无戴维宁等效电路。

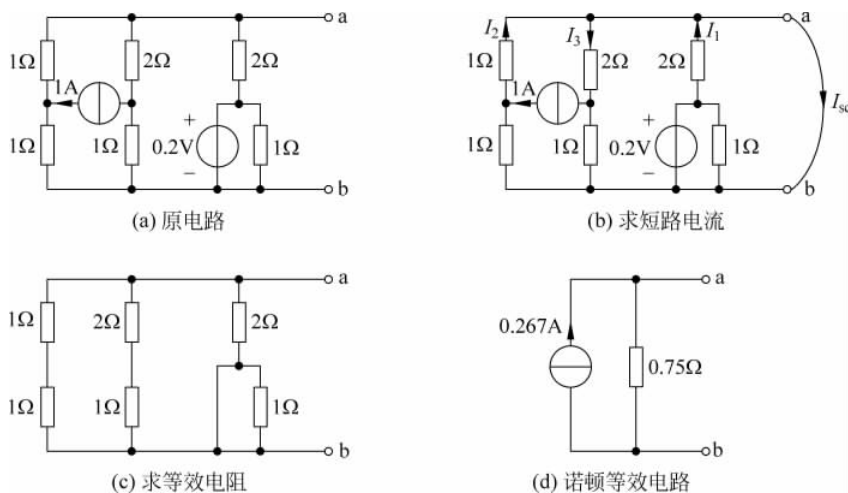


图 3-18 例 3-8 图

(3) 如果含源一端口内含有受控源, R_{eq} 也可能是一个负电阻。

3.3.4 最大功率传输定理

一个含源线性一端口电路, 当所接负载不同时, 一端口电路传输给负载的功率就不同。电路的主要功能之一, 就是为了实现电力的传输和分配, 讨论负载为何值时能从电路获取最大功率及最大功率的值是多少的问题是有工程意义的。

最大功率传输定理指出, 对于给定的电源(或线性含源一端口的等效电路), 其负载获得最大功率的条件是, 负载电阻必须等于电源内阻, 此时称负载与电源匹配, 而负载获得的最大功率为

$$p_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} \quad (3-4)$$

定理证明如下:

任何电路都可以表示为含源一端口与外电路连接的形式(如图 3-19(a)所示), 因此都可以化为戴维宁等效电路与外电路相连的形式(如图 3-19(b)所示)。

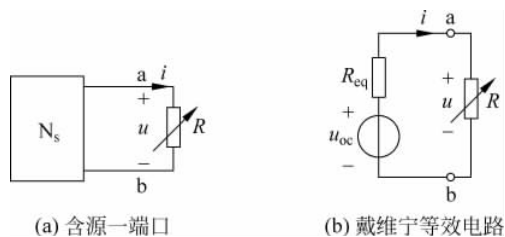


图 3-19 最大功率传输定理

在戴维宁等效电路中, 电流 $i = \frac{u_{oc}}{R + R_{eq}}$, 则电阻 R 吸收的功率为

$$p = Ri^2 = \frac{R}{(R + R_{eq})^2} u_{oc}^2$$

要使功率最大,则要满足公式

$$p_{\max} = p \Big|_{\frac{dp}{dR}=0}$$

而

$$\frac{dp}{dR} = \frac{d\left[\frac{R}{(R+R_{\text{eq}})^2}\right] u_{\text{oc}}^2}{dR} = \frac{(R+R_{\text{eq}})^2 - 2R(R+R_{\text{eq}})}{(R+R_{\text{eq}})^4} u_{\text{oc}}^2 = \frac{(R_{\text{eq}}^2 - R^2) u_{\text{oc}}^2}{(R+R_{\text{eq}})^4} = 0$$

因此,有

$$R = R_{\text{eq}}$$

当 $R=R_{\text{eq}}$ 时,有

$$p_{\max} = \frac{R}{(R+R_{\text{eq}})^2} u_{\text{oc}}^2 \Big|_{R=R_{\text{eq}}} = \frac{u_{\text{oc}}^2}{4R_{\text{eq}}}$$

最大功率传输定理得以证明。

需要注意的是:

