第 3 章　微积分问题的计算机求解

Isaac Newton（1643–1727）和 Gottfried Wilhelm Leibniz（1646–1716）创立的微积分学是很多科学分支的基础。单变量与多元函数微积分、函数极限、级数求和、Taylor 级数展开、Fourier 级数展开、常微分方程等问题直接求解是微积分学的重要内容。MATLAB 的符号运算工具箱可以直接求解这样问题的解析解。本章 3.1 节中给出基于 MATLAB 符号运算工具箱中函数的单边、多边极限问题及多元函数极限问题的求解方法，3.2 节介绍各种微分问题的计算机求解方法，3.3 节介绍各种积分问题的解析求解方法。3.4 节将介绍给定单变量函数与多元函数的 Taylor 幂级数展开、给定函数的 Fourier 级数逼近方法，并利用 MATLAB 的绘图功能研究有限项拟合的拟合效果和适用范围；还介绍一般级数的求和与求积方法等。3.5 节中将介绍的两类曲线积分和两类曲面积分及其 MATLAB 求解方法补充了微积分学的计算机求解方式，这部分内容大部分均应该是解析求解和解析推导，属于计算机代数研究的领域，用传统的数值分析方法是不能求解的。对不熟悉计算机代数系统开发的读者来说，用 C 这样的底层语言直接进行解析解推导有极大难度，必须使用计算机数学语言完成这类问题的分析与求解。通过这几节内容的初步学习，读者可能会发现借助计算机去求解曾令很多学生望而生畏的吉米多维奇《数学分析习题集》[1] 中的绝大部分计算问题变得轻而易举。

在实际科学与工程研究中，微积分问题解析求解有时也面临困难。例如，若函数本身未知，只由科学实验测出的一些实验数据，则无法用推导的方式通过数据对其代表的函数求导或求积分，而需要通过数值的方式进行数值微积分运算。3.6 节中将单变量与多元函数的数值微积分计算问题。在实际应用中还有很多函数积分的解析解不存在，所以需要通过数值积分的算法进行近似。3.7 节中将介绍用数值算法求取函数积分及重积分问题的求解方法。

作为本章内容的补充，8.2 节将介绍基于样条插值的数值微积分方法；如果微积分的阶次可以选择为非整数，还可以引入一个新的学科——分数阶微积分学。本书 10.6 节将系统介绍分数阶微积分学问题及其 MATLAB 求解方法。

3.1　极限问题的解析解

应用 MATLAB 语言的符号运算工具箱，可以很容易地求解极限问题、微分问题、积分问题等微积分基本问题。利用本节和后面两节介绍的方法，读者应该能立即具备依赖 MATLAB 语言及其符号运算工具箱中提供的强大函数直接求解一般微积分运算问题的能力。本节主要侧重各种极限问题的求解方法，包括单变量极限、单边极限和多重极限等问题。

3.1.1　单变量函数的极限

假设已知函数 $f(x)$，则极限问题的一般描述为

$$L=\lim_{x\to x_0} f(x) \tag{3-1-1}$$

其物理意义是当自变量x无限接近x_0时函数$f(x)$的取值,其中,x_0可以是一个确定的值,也可以是无穷大,例如$x\to\infty$。对某些函数来说,还可以如下定义单边极限(或称左右极限)问题。

$$L_1=\lim_{x\to x_0^-}f(x),\quad 或\quad L_2=\lim_{x\to x_0^+}f(x) \tag{3-1-2}$$

前者表示x从左侧趋近于x_0点,所以又称为左极限,后者相应地称为右极限。极限问题在MATLAB符号运算工具箱中可以使用`limit()`函数直接求出,该函数的调用格式为

```
L=limit(f,x,x0)                      %求极限
L=limit(f,x,x0,'left' 或'right')     %求单边极限
```

在求解之前应该先声明自变量x,再用符号表达式的形式定义原函数f,若x_0为∞,则可以用`inf`直接表示。如果需要求解左右极限问题,还需要给出`'left'`或`'right'`选项。

如果函数中只有一个符号变量,则可以在调用语句中忽略该变量。由`symvar()`函数可以提取出符号表达式f中符号变量的列表,该函数的调用格式为`list=symvar(f)`。

下面将通过例子演示MATLAB求解极限的方法。

例3-1 先考虑一个非常简单问题的求解:$\lim\limits_{x\to 0}\sin x/x$。

解 学过微积分的人都知道该极限为1。可以用这个例子来演示本书介绍的三步求解方法:

①了解该极限的含义;②将问题用MATLAB描述出来;③调用MATLAB函数求解。

即使对没有学过极限的概念读者而言,也可以用语言解释明白函数极限的物理意义,就是当x接近0时$\sin x/x$函数接近的值——这就很自然地完成了三步求解方法中的第一步。第二步需要做的是先声明符号变量x,再将函数$\sin x/x$表示出来,第三步,调用`limit()`函数求极限的值。用MATLAB语句可以直接求解原问题,得出其解为1。

```
>> syms x; f=sin(x)/x; limit(f,x,0) %直接求解极限问题
```

由于在符号表达式f中,x为标量型符号变量,所以没有必要使用点运算。另外由于x是唯一变量,所以该问题可以更简单地用下面的语句直接求解

```
>> v=symvar(f), L=limit(f,0)   %第一个语句只用于演示变量提取,不必给出
```

例3-2 试求解极限问题$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+a/x\right)^x\sin(b/x)$。

解 利用MATLAB语言,应该首先声明a,b和x为符号变量,然后定义函数或序列表达式,最后调用`limit()`函数求出给定函数的极限,得出的极限为e^ab。从下面的语句看,求解这样的问题和例3-1对用户来说一样简单。

```
>> syms x a b; f=x*(1+a/x)^x*sin(b/x); L=limit(f,x,inf) %直接计算极限
```

本例中由$\boldsymbol{v}$=symvar(f)命令得出$\boldsymbol{v}$为向量$[a,b,x]$,故调用`limit()`函数时不能略去x变量。

例3-3 试求解单边极限问题$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$。

解 利用MATLAB语言的`limit()`函数,可以容易地求出单边极限为12。

```
>> syms x; f(x)=(exp(x^3)-1)/(1-cos(sqrt(x-sin(x)))); c=limit(f,x,0,'right')
```

用下面的语句还可以绘制出$(-0.1,0.1)$区间的函数曲线,如图3-1所示。

```
>> x0=-0.1:0.001:0.1; x0=x0(x0~=0); y0=f(x0); plot(x0,y0,0,c,'o')
```

可见,对这个例子来说,即使使用`limit(f,x,0)`命令也能求出函数极限值是12。

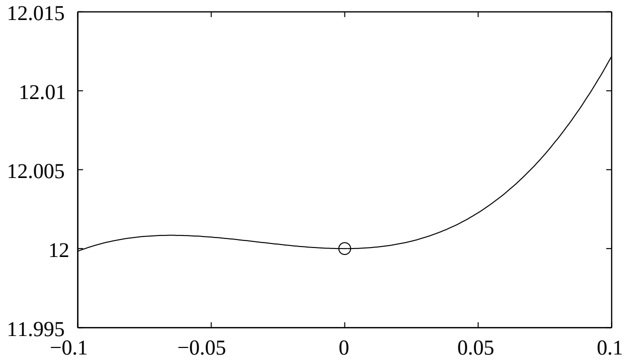


图 3-1 $x=0$ 附近的曲线

回顾原始问题,其中采用 $x \to 0^+$ 是因为它可以保证根号内的值为非负数。事实上,即使是负数,$\cos \mathrm{j}\alpha = (\mathrm{e}^{\alpha} + \mathrm{e}^{-\alpha})/2$ 也是有定义的,且其结果为实数。这对本问题没有影响。但对某些分段函数来说,单边极限是不同的。

若关于某点 a,函数 $f(t)$ 的左右极限相同,则该点称为第一类间断点,否则称为第二类间断点。下面的例子演示一个简单的第二类间断点问题。

例 3-4 试分别求出 $\tan t$ 函数关于 $\pi/2$ 点处的左右极限。

解 由下面命令可以分别求出函数的左右极限,分别为 $L_1 = \infty$ 和 $L_2 = -\infty$。

```
>> syms t; f=tan(t); L1=limit(f,t,pi/2,'left'), L2=limit(f,t,pi/2,'right')
```

例 3-5 试求出序列的极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$。

解 序列极限的求解方法与函数极限完全一致:先声明符号变量,然后用符号表达式描述序列,最后调用 `limit()` 函数直接求解。由下面的语句可以得出此序列的极限等于 0。

```
>> syms n; f=n^(2/3)*sin(factorial(n))/(n+1); F=limit(f,n,inf) %直接计算极限
```

例 3-6 试求出极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n(x^2+1)+x}\right)\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n}\right)$。

解 该极限表达式既包括序列又包括函数,但这丝毫未给求解带来任何困难,可以声明两个符号变量,n 和 x,这样用下面语句可以直接得出问题的极限为 $\mathrm{e}^x/(x^2+1)$。该极限问题的求解容易程度对用户来说也与 $\sin x/x$ 极限相仿。

```
>> syms x n; f=n*atan(1/(n*(x^2+1)+x))*tan(pi/4+x/2/n)^n; limit(f,n,inf)
```

对序列极限而言,一般没有必要将符号变量 n 设置为整数型符号变量。

3.1.2 区间函数的极限运算

在引入区间函数概念之前先讨论一下下面的例子。

例 3-7 试求出 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n$ 和 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n$。

解 早期的符号运算工具箱没有办法解决此问题,新版的 MATLAB 符号运算工具箱由于支持分段函数,所以可以较好地解决此类问题,具体的语句如下

```
>> syms x n real; f=x^n; L1=limit(f,n,inf), L2=limit(f,x,inf)
```

得出的结果均为分段函数，其中，L_2 的描述为 piecewise([$n==0$,1],[$0<n$,Inf],[$n<0$,0])，这两个极限的结果可以解读成（其中，L_1 结果最末一个条件似乎有误，应该包括 $x=0$，即 $-1<x<1$）

$$L_1=\begin{cases}1, & x=1\\ \infty, & x>1\\ \text{无极限}, & x<-1\\ 0, & 0<x<1\text{或}-1<x<0,\end{cases}\qquad L_2=\begin{cases}1, & n=0\\ \infty, & n>0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

有些函数，如 $\sin x$，在 $x\to\infty$ 的极限是不存在的，但可以通过MuPAD函数的选项求取其极限范围，可以通过下面的语句直接调用MuPAD底层函数求解相关问题

```
L=feval(symengine,'limit',f,'x=infinity','Intervals')
```

其中，feval() 函数可以直接通过符号运算引擎 symengine 调用MuPAD的底层函数 limit()，其变元为MuPAD写法。

例 3-8 假设 $a,b>0$，试求出 $f(t)=a\sin 8x^2+b\cos(2x-2)$ 函数在 $x\to\infty$ 时极限的区间。

解 利用底层的MuPAD命令可以解出该极限的区间为 $(-a-b,a+b)$。

```
>> syms a b positive, syms x; f=a*sin(8*x^2)+b*cos(-2*x+2);
   L=feval(symengine,'limit',f,'x=infinity','Intervals') %求区间极限
```

MATLAB符号运算工具箱的新引擎——MuPAD支持分段函数的使用，分段函数的描述需要通过底层MuPAD语句来实现，这对一般MATLAB使用者来说可能不方便，所以可以编写一个接口函数 piecewise() 来定义分段函数

```
function f=piecewise(varargin), str=[];
try   %试探结构:如果输入变量成对出现则处理,否则报错
   for i=1:2:length(varargin), %处理分段函数对
      str=[str,'[',varargin{i},',',varargin{i+1},'],'];
   end
catch, error('Input arguments should be given in pairs.'), end
f=feval(symengine,'piecewise',str(1:end-1)); %构造总的分段函数
```