(1) 最大功率传输定理用于一端口网络给定而负载可调的情况。如果负载电阻一定,内阻可变的话,应该是内阻越小,负载获得功率越大,当内阻为零时,负载获得的功率最大。

(2) 计算最大功率的问题应用戴维宁定理或诺顿定理分析比较方便。

例 3-9 电路如图 3-20(a) 所示, R_L 为何值时它获得最大功率? 并求此最大功率。

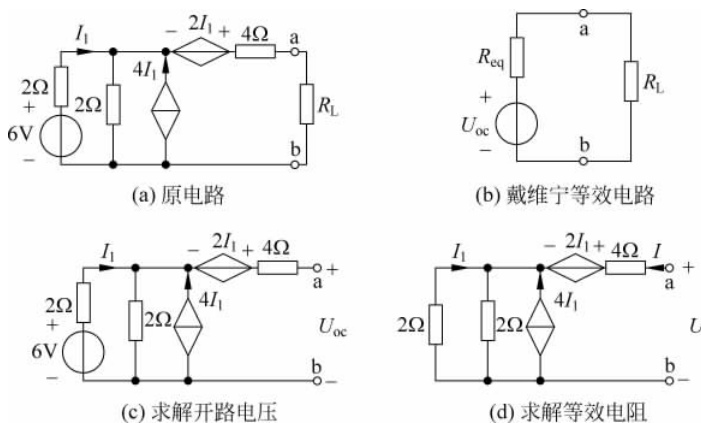


图 3-20 例 3-9 图

解: 将图 3-20(a) 所示的电路中 a、b 端左侧一端口用戴维宁等效电路替代, 如图 3-20(b) 所示。其中开路电压 U_{oc} 按图 3-20(c) 计算, 有

$$2I_1 + 2(I_1 + 4I_1) = 6, \quad I_1 = \left(\frac{6}{12}\right) \text{A} = 0.5 \text{A}$$

开路电压 U_{oc}

$$U_{\text{oc}} = 2I_1 + 2(I_1 + 4I_1) = 12I_1 = 6 \text{V}$$

等效电阻 R_{eq} 用外加电压电流法, 按图 3-20(d) 计算, 有

$$U = 4I + 2I_1 - 2I_1 = 4I, \quad R_{\text{eq}} = \frac{U}{I} = 4 \Omega$$

根据最大功率传输定理,当 $R_L = R_{eq} = 4\Omega$ 时,其获得最大功率。最大功率 P_{\max} 为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \left(\frac{6^2}{4 \times 4}\right) \text{W} = 2.25 \text{W}$$

3.4 特勒根定理

特勒根定理由荷兰学者特勒根于 1952 年提出,是电路理论中一个普遍适用的定理。特勒根定理包含特勒根定理 1 和特勒根定理 2。

3.4.1 特勒根定理 1

特勒根定理 1(功率守恒定理): 对于一个具有 n 个结点和 b 条支路的电路(网络)N, 设 (i_1, i_2, \dots, i_b) 和 (u_1, u_2, \dots, u_b) 分别表示 b 条支路的电压和电流, 各支路的电流和电压的参考方向都是关联的(如图 3-21 所示), 则对任意时间 t 有

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \quad (3-5)$$

现以图 3-21 为例, 来验证特勒根定理 1。

按照图中假定的各支路方向(各支路电流、电压的参考方向与各支路方向都一致), 首先对结点①、②、③应用 KCL 有

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_6 &= 0 \\ -i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\ -i_4 - i_6 + i_5 &= 0 \end{aligned}$$

选择结点④为参考结点, 则其他三个结点电压分别为 u_{n1} 、 u_{n2} 和 u_{n3} 。

各支路电压用结点电压表示, 可得

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_{n1}, & u_2 &= u_{n1} - u_{n2}, & u_3 &= u_{n2}, \\ u_4 &= u_{n2} - u_{n3}, & u_5 &= u_{n3}, & u_6 &= u_{n1} - u_{n3} \end{aligned} \quad (3-6)$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 u_k i_k &= u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 + u_6 i_6 \\ &= -u_{n1} i_1 + (u_{n1} - u_{n2}) i_2 + u_{n2} i_3 + (u_{n2} - u_{n3}) i_4 + u_{n3} i_5 + (u_{n1} - u_{n3}) i_6 \\ &= u_{n1} (-i_1 + i_2 + i_6) + u_{n2} (-i_2 + i_3 + i_4) + u_{n3} (-i_4 + i_5 - i_6) \\ &= u_{n1} \times 0 + u_{n2} \times 0 + u_{n3} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

用上述类似的过程, 对任何具有 n 个结点和 b 条支路的电路, 均可证明 $\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$ 。由于式(3-5)中每一项是同一支路电压和电流在关联参考方向下的乘积, 表示支路吸收功率, 因此特勒根定理所表达的是功率守恒, 故又称功率守恒定理。该定理的证明只是根据电路的结构应用基尔霍夫定律, 并未涉及元件性质, 故此定理适用于任何集总参数电路。

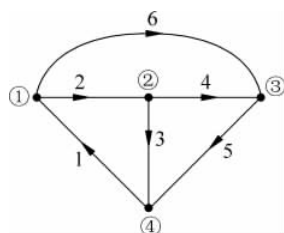


图 3-21 特勒根定理证明

3.4.2 特勒根定理 2

特勒根定理 2(拟功率守恒定理): 设有两个具有 n 个结点和 b 条支路的电路 N 和 \hat{N} , 二者具有相同的拓扑图, 但由内容不同的支路组成。设各条支路电流和电压都取关联参考方向, 分别用 (i_1, i_2, \dots, i_b) 、 (u_1, u_2, \dots, u_b) 和 $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_b)$ 、 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_b)$ 表示 b 条支路的电压和电流, 则对任意时间 t 有

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0, \quad \sum_{k=1}^b \hat{u}_k \hat{i}_k = 0 \quad (3-7)$$

下面验证特勒根定理 2。

设两个电路的图均如图 3-21 所示, 对电路 1, 用 KVL 可写出式(3-6)。对电路 2 的结点 ①、②、③应用 KCL 有

$$\begin{aligned} -\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_6 &= 0 \\ -\hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_4 &= 0 \\ -\hat{i}_4 - \hat{i}_6 + \hat{i}_5 &= 0 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k &= u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + u_3 \hat{i}_3 + u_4 \hat{i}_4 + u_5 \hat{i}_5 + u_6 \hat{i}_6 \\ &= u_{n1}(-\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_6) + u_{n2}(-\hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_4) + u_{n3}(-\hat{i}_4 + \hat{i}_5 - \hat{i}_6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

此证明可推广到任何具有 n 个结点和 b 条支路的两个电路, 只要它们具有相同的图。定理 2 涉及两个相同结构的电路(或者同一电路在不同时刻的支路电压和电流)所必然遵循的规律, 所以不能用功率守恒来解释。它具有类似功率之和的形式, 故有时称之为拟功率守恒。同样, 定理 2 适用于任何集总参数电路。

3.5 互易定理

互易性是一类特殊的线性网络的重要性质。一个具有互易性的网络在输入端(激励)与输出端(响应)互换位置后, 同一激励所产生的响应并不改变。具有互易性的网络叫互易网络, 互易定理是对电路的这种性质所进行的概括, 它广泛应用于网络的灵敏度分析和测量技术等方面。

3.5.1 互易定理的一般形式

如图 3-22 所示, 若 $i_1 = i'_1$, 则端点 1 与 1' 构成一个端口; 若 $i_2 = i'_2$, 则端点 2 与 2' 构成一个端口, 这样的电阻网络叫双口电阻网络(或二端口)。

既无独立源也无受控源的线性电阻网络 N_R , 两个端口分别接任意外电路时, 在端口及内部各条支路将分别产生电流

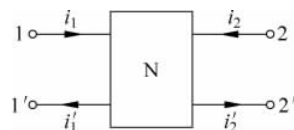


图 3-22 二端口

i_k, \hat{i}_k 及电压 u_k, \hat{u}_k , 如果各端口及支路的电流、电压选取关联参考方向, 如图 3-23 所示, 由特勒根定理 2 可知

$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b u_k \hat{i}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

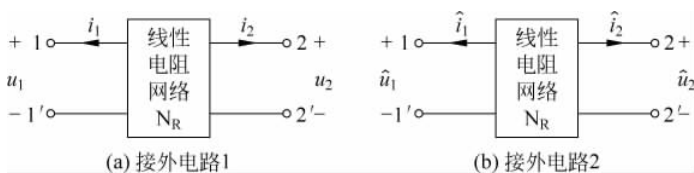


图 3-23 互易定理

又因为

$$\begin{cases} u_k = R_k i_k \\ \hat{u}_k = R_k \hat{i}_k \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} u_k \hat{i}_k = R_k i_k \hat{i}_k \\ \hat{u}_k i_k = R_k \hat{i}_k i_k \end{cases}$$

所以, 对双口电阻网络 N 有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 \quad (3-8)$$

式(3-8)即互易定理的一般形式。互易定理具有三种特殊形式。

3.5.2 互易定理形式 1

对一个仅由线性电阻组成的网络 N_R , 在端口 1-1' 间接入电压源 u_s , 它在端口 2-2' 间产生短路电流 i_2 (见图 3-24(a)); 在端口 2-2' 间接入电压源 \hat{u}_s , 它在端口 1-1' 间产生短路电流 \hat{i}_1 (见图 3-24(b))。有

$$\frac{i_2}{u_s} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_s} \quad (3-9)$$