该函数的调用格式为 `f=piecewise(var1,var2,…)`，其中，输入变量 var 应该成对出现，都应该由字符串给出，前面一个是条件，后面一个是该条件下的函数表达式，其中条件中的逻辑运算应该由关键词 and、or 和 not 来表示。

该函数使用了 try, catch 结构，确保输入变量成对出现，否则将给出错误信息。由于生成的字符串最后一个字符是多余的逗号，所以使用 end-1 下标舍弃它。

例 3-9 考虑例 2-29 的饱和非线性函数 $y=\begin{cases}1.1\,\mathrm{sign}(x), & |x|>1.1\\ x, & |x|\leqslant 1.1\end{cases}$ 试绘制其曲线。

解 可以首先描述分段函数，然后绘制该函数曲线，其结果与例 2-29 中的完全一致。值得指出的是，由于符号运算本身的局限性，分段函数定义的符号表达式不能用 ezplot() 函数直接绘制。

```
>> f(x)=piecewise('abs(x)>1.1','1.1*sign(x)','abs(x)<=1.1','x'); %分段函数
   syms x; x0=-3:0.01:3; f1=f(x0); plot(x0,f1) %绘制饱和函数
```

如果 $|x|\leqslant 1.1$ 在数学上表示成 $-1.1\leqslant x\leqslant 1.1$，也可以将其理解成 $x\geqslant -1.1$ 且 $x\leqslant 1.1$，这时相应的字符串表示应该为 'x>=−1.1 and x<=1.1'。

3.1.3 多元函数的极限

多元函数的极限分为两类极限问题：一类是累极限；另一类是重极限。假设有二元函数 $f(x,y)$，该函数的累极限定义为

$$L_1=\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0}f(x,y)\right],\quad 或\quad L_2=\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right] \tag{3-1-3}$$

其中，x_0，y_0 既可以是数值也可以是函数。在MATLAB下，函数的累极限可以通过下面的语句直接求出，该函数嵌套地使用了 `limit()` 函数

```
L1=limit(limit(f,x,x0),y,y0)   或   L1=limit(limit(f,y,y0),x,x0)
```

例 3-10 试求出二元函数累极限 $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left[\lim_{x\to 1/\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-1/(y^2+x^2)}\frac{\sin^2 x}{x^2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{x+a^2y^2}\right]$。

解 由于涉及 $\sqrt{y}$，在MATLAB下应该假设 y 为正数（早期版本无须指出），所以本例中的问题可以用下面的语句直接解出，其极限值为 e^{a^2}。

```
>> syms x a; syms y positive; %声明符号变量,且令y为正
   f=exp(-1/(y^2+x^2))*sin(x)^2/x^2*(1+1/y^2)^(x+a^2*y^2); %描述原函数
   L=limit(limit(f,x,1/sqrt(y)),y,inf)                     %直接求解累极限问题
```

除了累极限之外，还可以定义出函数的重极限

$$L=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y) \tag{3-1-4}$$

在一般情况下，如果两个累极限的值相等，则函数的重极限很可能等于这个值。另外，也可能出现这两个语句都可以执行且得出不同结果的情形，或二者相同但双重极限不存在的情形，使用时应慎重，可以尝试从不同的方向趋近目标，观察是否能得出一致结论。

例 3-11 试求二重极限 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$。

解 该函数的两个累极限可以由下面语句求出，均为 0，一般可以认为原函数的二重极限也为 0。为慎重起见，当然还可以加入其他方向的极限来验证，如 $x\to y^2$，$y\to x^2$ 等，都将给出一致的结论。

```
>> syms x y; f=(x*y/(x^2+y^2))^(x^2);  %描述二元函数并求各个方向上累极限
   L1=limit(limit(f,x,inf),y,inf), L2=limit(limit(f,y,inf),x,inf)
   L3=limit(limit(f,x,y^2),y,inf), L4=limit(limit(f,y,x^2),x,inf)
```

例 3-12 试判断重极限 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在。

解 如果想真正从理论上计算出某个函数的重极限是很困难的事，因为要考虑到所有方向上的累极限。相比之下，要指出重极限不存在则容易得多，因为只要证明某两个方向上的累极限不同即可。例如，假设 $y=rx$，r 为符号变量，而累极限又和 r 有关，则足以说明原问题的重极限不存在。对本问题而言可以由下面的语句求出累极限。

```
>> syms r x y; f(x,y)=x*y/(x^2+y^2); L=limit(f(x,r*x),x,0) %沿某个方向求极限
```

这样得出的结果为 $L=r/(r^2+1)$，是与 r 有关的，所以重极限不存在。

3.2　函数导数的解析解

3.2.1　函数的导数和高阶导数

如果函数可以描述为 $y=f(x)$，则该函数对自变量 x 的一阶导数的定义为

$$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{3-2-1}$$

函数对 x 的二阶导数就是 $f'(x)$ 对 x 的导数，类似地，还可以定义出函数的高阶导数。

如果函数和自变量都已知，且均为符号变量，则可以用 `diff()` 函数解出给定函数的各阶导数。`diff()` 函数的调用格式为 f_1=`diff(`f,x,n`)`，其中，f 为给定函数，x 为自变量，这两个变量均应该为符号型的，n 为导数的阶次，若省略 n 则将自动求取一阶导数；如果 f 表达式中只有一个符号变量，还可以省略变量 x。

例 3-13 给定函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+4x+3}$，试求出 $\dfrac{\mathrm{d}^4f(x)}{\mathrm{d}x^4}$。

解 这是本书开始时给出的第二个例子。可以首先声明 x 为符号变量，再用 MATLAB 语句描述原函数，然后调用 `diff()` 函数就能直接得出函数的一阶导数。

```
>> syms x; f(x)=sin(x)/(x^2+4*x+3); f1=diff(f)
```

可以得出如下的结果

$$f_1(x)=\frac{\cos x}{x^2+4x+3}-\frac{(2x+4)\sin x}{(x^2+4x+3)^2}$$

由 `ezplot()` 函数可以直接绘制出原函数与得出一阶导数函数的曲线，如图 3-2 所示。

```
>> ezplot(f,[0,5]), hold on; ezplot(f1,[0,5]) %在相同坐标系下绘制原函数及其导数
```

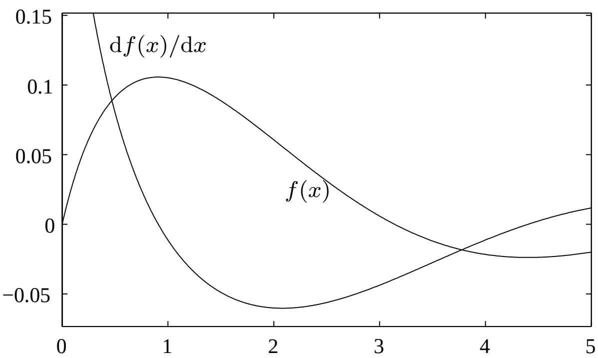


图 3-2　函数及其一阶导数图示

原函数的四阶导数可以直接由下面的语句求出，该结果在例 1-2 中已经给出，这里不再赘述。

```
>> f4=diff(f,x,4); latex(f4)   %求解四阶导数，并转换成LaTeX字符串
```

MATLAB 现成的 `diff()` 函数还适合于求解给定函数更高阶的导数。例如，下面给出的命令一般可以在 4 s 内获得该函数的 100 阶导函数（MATLAB R2008a 及早期版本所需时间不到 1 s）。

```
>> tic, diff(f,x,100); toc %求该函数的100阶导数并测耗时
```

例 3-14 试推导函数 $F(t)=t^2f(t)\sin t$ 的三阶导函数公式，并得出 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$ 时的三阶导数，将这样得出的结果与直接求导的结果相比较。

解 用 syms 函数可以定义出函数表达式 $f(t)$，这样由下面的语句可以直接推导出 $F(t)$ 函数的三阶导函数公式

```
>> syms t f(t); F=t^2*f*sin(t); G=simplify(diff(F,t,3)) %直接求导
```

得出的结果为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3F(t)}{\mathrm{d}t^3}=&\left[\frac{\mathrm{d}^3f(t)}{\mathrm{d}t^3}\sin t+3\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\cos t-3\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\sin t-f(t)\cos t\right]t^2\\&+\left[6\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\sin t+12\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\cos t-6f(t)\sin t\right]t+6\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\sin t+6f(t)\cos t\end{aligned}$$

下面语句则可以直接推导出当 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$ 时原函数的三阶导数，与直接求导结果完全一致。得出的导函数为 $y_1(t)=2\mathrm{e}^{-t}\left(t^2\cos t+t^2\sin t-6t\cos t+3\cos t-3\sin t\right)$。

```
>> y1=simplify(subs(G,f,exp(-t))), simplify(diff(t^2*sin(t)*exp(-t),3)-y1)
```

例 3-15 试求矩阵函数 $\boldsymbol{H}(x)=\begin{bmatrix}4\sin 5x & \mathrm{e}^{-4x^2}\\ 3x^2+4x+1 & \sqrt{4x^2+2}\end{bmatrix}$ 的三阶导数矩阵。

解 MATLAB 语言的 diff() 函数可以直接用于已知矩阵函数 $\boldsymbol{H}(x)$ 的导数计算，即对 $\boldsymbol{H}(x)$ 的每个元素 $h_{i,j}(x)$ 直接求导，构成新的导数矩阵 $\boldsymbol{N}(x)$。

```
>> syms x; H=[4*sin(5*x), exp(-4*x^2); 3*x^2+4*x+1, sqrt(4*x^2+2)]
   N=diff(H,x,3)  %先输入矩阵函数，再直接求取矩阵的三阶导数
```

这样得出的三阶导数矩阵为

$$\boldsymbol{N}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)=\begin{bmatrix}-500\cos 5x & 192x\,\mathrm{e}^{-4x^2}-512x^3\,\mathrm{e}^{-4x^2}\\ 0 & 12\sqrt{2}(2x^3-1)/(2x^2+1)^{3/2}\end{bmatrix}$$

3.2.2 多元函数的偏导数

MATLAB 的符号运算工具箱中并未提供求取偏导数的专门函数，这些偏导数仍然可以通过 diff() 函数直接实现。假设已知二元函数 $f(x,y)$，若想求 $\partial^{m+n}f/(\partial x^m\partial y^n)$，则可以用下面的函数嵌套地求出 f_1=diff(diff(f,x,m),y,n) 或 f_1=diff(diff(f,y,n),x,m)，在较新的版本中，还允许使用 f_1=diff(f,$\underbrace{x,\cdots,x}_{m\text{项}}$,$\underbrace{y,\cdots,y}_{n\text{项}}$) 这样的命令。

例 3-16 试求出二元函数 $z=f(x,y)=(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}$ 的一阶偏导数，并用图形表示。

解 用下面的语句可直接求出 $\partial z/\partial x$ 与 $\partial z/\partial y$

```
>> syms x y; z(x,y)=(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y); %用函数格式表示
   zx=simplify(diff(z,x)), zy=diff(z,y)          %直接求两个偏导数
```

其数学形式（又称为梯度）分别为

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}(-2x+2+2x^3+x^2y-4x^2-2xy)$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-x(x-2)(2y+x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}$$

在 $x\in(-3,2)$，$y\in(-2,2)$ 区域内生成网格，则可以分别得出原函数及其偏导数的数值解。这样，可以直接用下面的语句绘制出原函数的三维曲面，与图 2-12(a) 给出的完全一致。

```
>> [x0,y0]=meshgrid(-3:.2:2,-2:.2:2); z0=double(z(x0,y0));
   surf(x0,y0,z0), zlim([-0.7 1.5]) %直接绘制三维曲面,限定z轴显示范围
```

既然计算出了对两个自变量的一阶偏导数,则可以调用quiver()函数绘制出引力线,该引力线可以叠印在由contour()函数绘制出的等值线上,如图3-3所示。如果在曲面上某点放置一个球,则球将沿箭头的方向向下滚动,滚动的速度由箭头的长度表示。引力线绘制函数的详细信息可以由doc quiver命令进一步列出。

```
>> contour(x0,y0,z0,30), hold on; zx0=double(zx(x0,y0)); %绘制等高线
   zy0=double(zy(x0,y0)); quiver(x0,y0,-zx0,-zy0)       %负梯度表示从高到低
```