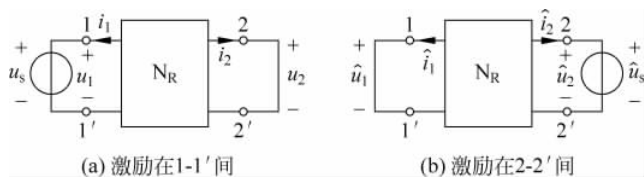


图 3-24 互易定理形式 1

证明: 根据互易定理一般形式, 即式(3-8)可知

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

由图 3-24 可知, $u_2 = \hat{u}_1 = 0$, 代入式(3-8)中有

$$u_1 \hat{i}_1 = \hat{u}_2 i_2$$

又因为 $u_1 = u_{s1}$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_s$, 则有

$$\frac{i_2}{u_s} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_s}$$

互易定理 1 得证。特殊情况, 若 $u_s = \hat{u}_s$, 则有 $i_2 = \hat{i}_1$ 。

3.5.3 互易定理形式 2

对于仅由线性电阻组成的网络 N_R , 在端口 1-1' 间接入电流源 i_s , 它在端口 2-2' 间产生开路电压 u_2 , 如图 3-25(a) 所示; 在端口 2-2' 间接入电流源 \hat{i}_s , 它在端口 1-1' 间产生开路电压 \hat{u}_1 , 如图 3-25(b) 所示, 则有

$$\frac{u_2}{i_s} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{i}_s} \quad (3-10)$$

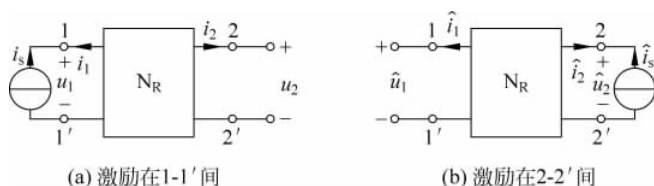


图 3-25 互易定理形式 2

证明: 由互易定理一般形式, 即式(3-8)可知

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

由图 3-25 知 $i_2 = \hat{i}_1 = 0$, 代入式(3-8)中有

$$u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1$$

又因为 $i_1 = -i_s$, $\hat{i}_2 = -\hat{i}_s$, 故有

$$\frac{u_2}{i_s} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{i}_s}$$

互易定理 2 得证。特殊情况, 若 $i_s = \hat{i}_s$, 则有 $u_2 = \hat{u}_1$ 。

3.5.4 互易定理形式 3

对于仅由线性电阻组成的网络 N_R , 在端口 1-1' 间接入电流源 i_s , 它在端口 2-2' 间产生短路电流 i_2 (见图 3-26(a)); 在端口 2-2' 间接入电压源 \hat{u}_s , 它在端口 1-1' 间产生开路电压 \hat{u}_1 (见图 3-26(b)), 则有

$$\frac{i_2}{i_s} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_s} \quad (3-11)$$

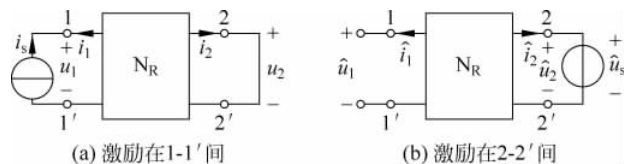


图 3-26 互易定理形式 3

证明：由互易定理一般形式，即式(3-8)可知

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

由图 3-26 知 $u_2 = \hat{i}_1 = 0$ ，代入式(3-8)中有

$$\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 = 0$$

又因为 $i_1 = -i_s$ ， $\hat{u}_2 = \hat{u}_s$ ，则有

$$\frac{i_2}{i_s} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_s}$$

互易定理 3 得证。特殊情况，若 i_s 和 \hat{u}_s 在数值上相等，则 i_2 和 \hat{u}_1 在数值上也相等。

总结互易定理的三种形式，可以得出以下结论：对于一个仅含线性电阻的电路，在单一激励下产生的响应，当激励和响应互换位置时，其比值保持不变。应用互易定理应注意以下几点：

- (1) 该定理只适用于不含受控源的单个独立源激励的线性网络。
- (2) 要注意定理中激励与响应的参考方向。

例 3-10 已知在图 3-27 所示的电路中，图 3-27(a) 电路在电压源 u_{s1} 的作用下，电阻 R_2 上的电压为 u_2 。求图 3-27(b) 所示的电路在电流源 i_{s2} 的作用下，电流 i_1 的值。

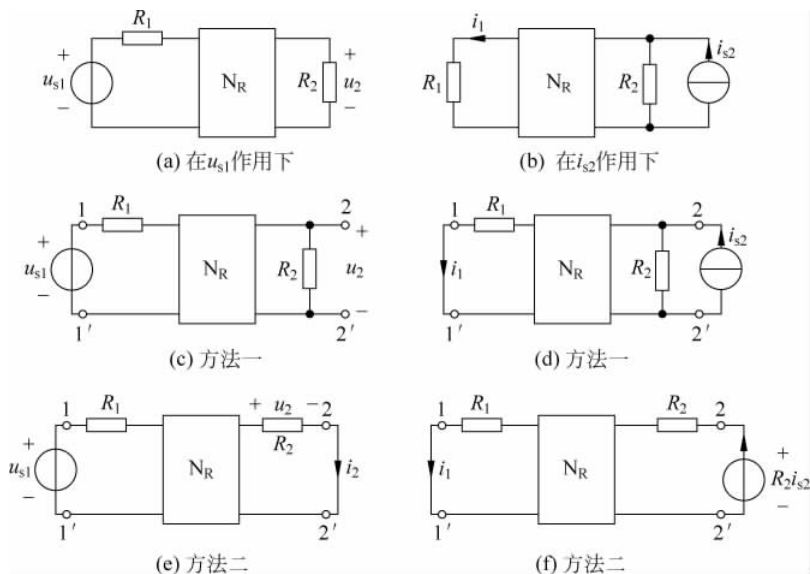


图 3-27 例 3-10 图

解:

方法一:

将电阻 R_1 、 R_2 和网络 N_R 当作一个新的电阻网络,如图 3-27(c)、图 3-27(d)所示。此时根据互易定理 3 的表达式(3-11),有

$$\frac{i_1}{i_{s2}} = \frac{u_2}{u_{s1}}$$

所以

$$i_1 = \frac{u_2}{u_{s1}} i_{s2}$$

方法二:

改变电路的画法,如图 3-27(e)、图 3-27(f)所示,可与互易定理 1 的电路对应起来。由式(3-9)有

$$\frac{i_2}{u_{s1}} = \frac{i_1}{R_2 i_{s2}}$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} i_{s2}$$

所以

$$i_1 = \frac{R_2 i_{s2}}{u_{s1}} \times \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_2 i_{s2}}{u_{s1}}$$

例 3-11 图 3-28(a)所示的电路中,求电流 I 。

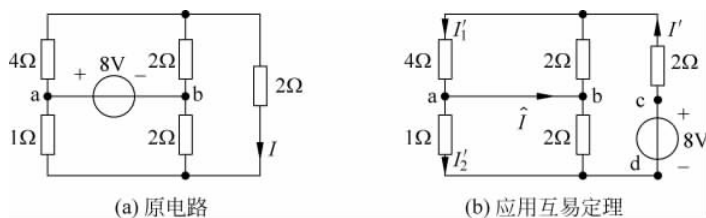


图 3-28 例 3-11 图

解: 根据互易定理可知,具有互易性的电路,激励和响应互换位置后,同一激励所产生的响应不变。将 a、b 两点间 8V 独立电压源改接在电路 c、d 两点,如图 3-28(b)所示,利用互易定理形式 1,可知此时图 3-28(b)的响应 \hat{I} 等于图 3-28(a)的响应电流 I 。

由图 3-28(b)可知

$$I' = \left(\frac{8}{2 + 4 // 2 + 1 // 2} \right) \text{A} = 2 \text{A}$$

$$I'_1 = I' \times \frac{2}{4 + 2} = \frac{2}{3} \text{A}$$

$$I'_2 = I' \times \frac{2}{1 + 2} = \frac{4}{3} \text{A}$$

所以

$$I = \hat{I} = I'_1 - I'_2 = -\frac{2}{3} \text{A}$$

习题 3

一、简答题

3-1 使用叠加定理求解电路问题时,不作用的独立电压源或者电流源置零的含义是什么?应该如何处理电路中的受控电源?

3-2 计算元件功率时可以直接使用叠加定理吗?为什么?

3-3 试述不含源一端口与含源一端口的区别和输入电阻与等效电阻的区别。

3-4 如果含源一端口内部独立电源置零后,其相应的不含源一端口内部仅包含电阻元件,应该如何求解其等效电阻?如果内部除了电阻元件外,还含有受控电源呢?

3-5 含源一端口的等效电阻可能为零或者负值吗?如果可能,试举例说明。

3-6 对于给定的含源一端口,当负载满足什么条件时,可得到最大传输功率?此时电路的效率(定义为负载吸收的功率/电源发出的功率)最高吗?

3-7 由线性电阻任意连接构成的二端口网络一定是互易网络吗?

3-8 分别说明本章五个定理是否适用于线性、非线性、时变和时不变电路。本章中例题、习题电路模型均为直流电源激励下的电阻电路为什么在各定理的论述过程中,电流和电压的符号采用了小写字母的形式?