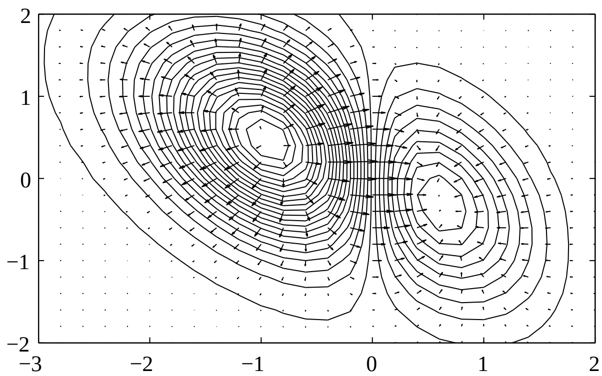


图 3-3　二元函数梯度的引力线

例3-17 已知三元函数 $f(x,y,z)=\sin(x^2y)\mathrm{e}^{-x^2y-z^2}$,试求出偏导数 $\dfrac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial x^2\partial y\partial z}$。

解 由下面的语句声明自变量及函数,则可以用MATLAB语句立即得出所需的偏导函数

```
>> syms x y z; f(x,y,z)=sin(x^2*y)*exp(-x^2*y-z^2); %用嵌套的形式求出高阶偏导数
   df=diff(f,x,x,y,z); F=simplify(df) %求高阶偏导数
```

得出的结果很冗长,其数学表示为

$$F=-4z\mathrm{e}^{-x^2y-z^2}\left[\cos\left(x^2y\right)-10\cos\left(x^2y\right)yx^2+4x^4\sin\left(x^2y\right)y^2+4\cos\left(x^2y\right)x^4y^2-\sin\left(x^2y\right)\right]$$

3.2.3　多元函数的Jacobi矩阵与Hessian矩阵

假设有n个自变量的m个函数定义为

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \quad\vdots\\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}\tag{3-2-2}$$

将相应的y_i对x_j求偏导,则得出矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 & \cdots & \partial y_1/\partial x_n\\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 & \cdots & \partial y_2/\partial x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial y_m/\partial x_1 & \partial y_m/\partial x_2 & \cdots & \partial y_m/\partial x_n\end{bmatrix}\tag{3-2-3}$$

该矩阵又称为Jacobi矩阵,它在图像处理、机器人等诸多领域中均是很有用的概念。

Jacobi 矩阵可以由 MATLAB 的符号运算工具箱中的 `jacobian()` 函数直接求得，其调用格式为 $\boldsymbol{J}$=`jacobian(`$\boldsymbol{y}$`,`$\boldsymbol{x}$`)`，其中，$\boldsymbol{x}$ 是自变量构成的向量，$\boldsymbol{y}$ 是由各个函数构成的向量。

例 3-18 已知球面坐标到直角坐标的变换公式为 $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$，试求出函数向量 $[x, y, z]$ 对自变量向量 $[r, \theta, \phi]$ 的 Jacobi 矩阵。

解 可以先声明符号变量并描述三个函数，这样可以用下面的语句求解出其 Jacobi 矩阵

```
>> syms r theta phi; x=r*sin(theta)*cos(phi); y=r*sin(theta)*sin(phi);
   z=r*cos(theta); J=jacobian([x; y; z],[r theta phi]) %直接求 Jacobi 矩阵
```

可以得出 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

对一个给定的 n 元标量函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其 Hessian 矩阵的定义为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_1\partial x_n \\ \partial^2 f/\partial x_2\partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_2^2 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_2\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f/\partial x_n\partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_n\partial x_2 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n^2 \end{bmatrix} \tag{3-2-4}$$

可见，该 Hessian 矩阵实际上就是标量函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数矩阵。新版 MATLAB 提供了 `hessian()` 函数可以直接求出原函数的 Hessian 矩阵，调用格式为 $\boldsymbol{H}$=`hessian(`f`,`$\boldsymbol{x}$`)`，其中，向量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$。早期版本的 MATLAB 符号运算工具箱并未提供 `hessian()` 函数，可以由 $\boldsymbol{H}$=`jacobian(jacobian(`f`,`$\boldsymbol{x}$`),`$\boldsymbol{x}$`)` 直接求解。

例 3-19 重新考虑例 3-16 中给出的二元函数，试求其 Hessian 矩阵。

解 下面语句可以直接求取该函数的 Hessian 矩阵

```
>> syms x y; f=(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y); H=simplify(hessian(f,[x,y]))
   H1=simplify(hessian(f,[x,y])/exp(-x^2-y^2-x*y)) %提取公共的指数后再化简
```

得出的结果（或早期版本嵌套调用 `jacobian()` 函数）为

$$\boldsymbol{H}_1 = \mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy} \begin{bmatrix} 4x-2(2x-2)(2x+y)-2x^2-(2x-x^2)(2x+y)^2+2 & 2x-(2x-2)(x+2y)-x^2-(2x-x^2)(x+2y)(2x+y) \\ 2x-(2x-2)(x+2y)-x^2-(2x-x^2)(x+2y)(2x+y) & x(x-2)(x^2+4xy+4y^2-2) \end{bmatrix}$$

标量函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 Laplace 算子定义为

$$\Delta f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right] f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{3-2-5}$$

MATLAB 可以直接计算该算子 L=`laplacian(`f`,[`x_1`,`x_2`,`$\cdots$`,`x_n`])`。

3.2.4 参数方程的导数

若已知参数方程 $y=f(t)$，$x=g(t)$，则 $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$ 可以由递推公式求出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{f'(t)}{g'(t)}\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)\frac{1}{g'(t)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{1}{g'(t)}\\ &\vdots\\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)\frac{1}{g'(t)}\end{aligned} \tag{3-2-6}$$

MATLAB并没有提供可以直接用于参数方程的高阶导数求取的函数，所以应该编写一个通用函数来完成这项工作。由前面的计算公式可见，用递归函数的格式编程比较合适，可以编写出下面的通用参数方程求导函数。

```
function result=paradiff(y,x,t,n)
if mod(n,1)~=0, error('n should positive integer, please correct')
else, if n==1, result=diff(y,t)/diff(x,t);              %递归函数的出口
   else, result=diff(paradiff(y,x,t,n-1),t)/diff(x,t); %式(3-2-6)的递归计算
end, end %用递归调用的形式求参数方程的高阶导数
```

例3-20 已知参数方程 $y=\dfrac{\sin t}{(t+1)^3}$，$x=\dfrac{\cos t}{(t+1)^3}$，试求 $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$。

解 由前面给出的函数调用格式，可以立即得出所需的高阶导数。

```
>> syms t; y=sin(t)/(t+1)^3; x=cos(t)/(t+1)^3; f=simplify(paradiff(y,x,t,3))
```

得出如下的结果

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{-3(t+1)^7\left[(t^4+4t^3+6t^2+4t-23)\cos t-(4t^3+12t^2+32t+24)\sin t\right]}{(t\sin t+\sin t+3\cos t)^5}$$

3.2.5 隐函数的偏导数

已知隐函数的数学表达式为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，则可以通过隐函数对相关变量的偏导数求出自变量之间的偏导数。具体可以用下面的公式求出 $\partial x_i/\partial x_j$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)/\partial x_j}{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)/\partial x_i} \tag{3-2-7}$$

由于 f 对 x_i，x_j 的偏导数可以分别由 `diff()` 函数求出，故整个偏导数可以由它们的除法获得，所以这样的问题可以由 F_1=−`diff(`f,x_j`)/diff(`f,x_i`)` 直接得出。

对二元隐函数 $f(x,y)=0$ 来说，如果求出了 $\partial y/\partial x=F_1(x,y)$（这里仍使用偏导数记号，以便于此公式最终推导到一般多元函数），则可以很容易地推导出其二阶导数的计算

$$F_2(x,y)=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}F_1(x,y) \tag{3-2-8}$$

更高阶的偏导数可以由下式递推求出

$$F_n(x,y)=\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=\frac{\partial F_{n-1}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F_{n-1}(x,y)}{\partial y}F_1(x,y) \tag{3-2-9}$$

上述命令用MATLAB语言可以很容易地实现，后面将通过例子演示。此外，上述方法可以直接推广到多元函数高阶导数的直接求取。根据这里给出的算法可以容易地编写出隐函数 f 的 n 偏导数函数 $f_1=\partial^n y/\partial x^n$，该函数调用格式为 f_1=impldiff(f,x,y,n)

```
function dy=impldiff(f,x,y,n)
if mod(n,1)=0, error('n should positive integer, please correct')
else, F1=-simplify(diff(f,x)/diff(f,y)); dy=F1;      %一阶导数
   for i=2:n, dy=simplify(diff(dy,x)+diff(dy,y)*F1); %式(3-2-9)的循环实现
end, end
```

例3-21 考虑例3-16中给出的二元函数 $f(x,y)=(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}=0$，试求 $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}$。

解 根据式(3-2-7)可以直接求解所需偏导数 $\partial y/\partial x$

```
>> syms x y; f=(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y); F1=impldiff(f,x,y,1)
```

可以得出偏导数为 $\dfrac{\partial y}{\partial x}=F_1(x,y)=\dfrac{2x+2xy-x^2y+4x^2-2x^3-2}{x\,(x+2y)\,(x-2)}$，还可以由下面公式求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$。

利用前面介绍的递推公式还可以直接求出函数的二阶、三阶导数

```
>> F2=impldiff(f,x,y,2), F3=impldiff(f,x,y,2),[n,d]=numden(F3), collect(n)
```

这些语句可以求出 y 的高阶导数

$$F_2(x,y)=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{3x^4-12x^3+16x^2-8x+8}{2x^2\,(x+2y)\,(x-2)^2}-\frac{\left(-3x^3+6x^2+4x-4\right)^2}{2x^2(x+2y)^3(x-2)^2}$$

$$F_3(x,y)=\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=-\frac{\begin{array}{c}-6x^6+(24-6y)x^5+(-6y^2+24y-14)x^4+(24y^2-32y-32)x^3\\+(-32y^2+16y+12)x^2+(16y^2-16y+16)x-16y^2-8\end{array}}{x^3(x+2y)^5(x-2)^3}$$

例3-22 试求出隐函数 $x^2+xy+y^2=3$ 的各阶导数[1]。

解 利用下面的语句可以直接求出函数的各阶导数，另外，由于 $x^2+xy+y^2=3$，可以将该条件代入得出的结果，化简求出的函数的各阶导数。

```
>> syms x y z; f=x^2+x*y+y^2-3; F1=impldiff(f,x,y,1) %输入隐函数并求偏导数
   f2=impldiff(f,x,y,2); F2=subs(f2,x^2+x*y+y^2,3)   %二阶偏导数，再进一步化简
   f3=impldiff(f,x,y,3); F3=subs(f3,x^2+x*y+y^2,3)
   f4=impldiff(f,x,y,4); F4=subs(f4,x^2+x*y+y^2,3)
```

上面的命令可以得出

$$F_1=-\frac{2x+y}{x+2y},\quad F_2=-\frac{18}{(x+2y)^3},\quad F_3=-\frac{162x}{(x+2y)^5},\quad F_4=-\frac{648\left(4x^2+xy+y^2\right)}{(x+2y)^7}$$

其中，subs() 命令有时似乎替换得不完全，F_4 还可以手工替换为 $F_4=-1944(x^2+1)/(x+2y)^7$。

3.2.6 场的梯度、散度与旋度

物理学中把某个物理量在空间的一个区域内的分布称为场(field)，场又分为标量场与向量场，标量场可以表示为一个标量函数 $\varphi(x,y,z)$，而向量场可以表示为向量函数

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=\left[X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\right] \tag{3-2-10}$$