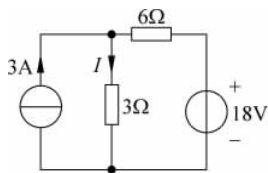
二、选择题

3-9 题 3-9 图中的电路电流 I 等于()。

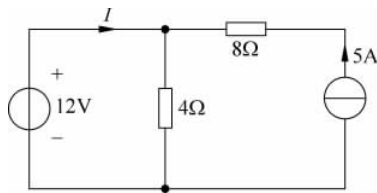
- A. -2A B. 2A C. -4A D. 4A

3-10 在题 3-10 图所示的电路中,电流 I 为()。

- A. -2A B. 12A C. -12A D. 2A



题 3-9 图



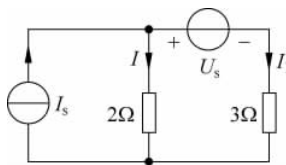
题 3-10 图

3-11 题 3-11 图所示的电路中,已知 $U_s = 15\text{V}$,当 I_s 单独作用时, 3Ω 电阻中电流 $I_1 = 2\text{A}$,那么当 I_s 、 U_s 共同作用时, 2Ω 电阻中电流 I 是()。

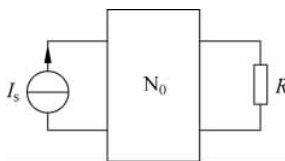
- A. -1A B. 5A C. 6A D. -6A

3-12 题 3-12 图所示的电路中 N_0 为无源线性电阻网络。已知电阻 R 消耗的功率 P 为 5W ,若电流源电流增为 $5I_s$,且电流方向相反,则 P 将为()。

- A. -25W B. 125W C. -125W D. 25W



题 3-11 图



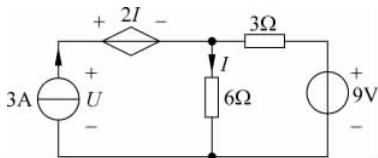
题 3-12 图

3-13 如题 3-13 图所示的电路中,独立电压源和电流源单独作用于电路时,引起的电压 U 分别等于()。

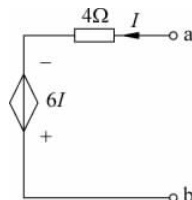
- A. 6V,6V B. 8V,12V C. 8V,8V D. 6V,8V

3-14 题 3-14 图所示一端口网络的等效电阻等于()。

- A. 2Ω B. 4Ω C. 6Ω D. -2Ω

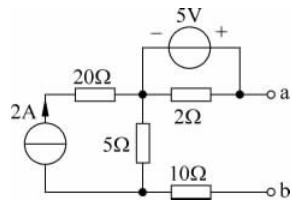
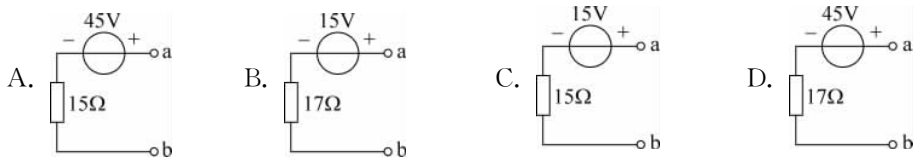


题 3-13 图



题 3-14 图

3-15 题 3-15 图所示二端网络的戴维宁等效电路为()。



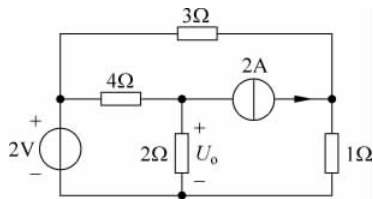
题 3-15 图

3-16 应用戴维宁定理可求得题 3-16 图所示的电路中支路电压 U_0 为()。

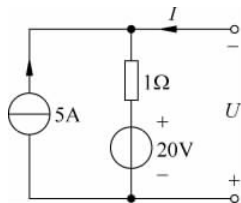
- A. $-2V$ B. $-3V$ C. $\frac{10}{3}V$ D. $-1.2V$