标量场的梯度(gradient)定义为

$$\operatorname{grad}\varphi(x,y,z)=\left[\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\right] \tag{3-2-11}$$

梯度又常简记为$\nabla\varphi(x,y,z)$。由该定义可见，梯度可以将一个标量场转换成向量场。可以用现成的MATLAB函数`g=jacobian(φ,[x,y,z])`来计算函数$\varphi(x,y,z)$的梯度。

向量场$\boldsymbol{v}(x,y,z)$的散度（divergence）和旋度（curl）分别定义为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}(x,y,z)=\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z} \tag{3-2-12}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v}(x,y,z)=\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\right]^{\mathrm{T}} \tag{3-2-13}$$

向量函数$\boldsymbol{v}$的散度可以由`d=divergence(v,[x,y,z])`命令直接计算，而旋度可以通过函数`c=curl(v,[x,y,z])`直接计算。向量场的散度是一个标量函数，其旋度为向量函数。

例3-23 已知向量场$X(x,y,z)=x^2\sin y, Y(x,y,z)=y^2\sin xz, Z(x,y,z)=xy\sin(\cos z)$，试计算该向量场的散度和旋度。

解 可以先用符号表达式表示出原向量场，然后调用相应函数直接计算

```
>> syms x y z; v=[(x^2)*sin(y), (y^2)*sin(x*z), x*y*sin(cos(z))]; %输入向量场
   d=divergence(v,[x,y,z]), c=curl(v,[x,y,z]) %散度、旋度的直接计算
```

得到的散度或旋度分别为$d=2y\sin xz+2x\sin y-xy\cos(\cos z)\sin z$，

$$\boldsymbol{c}=\left[\ x\sin(\cos z)-xy^2\cos xz,\ \ -y\sin(\cos z),\ \ y^2z\cos xz-x^2\cos y\ \right]^{\mathrm{T}}$$

例3-24 试证明$\operatorname{curl}[\operatorname{grad}u(x,y,z)]=\boldsymbol{0}$。

解 可以先定义出标量场，然后由下面语句计算可以得到零向量，所以问题得证。

```
>> syms x y z u(x,y,z); v=jacobian(u,[x,y,z]); simplify(curl(v,[x,y,z]))
```

3.3 积分问题的解析解

在微积分学中，积分问题几种常用的表示方法为

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ \ I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \ F(x_1,\cdots,x_n)=\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1 \tag{3-3-1}$$

其中，函数$f(\cdot)$称为被积函数。第一个积分表达式称为不定积分，函数$F(x)$称为原函数，第二个积分式称为定积分。第三个积分称为多重积分。在传统微积分学课程中，求解不定积分问题通常需要灵活熟练地掌握和运用各种不同的积分方法，如变量替换积分法和分部积分法等，求解积分问题是否成功通常在很大程度上取决于用户的经验和技巧。本节侧重于介绍基于MATLAB的积分问题客观求解方法。

3.3.1 不定积分的推导

MATLAB符号运算工具箱中提供了一个`int()`函数，可以直接用来求取符号函数的不定积分。该函数的调用格式为`F=int(f,x)`。如果被积函数f中只有一个变量，则调用语句中的x可以省略。值得指出的是，该函数得出的结果$F(x)$是积分原函数，实际的不定积分应该是$F(x)+\mathrm{C}$构成的函数族，其中，C是任意常数。

对于可积的函数，MATLAB符号运算工具箱提供的`int()`函数可以用计算机代替繁重的手工推导，立即得出原始问题的解。而对于不可积的函数来说，MATLAB也是无能为力的。下面将通过例子介绍该函数的使用方法及应用。

例 3-25 考虑例 3-13 中给出的问题，用 `diff()` 函数可以直接求 $f(x)$ 函数的一阶导数。现在对得出的导数再进行积分，试检验是否可以得出一致的结果。

解 先定义原函数并对其求导，然后再对导数进行积分，则

```
>> syms x; y=sin(x)/(x^2+4*x+3); y1=diff(y); y0=int(y1) %求导再求积分还原
```

得出的结果为 $y_0 = \sin x/[2(x+1)] - \sin x/[2(x+3)]$。现在对原函数求四阶导数，再对结果进行四次积分，则可以用下面语句判定正确性。由于得出的结果为 $\sin x/[(x+1)(x+3)]$，和原函数完全一致，故说明对给定的例子来说，MATLAB 得出的结果是正确的。

```
>> y4=diff(y,4); y0=int(int(int(int(y4)))); simplify(y0) %求四阶积分并化简
```

如果考虑到任意常数，最终得出的原函数应该为

$$F(x) = \frac{\sin x}{(x+1)(x+3)} + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 x + \mathrm{C}_3 x^2 + \mathrm{C}_4 x^3$$

例 3-26 试证明 $\displaystyle\int x^3\cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{8} + \left(\frac{x^3}{4a} - \frac{3x}{8a^3}\right)\sin 2ax + \left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{3}{16a^4}\right)\cos 2ax + \mathrm{C}$。

解 用 MATLAB 语言的符号运算工具箱可以直接得出下面的化简结果

```
>> syms a x; f=simplify(int(x^3*cos(a*x)^2,x)) %直接求积分并化简
```

得出的结果为

$$f = \frac{1}{8a^4}\left(3\sin^2 ax + 2a^3x^3\sin 2ax - 6a^2x^2\sin^2 ax + 3a^2x^2 - 3ax\sin 2ax\right) + \frac{x^4}{8}$$

然而，从得出的结果很难看出它是否和等式右侧完全一致，这就需要将等式右侧的表达式也输入到 MATLAB 工作空间，将二者相减并进行化简，从而得出其差为 $-3/(16a^4)$。

```
>> f1=x^4/8+(x^3/(4*a)-3*x/(8*a^3))*sin(2*a*x)+...
      (3*x^2/(8*a^2)-3/(16*a^4))*cos(2*a*x); %输入右侧表达式
   simplify(f-f1)                             %求两个结果的差并化简
```

可见，二者并非完全相等，幸好得出的差为一个常数项 $3/\left(16a^4\right)$，即使两种方法得出的积分原函数有差距，但因为形成原函数族时需要加一个任意常数 C，故可以认为题中的等式得证。

例 3-27 考虑两个不可积问题 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ 与 $g(x) = x\sin(ax^4)\mathrm{e}^{x^2/2}$ 的积分问题求解。

解 首先考虑 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ 的不定积分求解。用 MATLAB 语言可以给出下面的语句

```
>> syms x; int(exp(-x^2/2)) %尝试对给定函数直接求不定积分
```

得出的解为 $\sqrt{\pi/2}\,\mathrm{erf}\left(x/\sqrt{2}\right)$。该积分虽然不可积，但数学家可以用数学方法发明一个特殊符号函数（误差函数）$\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，这样似乎可以写出定积分的解析表达式。事实上，这样的结果在工程中是不能用的，必须得出相应的数值解，如得出给定 x 时可以由 `vpa()` 函数求取其具体数值。

再考虑一个真正不可积的函数 $g(x) = x\sin(ax^4)\mathrm{e}^{x^2/2}$，用 MATLAB 语句可以尝试对其直接求积分，则直接将上面的语句原封不动地显示出来，说明原不定积分问题没有解析解。

```
>> syms a x; int(x*sin(a*x^4)*exp(x^2/2)) %尝试对不可积的函数直接求不定积分
```

3.3.2 定积分与无穷积分计算

如果在闭区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，且其不定积分为 $F(x)+\mathrm{C}$，则其定积分可以直接求出

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{3-3-2}$$

这就是著名的Newton–Leibniz公式。如果定积分的边界a或b为无穷大，则积分称为无穷积分。

在实际应用中，有些函数不定积分可能不存在，但仍然需要求取它的具体定积分值或无穷积分的值，比如可以利用特殊函数或者采用数值解的方法。

在MATLAB语言中仍然可以使用`int()`函数来求解定积分或无穷积分问题，该函数的具体调用格式为`I=int(f,x,a,b)`，其中，x为自变量，(a,b)为定积分的积分区间，求解无穷积分时，允许将a,b设置成`-Inf`或`Inf`，如果得出的结果不是确切的数值，还可以试着用`vpa()`函数得出定积分或无穷积分的高精度近似解。

例3-28 仍考虑$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}$的定积分问题，试求出当$a=0,b=1.5$或∞时的定积分值。

解 若要求解该问题，需要给出如下的MATLAB语句

```
>> syms x; I1=int(exp(-x^2/2),x,0,1.5), vpa(I1), I2=int(exp(-x^2/2),x,0,inf)
```

得出$I_1=\sqrt{\pi/2}\,\mathrm{erf}(3\sqrt{2}/4)$，其高精度数值解为$I_1=1.0858533176660165697024190765423$。无穷积分问题的解析解为$I_2=\sqrt{\pi/2}$。

例3-29 试求解函数边界的定积分问题$I(t)=\displaystyle\int_{\cos t}^{\mathrm{e}^{-2t}}\frac{-2x^2+1}{(2x^2-3x+1)^2}\mathrm{d}x$。

解 MATLAB提供的`int()`函数还可以求解函数积分区域的定积分问题，题中的定积分可以由下面的MATLAB语句直接求解。对本例来说直接使用`int()`函数求解定积分好像有问题，只好先求出不定积分，再用Newton–Leibniz公式求出结果。

```
>> syms x t; f(x)=(-2*x^2+1)/(2*x^2-3*x+1)^2; I1=int(f) %先求不定积分
   I=I1(exp(-2*t))-I1(cos(t))              %由Newton–Leibniz公式求解
```

得出的结果为$I(t)=1/(2\cos t-1)-1/(\cos t-1)-1/(2\mathrm{e}^{-2t}-1)+1/(\mathrm{e}^{-2t}-1)$。

例3-30 试求解广义积分$\displaystyle\int_1^{2\mathrm{e}}\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2x}}\mathrm{d}x$。

解 可见，若$x=\mathrm{e}$，则被积函数是不连续的，所以这种积分为广义积分，又称为反常积分(improper integral)。这种问题可以由下面的语句直接求解，结果为$\arcsin\big(\ln 2+1\big)$。

```
>> syms x; f=1/x/sqrt(1-log(x)^2); I=int(f,x,1,2*exp(sym(1))) %直接计算反常积分
```

3.3.3 多重积分问题的MATLAB求解

多重积分问题也可以在MATLAB语言环境中直接求解，但需要根据实际情况先选择积分顺序，可积的部分作为内积分，然后再处理外积分。每步积分均采用`int()`函数处理，如果交换积分顺序后仍然不能积出解析解，则说明原积分问题没有解析解，而需要采用数值方法求解原始的积分问题。多重积分的数值解法将在3.7.5节中介绍。

例3-31 已知下面的三元函数$F(x,y,z)$，试求出$\displaystyle\int\cdots\int F(x,y,z)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中

$$F(x,y,z)=-4z\mathrm{e}^{-x^2y-z^2}\big(\cos x^2y-10yx^2\cos x^2y+4x^4y^2\sin x^2y+4x^4y^2\cos x^2y-\sin x^2y\big)$$

解 事实上，此函数是例3-17中给出的$f(x,y,z)$经偏导运算得出的，故需要对求导过程进行逆向运算，还原回原函数的结果。

对该函数进行积分。先对z积分一次，对y积分一次，再连续对x积分两次，经过化简，则得出结果为$f_1=\mathrm{e}^{-x^2y-z^2}\sin x^2y$，该结果完全还原例3-17中给出的原函数。

```
>> syms x y z; f0=-4*z*exp(-x^2*y-z^2)*(cos(x^2*y)-10*cos(x^2*y)*y*x^2+...
      4*sin(x^2*y)*x^4*y^2+4*cos(x^2*y)*x^4*y^2-sin(x^2*y));        %输入被积函数
   f1=int(f0,z); f1=int(f1,y); f1=int(f1,x); f1=simplify(int(f1,x)) %计算重积分
```

改变积分求解顺序，变成 $z \to x \to x \to y$，仍可以得出一致的结果。

```
>> f2=int(f0,z); f2=int(f2,x); f2=int(f2,x); f2=simplify(int(f2,y)) %不同积分次序
```

例3-32 试求解三重定积分问题 $\int_0^2\int_0^\pi\int_0^\pi 4xze^{-x^2y-z^2}dzdydx$。

解 用如下的定积分求解语句可以立即计算出所需三重积分

```
>> syms x y z; int(int(int(4*x*z*exp(-x^2*y-z^2),x,0,2),y,0,pi),z,0,pi) %直接计算
```

这时得出的结果为 $-(e^{-\pi^2}-1)(\gamma+\ln(4\pi)-\mathrm{Ei}(-4\pi))$，其中，$\gamma$ 为Euler常数，$\mathrm{Ei}(z)$ 为指数积分，即 $\mathrm{Ei}(z)=\int_{-\infty}^z e^{-t}t^{-1}\,dt$。该函数虽然解析不可积，但可以求出其数值解。这样，原始问题的精确数值解可以由 `vpa(ans)` 得出，其结果为3.1080794020854127228346146476714。

3.4 函数的级数展开与级数求和问题求解

本节将介绍给定的单变量函数与多元函数的Taylor幂级数展开、各种函数的Fourier级数展开、有穷级数与无穷级数求和、级数收敛性和序列乘积等问题的计算机求解方法。

3.4.1 Fourier级数展开

给定周期性数学函数 $f(x)$，其中，$x\in[-L,L]$，且周期为 $T=2L$，可以人为地对该函数在其他区间上进行周期延拓，使得 $f(x)=f(kT+x)$，k 为任意整数，这样可以根据需要将其写成下面的级数形式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3-4-1}$$

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, & n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, & n=1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{3-4-2}$$

该级数称为Fourier级数，而 a_n,b_n 又称为Fourier系数。若 $x\in(a,b)$，则可以计算出周期 $L=(b-a)/2$，引入新变量 $\hat{x}$，使得 $x=\hat{x}+L+a$，则可以将 $f(\hat{x})$ 映射成 $(-L,L)$ 区间上的函数，可以对之进行Fourier级数展开，再将 $\hat{x}=x-L-a$ 映射回 x 的函数即可。

MATLAB语言未直接提供求解Fourier系数与级数的现成函数。其实由上述公式不难编写出解析或数值的Fourier级数求解函数。其中解析函数如下

```
function [F,A,B]=fseries(f,x,varargin)
[p,a,b]=default_vals({6,-pi,pi},varargin{:}); L=(b-a)/2;         %读取默认参数
if a+b, f=subs(f,x,x+L+a); end, A=int(f,x,-L,L)/L; B=[]; F=A/2; %初值，变量替换
for n=1:p %用循环结构求Fourier级数并累加求级数
   an=int(f*cos(n*pi*x/L),x,-L,L)/L; bn=int(f*sin(n*pi*x/L),x,-L,L)/L; %求系数
   A=[A,an]; B=[B,bn]; F=F+an*cos(n*pi*x/L)+bn*sin(n*pi*x/L); %累加求展开式
end
if a+b, F=subs(F,x,x-L-a); end %若区间不对称，作变量替换
```

为该函数编写一个下级支持函数 default_vals()，可以用于读取默认值。这个函数后面还将用到。该函数的内容为

```
function varargout=default_vals(vals,varargin) %通用子函数，读取默认参数
if nargout=length(vals), error('number of arguments mismatch');
else, nn=length(varargin)+1; %用循环结构指派各个默认参数
   varargout=varargin; for i=nn:nargout, varargout{i}=vals{i};
end, end, end
```

该函数的调用格式为 $[F,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=$fseries$(f,x,p,a,b)$，其中，$f$ 为给定函数，x 为自变量，p 为展开项数，默认值为6，a,b 为 x 的区间，可以省略，取其默认值 $[-\pi,\pi]$，得出的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为Fourier系数向量，F 为展开式。

例 3-33 试求给定函数 $y=x(x-\pi)(x-2\pi)$，$x\in(0,2\pi)$ 的Fourier级数展开。

解 上述给定函数的Fourier级数展开可以很自然地用下面的语句得出

```
>> syms x; f(x)=x*(x-pi)*(x-2*pi); [F,A,B]=fseries(f,x,12,0,2*pi); F %Fourier 级数
```

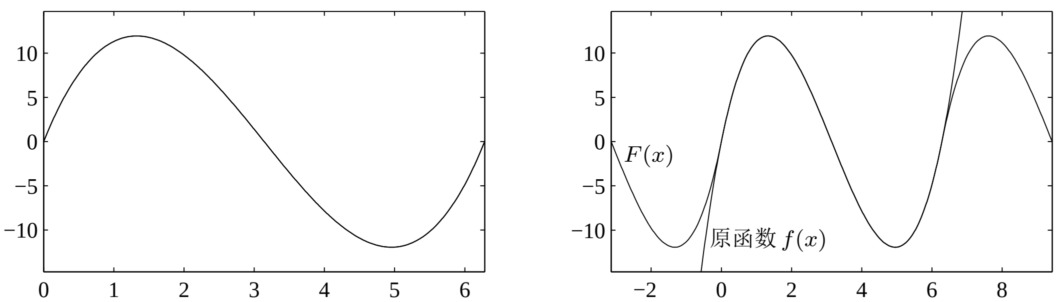
这样，可以得出前12项的Fourier级数展开为

$$f(x)=12\sin x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{4}{9}\sin 3x+\frac{3}{16}\sin 4x+\frac{12}{125}\sin 5x+\frac{1}{18}\sin 6x+\frac{12}{343}\sin 7x$$
$$+\frac{3}{128}\sin 8x+\frac{4}{243}\sin 9x+\frac{3}{250}\sin 10x+\frac{12}{1331}\sin 11x+\frac{1}{144}\sin 12x$$

其实，该展开的解析表达式为 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^3}\sin nx$。

由下面的语句可以得出12阶Fourier级数展开对原函数的拟合情况，如图3-4(a)所示，可见，函数的拟合效果是很理想的，几乎看不出原函数与12阶Fourier级数的区别。

```
>> ezplot(f,[0,2*pi]), hold on, ezplot(F,[0,2*pi]) %曲线比较
```



（a）$(0,2\pi)$ 区间　　（b）$(-\pi,3\pi)$ 区间

图 3-4　有限项Fourier级数近似效果比较

如果想比较更大区间内的拟合效果，如 $x\in(-\pi,3\pi)$，则可以给出下面的语句

```
>> ezplot(f,[-pi,3*pi]), hold on, ezplot(F,[-pi,3*pi]) %更大区间比较
```

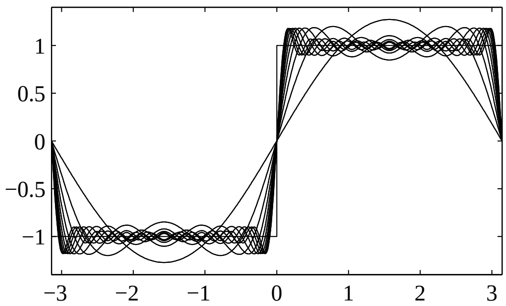
这时的拟合效果如图3-4(b)所示。可见，在 $(0,2\pi)$ 区间内拟合效果仍然很理想，然而在其他区间内，Fourier级数因为是定义在周期延拓基础上的，所以和原函数完全不同。

例 3-34 考虑 $(-\pi,\pi)$ 区间的方波信号，假设 $x\geqslant 0$ 时 $y=1$，否则 $y=-1$，试对该方波信号进行Fourier级数拟合，并观察用多少项能有较好的拟合效果。

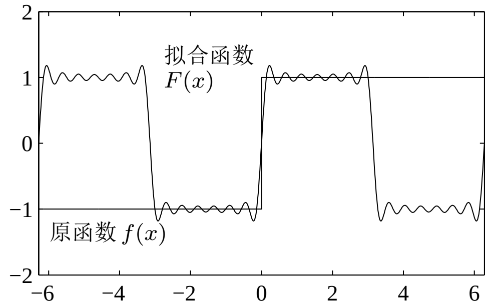
解 给定的函数可以由 $f(x)=|x|/x$ 表示，故由下面语句可以容易地生成 x 轴数据点，将其中的零值

用 $[-\epsilon,\epsilon]$ 取代并重新排序，则可以求出理论的方波数值。再用不同阶次的Fourier级数展开去拟合原来的方波函数，得出的曲线如图3-5(a)所示。

```
>> syms x; f(x)=abs(x)/x;  %定义方波信号
   xx=[-pi:pi/200:pi]; xx=xx(xx~=0); xx=sort([xx,-eps,eps]); %剔除零值
   yy=f(xx); plot(xx,yy),             %绘制出理论值并保持坐标系
   for n=1:20, f1=fseries(f,x,n); y1=subs(f1,x,xx); line(xx,y1); end
```



（a）$(-\pi,\pi)$ 区间



（b）$(-2\pi,2\pi)$ 区间

图 3-5 方波信号的Fourier级数逼近

从得出的结果看，当阶次等于10左右就能得出较好的拟合，再增加阶次也不会有显著的改善效果。取 $n=14$，则Fourier级数展开可以由下面的语句具体得出

```
>> f1=fseries(f,x,14) %14阶Fourier级数近似
```

可以得出 $f(x)\approx\dfrac{4\sin x}{\pi}+\dfrac{4\sin 3x}{3\pi}+\dfrac{4\sin 5x}{5\pi}+\dfrac{4\sin 7x}{7\pi}+\dfrac{4\sin 9x}{9\pi}+\dfrac{4\sin 11x}{11\pi}+\dfrac{4\sin 13x}{13\pi}$。从该结果可以总结出一般的展开公式为 $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$。

同样地，如果比较区间扩展到 $(-2\pi,2\pi)$，则由下面语句可以得出这时的拟合比较，如图3-5(b)所示。由于Fourier级数周期延拓区间的定义，它在指定区间以外与原函数无关

```
>> xx=[-2*pi:pi/200:2*pi]; xx=xx(xx~=0); xx=sort([xx,-eps,eps]);
   yy=subs(f,x,xx); plot(xx,yy), y1=subs(f1,x,xx); line(xx,y1)
```

3.4.2 Taylor幂级数展开

（1）**单变量函数的Taylor幂级数展开**。若在 $x=0$ 点附近进行Taylor幂级数展开，则

$$f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_kx^{k-1}+o(x^k) \tag{3-4-3}$$

其中，系数 a_i 可以由下面的公式求出

$$a_i=\frac{1}{(i-1)!}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}f(x),\quad i=1,2,3,\cdots \tag{3-4-4}$$

该幂级数展开又称为Maclaurin级数，若关于 $x=a$ 点进行展开，则可以得出

$$f(x)=b_1+b_2(x-a)+b_3(x-a)^2+\cdots+b_k(x-a)^{k-1}+o[(x-a)^k] \tag{3-4-5}$$

其中，各个系数 b_i 可以如下求出

$$b_i=\frac{1}{(i-1)!}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}f(x),\quad i=1,2,3,\cdots \tag{3-4-6}$$

Taylor 幂级数展开可由符号运算工具箱的`taylor()`函数直接导出，其调用格式为

```
F=taylor(f,x,a,'Order',k), %关于 x = a 点进行 k 次 Taylor 幂级数展开
```

其中，f 为函数的符号表达式，x 为自变量，若函数只有一个自变量，则 x 可以省略。k 为需要展开的项数，默认值为六项。如果不给出 a 则可以求出 $a=0$ 的 Taylor 级数展开。早期版本 MATLAB 的`taylor()`函数调用格式与此不同，为`F=taylor(f,x,k,a)`。下面将通过例子演示 Taylor 幂级数展开的方法。

例 3-35 仍考虑例 3-13 中给出的函数 $f(x)=\sin x/(x^2+4x+3)$，试求出该函数的 Maclaurin 幂级数展开的前九项，并关于 $x=2$ 和 $x=a$ 分别进行原函数的 Taylor 幂级数展开。