3-17 题 3-17 图所示二端网络的电压电流关系为()。

- A. $U=25+I$ B. $U=25-I$ C. $U=-25-I$ D. $U=-25+I$



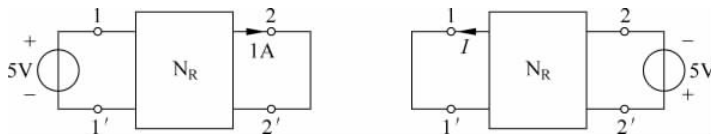
题 3-16 图



题 3-17 图

3-18 题 3-18 图中电流 I 为()。

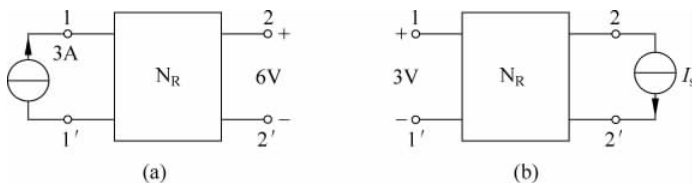
- A. 1A B. $-1A$ C. 5A D. $-5A$



题 3-18 图

3-19 题 3-19 图中电流 I_s 为()。

- A. 3A B. -3A C. -1.5A D. 1.5A



题 3-19 图

3-20 题 3-20 图中电压 U 为()。

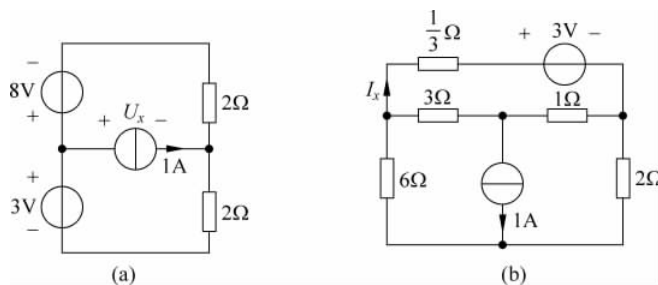
- A. 2V B. -2V C. 1V D. -1V



题 3-20 图

三、计算题

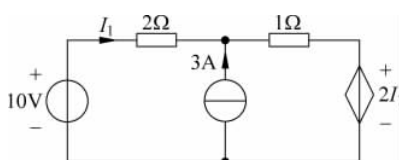
3-21 利用叠加定理求题 3-21(a)图中的 U_x 和 3-21(b)图中的 I_x 。



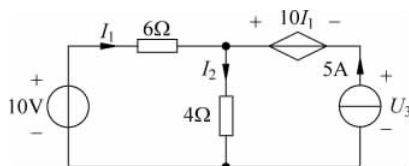
题 3-21 图

3-22 试用叠加定理求题 3-22 图中的 I_1 。

3-23 电路如题 3-23 图所示,求电压 U_3 。



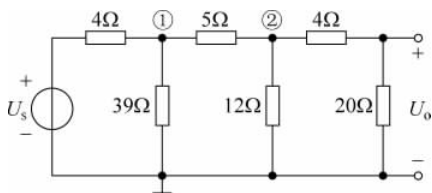
题 3-22 图



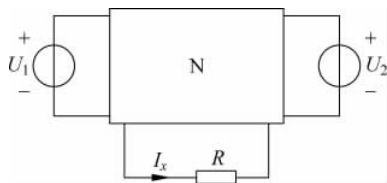
题 3-23 图

3-24 试求题 3-24 图所示的梯形电路中各支路电流、结点电压和 $\frac{U_o}{U_s}$, 其中 $U_s = 10V$ 。

3-25 电路如题 3-25 图所示。(1) N 仅由线性电阻组成时, 当 $U_1 = 2V, U_2 = 3V$ 时, $I_x = 20A$; 当 $U_1 = -2V, U_2 = 1V$ 时, $I_x = 0$, 求 $U_1 = U_2 = 5V$ 时, I_x 为何值。(2) N 中接入独立源, 当 $U_1 = U_2 = 0$ 时, $I_x = -10A$, 且(1)的条件仍然适用, 再求 $U_1 = U_2 = 5V$ 时, I_x 为何值。

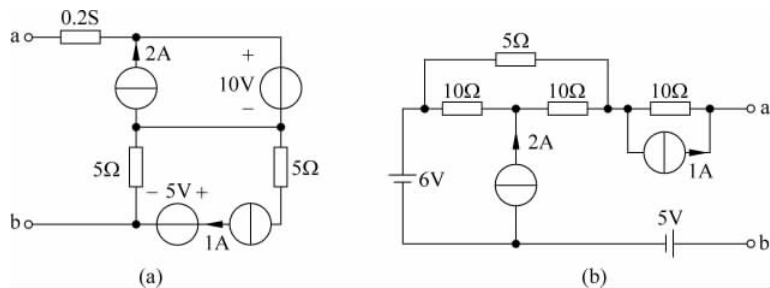


题 3-24 图



题 3-25 图

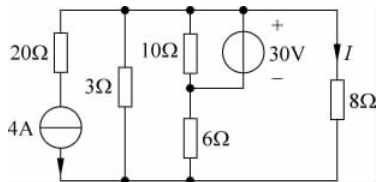
3-26 求题 3-26 图所示的各电路在 a-b 端口的戴维宁等效电路或诺顿等效电路。