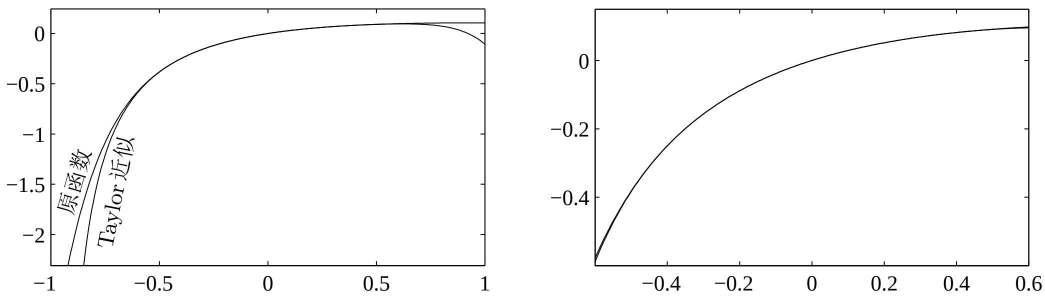
解 先用下面的语句输入已知的函数，这样就可以调用`taylor()`函数导出其 Maclaurin 幂级数展开的前九项为

$$y(x)\approx-\frac{386459}{918540}x^8+\frac{515273}{1224720}x^7-\frac{3067}{7290}x^6+\frac{4087}{9720}x^5-\frac{34}{81}x^4+\frac{23}{54}x^3-\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{3}x$$

```
>> syms x; f=sin(x)/(x^2+4*x+3); y=taylor(f,x,'Order',9) %Taylor 幂级数展开
```

在传统微积分教材中，因为缺少必要的计算机支持，所以遗留了很大的缺陷，即若用有限项级数展开去逼近一个给定函数，逼近的效果如何？在哪个区间适用，哪个区间不适用？当然，有了 MATLAB 语言，这些复杂的问题就可以轻而易举地解决了。图 3-6(a) 中给出了九项 Maclaurin 幂级数对原函数在 $(-1,1)$ 区间的拟合效果，显然，当 x 较大时拟合不理想。

```
>> ezplot(f,[-1,1]), hold on; ezplot(y,[-1,1]) %原函数与近似函数比较
```



（a）$(-1,1)$ 区间　　（b）$(-0.65,0.65)$ 区间

图 3-6　有限项 Maclaurin 幂级数近似效果

如果整个拟合区间缩减到 $[-0.6,0.6]$，则可以得出如图 3-6(b) 所示的拟合效果，可见拟合效果明显改观。由本例可见，利用 MATLAB 的绘图功能，拟合效果可以马上观察出来。

关于 $x=2$ 的 Taylor 幂级数展开前九阶可以使用如下语句直接导出

```
>> F=taylor(f,x,2,'Order',9)  %结果冗长，不全部列出
```

展开的前四项为

$$\frac{\sin 2}{15}+\left(\frac{\cos 2}{15}-\frac{8\sin 2}{225}\right)(x-2)-\left(\frac{127\sin 2}{6750}+\frac{8\cos 2}{225}\right)(x-2)^2+\left(\frac{23\cos 2}{6750}+\frac{628\sin 2}{50625}\right)(x-2)^3$$

若想导出关于某一点 $x=a$ 的 Taylor 幂级数展开，则可以给出如下语句

```
>> syms a; taylor(f,x,a,'Order',5) %关于参数 a 的 Taylor 级数展开
```

考虑到篇幅，这里只显示展开表达式的前三项为

$$\frac{\sin a}{a^2+3+4a}+\left[\frac{\cos a}{a^2+3+4a}-\frac{(4+2a)\sin a}{(a^2+3+4a)^2}\right](x-a)+\left[-\frac{\sin a}{(a^2+3+4a)^2}-\frac{\sin a}{2(a^2+3+4a)}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(a^2\cos a+3\cos a+4a\cos a-4\sin a-2a\sin a\right)(4+2a)}{\left(a^2+3+4a\right)^3}\right](x-a)^2$$

例 3-36 试对正弦函数 $y=\sin x$ 进行 Taylor 幂级数展开，观察不同阶次下的近似效果。

解 根据要求，可以给出如下的 MATLAB 语句，用循环的形式得出各次 Taylor 幂级数展开，得到如图 3-7 所示的拟合曲线。若拟合的阶次较低，则拟合效果较好的区间较小。增大拟合阶次，则拟合较好的区域将明显增大。对本例来说，若选择 $n=16$，则在 $(-2\pi,2\pi)$ 区间内的拟合效果将很理想。

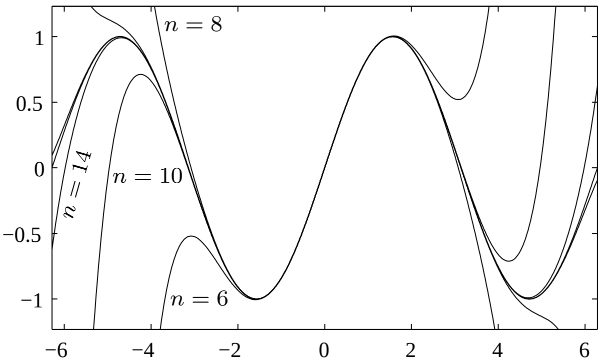


图 3-7 正弦函数的 Taylor 幂级数近似比较

```
>> syms x; y=sin(x); ezplot(y), hold on                        %绘制原函数并保护坐标
   for n=[6:2:16], p=taylor(y,x,'Order',n), ezplot(p), end %绘制不同阶次的幂级数
```

其中，16 阶 Taylor 幂级数展开式为

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}+\frac{x^{13}}{6227020800}-\frac{x^{15}}{1307674368000}$$

（2）**多元函数的 Taylor 幂级数展开**。多元函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 Taylor 幂级数展开可以写成

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+&\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]f(\boldsymbol{x})\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}+\\&\frac{1}{2!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(\boldsymbol{x})\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}+\cdots+\\&\frac{1}{k!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+(x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(\boldsymbol{x})\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}+\cdots\end{aligned}\qquad(3\text{-}4\text{-}7)$$

其中，$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 为 Taylor 幂级数展开的中心点。MATLAB 的符号运算工具箱的函数 `taylor()` 可以直接进行多元函数Taylor 幂级数展开。该函数的调用格式为

F=`taylor(`f`,[`x_1`,`x_2`,`$\cdots$`,`x_n`],[`a_1`,`a_2`,`$\cdots$`,`a_n`],'Order',`k`)`

其中，$k-1$ 为展开的最高阶次，f 为原多元函数。

例3-37 试求例3-16中给出函数 $f(x,y)=(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}$ 的各种Taylor幂级数展开。

解 使用给出的函数就可以立即得出关于原点的Taylor幂级数展开

```
>> syms x y; f=(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y);          %声明符号变量并输入原函数
   F=taylor(f,[x,y],[0,0],'Order',8); collect(F,x) % Taylor级数展开并合并同类项
```

其数学表示形式如下

$$\begin{aligned}F(x,y)\approx&\ \frac{x^7}{3}+\left(y+\frac{1}{2}\right)x^6+\left(2y^2+y-1\right)x^5+\left(\frac{7y^3}{3}+\frac{3y^2}{2}-2y-1\right)x^4\\&+\left(2y^4+y^3-3y^2-y+2\right)x^3+\left(y^5+\frac{y^4}{2}-2y^3-y^2+2y+1\right)x^2+\left(\frac{y^6}{3}-y^4+2y^2-2\right)x\end{aligned}$$

现在求取关于 $x=1, y=a$ 的幂级数展开,则需要给出语句,结果从略。

```
>> syms a; F=taylor(f,[x,y],[1,a],'Order',3), F1(x)=simplify(F)
```

便可以得出如下的幂级数展开式和化简表达式

$$\begin{aligned}F(x,y)\approx&-\mathrm{e}^{-a^2-a-1}\left[(a/2+1)(a+2)-2\right](x-1)^2-\mathrm{e}^{-a^2-a-1}(2a+1)(a-y)\\&-\mathrm{e}^{-a^2-a-1}(a-y)^2\left[(2a+1)(a+1/2)-1\right]+\mathrm{e}^{-a^2-a-1}(a+2)(x-1)-\mathrm{e}^{-a^2-a-1}\\&+\mathrm{e}^{-a^2-a-1}(a-y)(x-1)\left[(2a+1)(a/2+1)+(a+2)(a+1/2)-1\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_1(x)=&-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2-a-1}\Big(4a^4-4a^3x-8a^3y+8a^3+a^2x^2+4a^2xy-12a^2x+4a^2y^2-12a^2y\\&+14a^2+4ax^2+10axy-12ax+4ay^2-12ay+10a+2xy-4x-y^2-4y+6\Big)\end{aligned}$$

3.4.3 级数求和的计算

符号运算工具箱中提供的symsum()可以用于已知通项的有穷或无穷级数求和。该函数调用格式为 S=symsum(f_k,k,k_0,k_n),其中,f_k 为级数的通项,k 为级数自变量,k_0 和 k_n 为级数求和的起始项与终止项,它们也可以是无穷量inf。该函数可以得出

$$S=f_{k_0}+f_{k_0+1}+\cdots+f_{k_n}=\sum_{k=k_0}^{k_n}f_k \tag{3-4-8}$$

如果给出的 f_k 表达式中只含有一个变量,则在函数调用时可以省略 k 量。

例3-38 计算有限项级数求和 $S=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{62}+2^{63}=\sum\limits_{i=0}^{63}2^i$。

解 用数值计算方法可以由下面语句得出结果为 $1.844674407370955\times10^{19}$

```
>> format long; sum(2.^[0:63]) %显示双精度数据结构下的全部信息
```

由于数值计算中使用了double数据类型,至多只能保留16位有效数字,所以得出的结果不是很精确。对这样的问题应该采用符号运算工具箱的symsum()函数,或至少将2定义为符号量,就可以用sum()函数求解。对原始问题稍扩展一步,一直到第201项的级数求和可以用下面的语句精确求出为3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602751,这是用数值算法无法精确做到的。

```
>> sum(sym(2).^[0:200]) %或 syms k; symsum(2^k,0,200)
```

例3-39 试求解无穷级数的和 $S=\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{4\times7}+\dfrac{1}{7\times10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$。

解 如果想借助MATLAB的符号运算工具箱,则可以立即得出结果为1/3。

```
>> syms n; s=symsum(1/((3*n-2)*(3*n+1)),n,1,inf) %符号运算直接级数求和
```

此级数求和亦可以用数值方法求得。假设求前 10000000 项的和,这时可以求出级数的和,结果为 0.33333332222165。但可以看出,得出无穷级数的和与解析解间存在很大差异,这个差异就是 double 数据类型引起的,它不能保留任意多小数位。

```
>> m=1:10000000; s1=sum(1./((3*m-2).*(3*m+1))); format long; s1 %双精度向量化和
```

可见,即使选择的累加项数极多,耗时很长,得出的结果仍然有较大误差,达到 10^{-6} 级。从通项上看,当 $m=10^7$ 时,通项值 10^{-15} 级,从表面上可能得出结论,似乎累加的结果误差不会太大。其实不然,由于双精度数值的有效数位数有限,只有 16 位,所以计算通项时 16 位后的数字加到累加量上就消失了,这就是数值分析中经常所说的"大数吃小数"的现象,所以采用纯数值的方法,即使取再多的位数也不能精确得出正确的结果。

例 3-40 试求解含有变量的无穷级数的和 $J=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n+1}}$。

解 前面介绍的例子都是数值的例子,直接采用累加的方式就可以近似求出结果。这里给出的求和问题中含有变量 x,所以仅靠数值运算的方式不可能得出该级数的和,而必须采用符号运算工具箱求解该问题,这需要给出下面的命令,最简结果为 $2\,\mathrm{atanh}(1/(2x+1))$,并给出收敛条件 $x>0$ 或 $x<-1$。早期版本的结果是 $\ln[(x+1)/x]$。可以用 ezplot() 函数验证二者是完全等效的。

```
>> syms n x; s1=symsum(2/((2*n+1)*(2*x+1)^(2*n+1)),n,0,inf); simplify(s1)
   ezplot(2*atanh(1/(2*x+1))), hold on, ezplot(log((x+1)/x)) %不同结果的曲线比较
```

例 3-41 试求解级数与极限综合问题 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)-\ln n\right]$。

解 前面介绍了级数求和,还介绍了极限的求解方法,所以这里给出的综合问题仍然能用 MATLAB 语言的符号运算工具箱直接求解。从题中给出的式子可见,其中包含级数求和项可以表示成 symsum(1/m,1,n),这样原始的问题可以直接由下面的 MATLAB 语句求解

```
>> syms m n; limit(symsum(1/m,m,1,n)-log(n),n,inf) %综合问题的直接求解
```

该语句得出的结果为 Euler 常数 γ,其值可以由 MATLAB 精确地显示出来,如使用 vpa(ans,70) 命令,这时 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677。

注意,求解该问题不能先求解无穷级数的和,然后再减去 $\ln n$,再求极限,这样做前后两项均为无穷大,求极限的结果将是不定式 NaN。

例 3-42 试求解下面的综合问题

$$S=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$$

解 从上面给出的问题可见,级数的通项公式为 $a_k=(1+k/n^2)\sin(k\pi/n^2)$,且 $k=1,2,\cdots,n-1$,这样原始问题的解可以用下面语句直接求出,为 $S=\pi/2$。

```
>> syms n k; S=simplify(limit(symsum((1+k/n^2)*sin(k*pi/n^2),k,1,n-1),n,inf))
```

3.4.4 序列求积问题

序列乘积的数学表示为

$$P=f_af_{a+1}\cdots f_b=\prod_{n=a}^{b}f_n \tag{3-4-9}$$

MATLAB 符号运算工具箱提供了求解函数 symprod() 直接求取序列求积问题,其语句格式为 P=symprod(f_n,n,a,b)。

例3-43 试求出序列的有限项乘积 $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k^3}\right)$ 和无穷项乘积。

解 由下面的语句可以立即得出该序列的有限项乘积与无穷乘积为

```
>> syms k n; P1=symprod(1+1/k^3,k,1,n); P1=simplify(P1) %有限项求积
   P2=symprod(1+1/k^3,k,1,inf); P2=simplify(P2)        %无穷项求积
```

得出的结果分别为

$$P_1=-\frac{(n+1)!\sin\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\pi\right)\Gamma\left(n+\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\Gamma\left(n+\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)}{\pi(n!)^3},\quad P_2=\frac{\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\pi\right)}{\pi}$$

例3-44 试求出下面无穷级数的和

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1\times3}{2\times4\times6}-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}+\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}-\frac{1\times3\times5\times7\times9}{2\times4\times6\times8\times10}+\cdots$$

解 这个问题是级数求和问题,其通项公式为 $(-1)^n\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)/(2k)$,且 $n=0,1,\cdots,\infty$,故由下面的语句可以直接得出原问题的解为 $S=\sqrt{2}/2$。

```
>> syms k n, S=symsum((-1)^n*symprod((2*k-1)/(2*k),k,1,n),n,0,inf)
```

例3-45 试求出 $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-x/n}$。

解 下面语句可以直接得出原问题的解

```
>> syms n x; P=symprod((1+x/n)*exp(-x/n),n,1,inf) %直接求解
```

得出解的分段函数如下

$$P=\begin{cases}0, & x\text{为负整数}\\ \mathrm{e}^{-\gamma x}/\Gamma(x+1), & \text{其他,其中}\ \gamma\ \text{为 Euler 常数}\end{cases}$$

其实,由Gamma函数的性质可知,x 为负整数时 $\Gamma(x+1)=\pm\infty$,所以 $P=\mathrm{e}^{-\gamma x}/\Gamma(x+1)$。

3.4.5 无穷级数的收敛性判定

在实际应用中可能遇到各种各样的级数问题,有的时候即使使用`symsum()`函数或其他工具,也可能得不到无穷级数的闭式解(closed-form solution),这样,判定一个无穷级数的收敛性就是很重要的问题了。考虑一个无穷级数

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_n \tag{3-4-10}$$

如果这个级数当 $n\to\infty$ 时,和式 S 存在有限的极限值,则该级数是收敛(convergent)的,若和式的极限不存在,则级数是发散的(divergent)。如果对所有的 n 均有 $a_n>0$,则级数称为正项级数(positive series)。可以采用下面的判据来判定一个给定级数的收敛性。

(1)如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$,则级数是发散的。

(2)如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 是收敛的,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛,这种收敛又称为绝对收敛。

对正项级数而言,还可以顺序使用其他的判定方法。

(3)D'Alembert判定法。计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=\rho$,如果 $\rho<1$,则级数收敛,若 $\rho>1$ 则级数发散。如果 $\rho=1$,则应该尝试其他方法,比如方法(4)。

（4）Raabe判定法。如果方法（3）中 $\rho=1$，则计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(a_n/a_{n+1}-1\big)=R$。如果 $R>1$，则级数收敛，若 $R<1$ 则级数发散。如果 $R=1$，则不能判定收敛性。

对如下定义的交替级数（alternating series）

$$S=b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n \tag{3-4-11}$$

其中，$b_i\geqslant 0$，可以采用下面的判定法判定其收敛性。

（5）计算 $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}/b_n=\rho$。若 $\rho<1$，则级数绝对收敛，若 $\rho>1$，则级数发散，若 $\rho=1$，则不能直接判定收敛性。

（6）如果 $b_{n+1}\leqslant b_n$，且 b_n 的极限为0，则级数收敛。

（7）计算 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty} n\big(b_n/b_{n+1}-1\big)$，假设 $b_n>0$，若 $\rho>1$，则级数绝对收敛，若 $0<\rho\leqslant 1$，则交替级数条件收敛，否则级数发散。

例3-46 试判定无穷级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}$ 的收敛性。

解 对正项级数而言，可以容易地得出 a_{n+1}/a_n 的极限

```
>> syms n k positive; assume(n,'integer'); a=2^n/symprod(2*k-1,k,1,n)
   F=simplify(subs(a,n,n+1)/a), L=simplify(limit(F,n,inf)) %用(3)判断收敛性
```

可以看出该极限等于0，满足方法（3）的条件，故该级数是收敛的。其实，通过计算机推导可以得出 a_{n+1}/a_n，但不能得出其最简形式，所以需要手工推导，得出 $\Rightarrow$ 号后的最终化简结果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4\,(2n)!\,(n+1)!}{(2n+2)!\,n!}\Rightarrow\frac{4(2n)!\,(n+1)n!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,n!}=\frac{2}{2n+1}$$

例3-47 试判定下面给出的无穷级数的收敛性

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots$$

解 由于著名的无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$ 是不收敛的，所以这里的级数不是绝对收敛的。当然不能用这种方式直接判定级数的收敛性，而应该采用变通的方法。如果把原级数每三个一组直接改写，则可以将其改写成关于 b_n 的交替级数形式，其中

$$b_n=\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right),\ n=1,2,3,\cdots$$

对该交替级数而言，方法（2）是不行的，因为极限为1，如果采用方法（5）中的判定法，尽管 $b_{n+1}\leqslant b_n$，仍需手工推导，可以直接使用方法（7）中的判定法

```
>> syms n; b=1/(3*n-1)+1/(3*n-2)+1/(3*n); L=limit(n*(b/subs(b,n,n+1)-1),n,inf)
```

因为 $L=1$，交替级数是条件收敛的。

例3-48 考虑下面的函数级数，若 p 为实数，试找出使得该无穷级数收敛的 x 的范围。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

解 可以声明相应的符号变量，得出通项 a_n 的符号表达式。这样，求 a_{n+1}/a_n 的极限，则可以得出化简的结果为 $L=(x-1)/2$。为使得该无穷级数收敛，应满足 $|L|<1$。求解不等式 $|(x-1)/2|<1$，则可以得出级数收敛的区间为 $x\in(-1,3)$。

```
>> syms n k positive; syms p real; assume(n,'integer'); %声明符号变量
   a=(symprod(2*k-1,k,1,n)/symprod(2*k,k,1,n))^p*((x-1)/2)^n; %输入通项
   F=simplify(subs(a,n,n+1)/a), L=simplify(limit(F,n,inf))    %用方法(3)判定
```

令 $x=-1$，则原级数变成一个交替级数，由方法(7)可见，$L=p/2$，这意味着当 $p>0$ 时，$x=-1$ 是收敛的，所以 $x=-1$ 是条件收敛的边界。

```
>> b=(symprod(2*k-1,k,1,n)/symprod(2*k,k,1,n))^p; %计算级数通项
   L=limit(n*(b/subs(b,n,n+1)-1),n,inf)          %使用Raabe判定法
```

如果 $x=3$，则级数为正项级数，由判据方法(2)可见 $L=p/2$，意味着该点处在 $p>2$ 时是绝对收敛的，否则该级数是发散的。如果 $x=-1$，则 $p>2$ 时级数仍然绝对收敛。

3.5　曲线积分与曲面积分的计算

MATLAB语言并未直接提供曲线积分和曲面积分的现成函数。本节将介绍两类曲线、曲面积分的概念，引入它们转换成一般积分问题的算法，并介绍利用MATLAB语言的符号运算工具箱直接求解曲线、曲面积分的解析解方法。

3.5.1　曲线积分及MATLAB求解

（1）**第一类曲线积分**。曲线积分在高等数学中一般分为第一类曲线积分和第二类曲线积分。其中，第一类曲线积分问题起源于对不均匀分布的空间曲线总质量的求取[2]。假设在空间曲线 l 上各处的密度函数为 $f(x,y,z)$，则其总质量可以由下面的式子直接求出

$$I_1=\int_l f(x,y,z)\mathrm{d}s \tag{3-5-1}$$

其中，s 为曲线上某点的弧长，所以这类曲线积分又称为对弧长的曲线积分。若曲线由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 给出，则可以将这些量直接代入 $f(\cdot)$ 函数，而弧长微分可以表示成

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2}\,\mathrm{d}t,\quad \text{简记作}\mathrm{d}s=\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}\,\mathrm{d}t \tag{3-5-2}$$

则可以将这类曲线积分也变换成对参数 t 的普通定积分问题

$$I=\int_{t_\mathrm{m}}^{t_\mathrm{M}} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}\,\mathrm{d}t \tag{3-5-3}$$

若被积函数 $f(x,y)$ 为二元函数，也可以用相应的转换方法将其转换成普通积分问题，故用MATLAB语言可以求出第一类曲线积分的值。根据前面上面的算法，可以由MATLAB语言编写出曲线积分的计算函数

```
function I=path_integral(F,vars,t,a,b)
if length(F)==1, I=int(F*sqrt(sum(diff(vars,t).^2)),t,a,b);    %第一类曲线积分
else, F=F(:).'; vars=vars(:); I=int(F*diff(vars,t),t,a,b); end %第二类曲线积分
```

该函数还可以用于后面将介绍的第二类曲线积分。第一类曲线积分的调用格式为

```
I=path_integral(f,[x,y],t,tm,tM)     %二维曲线积分
I=path_integral(f,[x,y,z],t,tm,tM)   %三维曲线积分
I=path_integral(f,v,t,tm,tM)         %任意维曲线积分
```

其中，[x,y] 或 [x,y,z] 为曲线的参数方程对应的符号表达式，如果曲线由 $y=f(x)$ 表示，则对应的向量应该写成 [x,y]。

例 3-49 试求 $\displaystyle\int_l \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中，$l$ 为螺线，$x=a\cos t, y=a\sin t, z=at, (0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$。