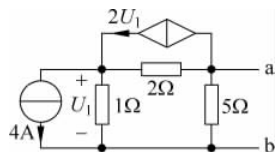
题 3-26 图

3-27 用戴维宁定理求题 3-27 图中的电流 I 。

3-28 求题 3-28 图所示电路的戴维宁等效电路和诺顿等效电路。



题 3-27 图

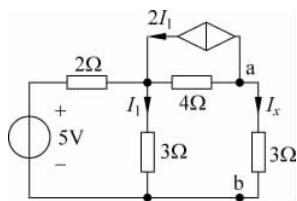


题 3-28 图

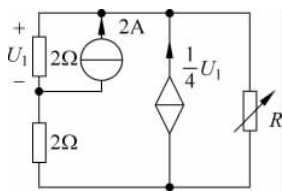
3-29 求题 3-29 图所示的电路中的电流 I_x 。

3-30 题 3-30 图所示的电路中 R 可变, 试问 R 为多大时, 负载获得最大功率? 并求此最大功率 P_{\max} 。

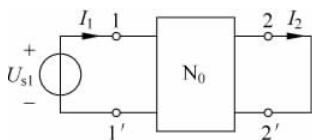
3-31 题 3-31 图所示的电路中 N_0 为无源线性电阻网络。题 3-31 图(a)中 $U_{s1} = 20V$, $I_1 = 10A, I_2 = 2A$; 题 3-31 图(b)中, $I_1' = 4A$, 那么 U_{s2} 应为何值?



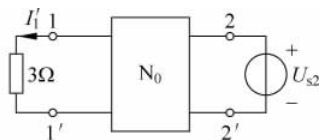
题 3-29 图



题 3-30 图



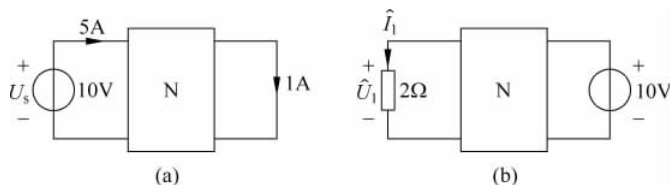
(a)



(b)

题 3-31 图

3-32 题 3-32 图所示的电路为线性电阻元件构成的二端口网络,当输入端口接 $U_s = 10\text{V}$ 的电压源、输出端口短接时,输入端电流为 5A ,输出端电流为 1A ;如果把电压源移至输出端口,且输入端口接一个 2Ω 的电阻元件,试问 2Ω 电阻上电压 \hat{U}_1 为多少?

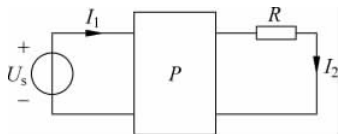


题 3-32 图

四、思考题

3-33 同一个电路问题,解决的方法可能有很多种,例如利用第 1 章介绍的元件 VCR 关系及 KCL、KVL 方程,第 2 章介绍的回路电流法、结点电压法等和本章介绍的电路定理。在面对一个具体电路问题时,应该如何选择合适的方法呢?

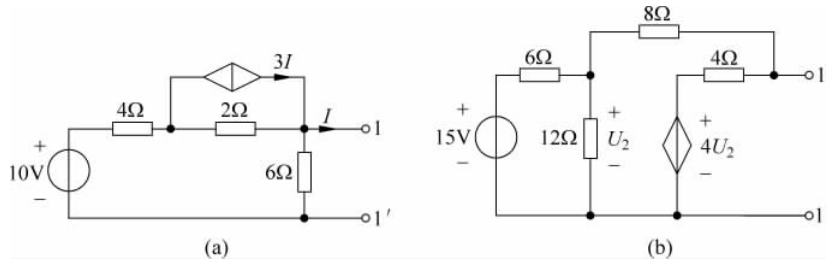
3-34 题 3-34 图所示电路中, P 为无源电阻网络。当 $R=R_1$ 时, $I_1=5\text{A}$, $I_2=2\text{A}$;当 $R=R_2$ 时, $I_1=4\text{A}$, $I_2=1\text{A}$ 。求 $R=\infty$ 时,电流 I_1 为何值?



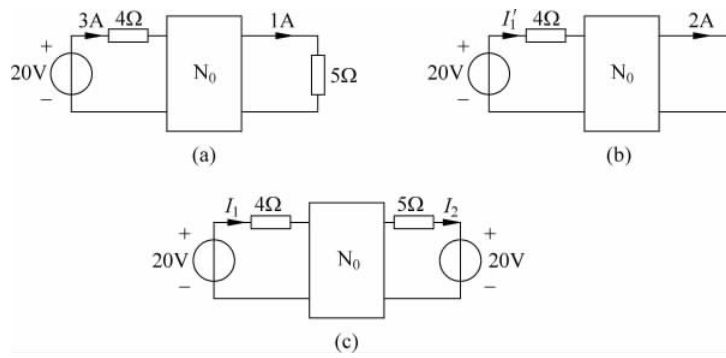
题 3-34 图

3-35 求题 3-35 图所示一端口的戴维宁或诺顿等效电路,并解释所得结果。

3-36 题 3-36 图所示的电路中 N_0 是仅由电阻组成的网络。根据题 3-36 图 (a) 和题 3-36 图 (b) 的已知数据,求题 3-36 图 (c) 中的电流 I_1 和 I_2 。



题 3-35 图



题 3-36 图