解 用下面的语句可以立即得出曲线积分值为 $I=8\sqrt{2}\pi^3a/3$

```
>> syms t; syms a positive; x=a*cos(t); y=a*sin(t); z=a*t; %输入曲线参数方程
   f=z^2/(x^2+y^2); I=path_integral(f,[x,y,z],t,0,2*pi) %直接计算第一类曲线积分
```

例 3-50 试求 $\displaystyle\int_l (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中，$l$ 曲线为 $y=x$ 与 $y=x^2$ 围成的正向曲线。

解 应该用下面的指令绘制出给定的两条曲线，如图 3-8 所示。

```
>> x=0:0.001:1.2; y1=x; y2=x.^2; plot(x,y1,x,y2), hold on, ii=find(x<=1);
   xx=[x(ii),x(ii(end):-1:1)]; yy=[y2(ii), y1(ii(end):-1:1)]; fill(xx,yy,'g')
```

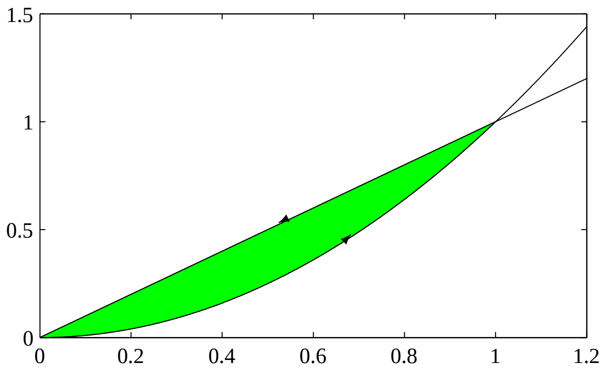


图 3-8 积分曲线示意图

可见，可以将原来的积分问题化成两段曲线的积分问题来求解。故应该给出如下的指令，求解出两段曲线的积分值，将其相加则得出原问题的解为 $I=-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}+\dfrac{349}{768}\sqrt{5}-\dfrac{7}{512}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$。

```
>> syms x; y=x; f=(x^2+y^2); I1=path_integral(f,[x,y],x,1,0)
   y=x^2; f=(x^2+y^2); I2=path_integral(f,[x,y],x,0,1), I=I1+I2
```

（2）**第二类曲线积分**。第二类曲线积分问题又称为对坐标的曲线积分，它起源于变力 $\vec{\boldsymbol{f}}(x,y,z)$ 沿曲线 l 移动时做功的研究。这类曲线积分的数学表达式为

$$I_2=\int_l \vec{\boldsymbol{f}}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} \tag{3-5-4}$$

其中，$\vec{\boldsymbol{f}}(x,y,z)$ 为向量，可以写成 $\vec{\boldsymbol{f}}=\left[P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right]$，曲线 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 亦为向量，若曲线可以由参数方程表示成 t 的函数，记作 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，则可以将 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ 表示成

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}=\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \tag{3-5-5}$$

则行向量函数与列向量的乘积可以得出标量函数，将曲线积分问题转换成普通定积分问题。前面给出的 `path_integral()` 可以直接用于求取第二类曲线积分

```
I=path_integral([P,Q],[x,y],t,a,b)        %二维被积函数
I=path_integral([P,Q,R],[x,y,z],t,a,b)    %三维被积函数
I=path_integral(F,v,t,a,b)                %任意维曲线积分的向量型被积函数
```

例3-51 试求出曲线积分$\displaystyle\int_l \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x-\frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$，$l$为正向圆周$x^2+y^2=a^2$。

解 若想按圆周曲线进行积分，则可以写出参数方程$x=a\cos t, y=a\sin t, (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，这样，用下面的方法可以直接求出曲线积分为$2\pi$

```
>> syms t; syms a positive; x=a*cos(t); y=a*sin(t); %输入曲线的参数方程
   F=[(x+y)/(x^2+y^2),-(x-y)/(x^2+y^2)];             %输入被积函数的向量
   I=path_integral(F,[x,y],t,2*pi,0)                 %正向圆周直接求积分
```

例3-52 试求出曲线积分的值$\displaystyle\int_l (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，$l$为抛物线$y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$。

解 曲线给出的方程是关于x的参数方程，故可以用下面的语句求出曲线积分的值为$-14/15$。

```
>> syms x; y=x^2; F=[x^2-2*x*y,y^2-2*x*y]; %定义二维向量型被积函数
   I=path_integral(F,[x,y],x,-1,1)         %直接求曲线积分
```

3.5.2 曲面积分与MATLAB语言求解

（1）**第一类曲面积分**。第一类曲面积分的数学定义为

$$I=\iint\limits_S \phi(x,y,z)\mathrm{d}S \tag{3-5-6}$$

其中，$\mathrm{d}S$为小区域的面积，故这类积分又称为对面积的曲面积分。曲面S由$z=f(x,y)$给出，则该积分可以转换成xy平面的二重积分为

$$I=\iint\limits_{\sigma_{xy}} \phi[x,y,f(x,y)]\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-5-7}$$

其中，σ_{xy}为积分区域。

根据前面的求解方法以及后面将介绍的求解方法，可以编写曲面积分的求解函数`surf_integral()`，第一类曲面积分的调用格式为

I=`surf_integral`(f,z,[x,y],[y_m,y_M],[x_m,x_M])

```
function I=surf_integral(f,xx,uu,um,vm)
if length(f)==1      %第一类曲面积分——标量型被积函数
   if length(xx)==1 %曲面由显函数描述
      I=int(int(f*sqrt(1+diff(xx,uu(1))^2+diff(xx,uu(2))^2),...
            uu(2),um(1),um(2)),uu(1),vm(1),vm(2));  %式(3-5-7)的实现
   else   %曲面由参数方程描述
      xx=[xx(:).' 1]; x=xx(1); y=xx(2); z=xx(3); u=uu(1); v=uu(2);
      E=diff(x,u)^2+diff(y,u)^2+diff(z,u)^2;
      F=diff(x,u)*diff(x,v)+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);
      G=diff(x,v)^2+diff(y,v)^2+diff(z,v)^2;                       %式(3-5-9)计算
      I=int(int(f*sqrt(E*G-F^2),u,um(1),um(2)),v,vm(1),vm(2)); %式(3-5-10)计算
   end
else                 %第二类曲面积分——向量型被积函数
   if length(xx)==1 %显式函数描述的曲面
      syms x y z; ua=sqrt(1+diff(xx,x)^2+diff(xx,y)^2);
      cA=-diff(xx,x)/ua; cB=-diff(xx,y)/ua; cC=1/ua;    %式(3-5-13)计算
```

```
      I=surf_integral(f(:).'*[cA; cB; cC],xx,uu,um,vm); %式(3-5-12)计算
   else, x=xx(1); y=xx(2); z=xx(3); u=uu(1); v=uu(2);
      A=diff(y,u)*diff(z,v)-diff(z,u)*diff(y,v);
      B=diff(z,u)*diff(x,v)-diff(x,u)*diff(z,v);
      C=diff(x,u)*diff(y,v)-diff(y,u)*diff(x,v); F=A*f(1)+B*f(2)+C*f(3);%(3-5-15)
      I=int(int(F,uu(1),um(1),um(2)),uu(2),vm(1),vm(2));       %(3-5-16)计算
end, end
```

例3-53 试求出$\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S$,其中,积分曲面$S$是由四个平面$x=0,y=0,z=0$和$x+y+z=a$围成的外侧面,且$a>0$。

解 记这四个平面为S_1,S_2,S_3,S_4,则原积分可以由$\iint\limits_S=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}+\iint\limits_{S_3}+\iint\limits_{S_4}$求出。考虑$S_1,S_2,S_3$平面,由于被积函数的值为0,故这些积分也为0,所以只需研究S_4的曲线积分。S_4平面的数学表示为$z=a-x-y$,这样,积分边界可以描述成$0\leqslant y\leqslant a-x, 0\leqslant x\leqslant a$,故由下面的语句可以求出曲面积分为$I=\sqrt{3}a^5/120$。

```
>> syms x y; syms a positive; z=a-x-y; f=x*y*z; %描述被积函数与曲面
   I=surf_integral(f,z,[x,y],[0,a-x],[0,a])      %直接计算曲面积分
```

若曲面由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \tag{3-5-8}$$

给出,则曲面积分可以由下面的公式求出

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\phi[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3-5-9}$$

式中

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,\quad F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,\quad G=x_v^2+y_v^2+z_v^2 \tag{3-5-10}$$

前面编写的曲面积分求解函数`surf_integral()`仍能求解这类问题,语句格式为

I=`surf_integral(`f`,[`x,y,z`],[`u,v`],[`$u_\mathrm{m},u_\mathrm{M}$`],[`$v_\mathrm{m},v_\mathrm{M}$`])`

例3-54 试求出曲面积分$\iint\limits_S(x^2y+zy^2)\mathrm{d}S$,其中,$S$为螺旋曲面$x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$的$0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant 2\pi$部分。

解 由上述公式可以立即得出积分结果为$I=\pi^2\big(2a\left(a^2+1\right)^{3/2}-a\sqrt{a^2+1}-\mathrm{arcsinh}a\big)/8$。

```
>> syms u v; syms a positive; x=u*cos(v); y=u*sin(v); z=v; %描述曲面被积函数向量
   f=x^2*y+z*y^2; I=surf_integral(f,[x,y,z],[u,v],[0,a],[0,2*pi]) %直接计算积分
```

(2)**第二类曲面积分**。第二类曲面积分又称为对坐标的曲面积分。其数学定义为

$$I=\iint\limits_{S^+}\vec{\boldsymbol{\Gamma}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{V}}=\iint\limits_{S^+}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-5-11}$$

其中,正向曲面S^+由$z=f(x,y)$给出,被积函数$\vec{\boldsymbol{\Gamma}}=[P,Q,R]$为行向量,而$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{V}}=[\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\mathrm{d}x\mathrm{d}y]^\mathrm{T}$为列向量。这类曲面积分问题可以转换成第一类曲面积分

$$I=\iint\limits_{S^+}\big[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\big]\mathrm{d}S \tag{3-5-12}$$

其中,z 由 $f(x,y)$ 代替,且

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \tag{3-5-13}$$

这样,分母上的 $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ 正好和式(3-5-7)中的项抵消,故整个曲面积分可以写成

$$I=\iint\limits_{\sigma_{xy}} -Pf_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-Qf_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3-5-14}$$

若曲面由参数方程式(3-5-8)给出,则可以由下面的方程求出

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{3-5-15}$$

其中,$A=y_uz_v-z_uy_v$,$B=z_ux_v-x_uz_v$,$C=x_uy_v-y_ux_v$。这样,由得出的第一类曲面积分转换成二重积分会发现,式(3-5-15)的分母和 $\sqrt{EG-F^2}$ 抵消。这时整个曲面积分可以简化成

$$I=\iint\limits_{S^+}\left[AP(u,v)+BQ(u,v)+CR(u,v)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3-5-16}$$

`surf_integral()` 函数还实现了上述两个算法,调用格式为

```
I=surf_integral([P,Q,R],z,[u,v],[u_m,u_M],[v_m,v_M])
I=surf_integral([P,Q,R],[x,y,z],[u,v],[u_m,u_M],[v_m,v_M])
```

例3-55 试求出曲面积分 $\iint\limits_S (xy+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中,$S$ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部,且积分沿椭球面的上面。

解 可以引入参数方程 $x=a\sin u\cos v$,$y=b\sin u\sin v$,$z=c\cos u$,且 $0\leqslant u\leqslant\pi/2$,$0\leqslant v\leqslant 2\pi$,这样,原始曲面积分问题可以转换为一般双重积分问题

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} CR\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \text{其中},\quad R=xy+z,\quad C=x_uy_v-y_ux_v$$

当然,也可以用下面的语句直接求出所需的曲面积分为 $2abc\pi/3$。

```
>> syms u v; syms a b c positive;                    %声明必要的符号变量
   x=a*sin(u)*cos(v); y=b*sin(u)*sin(v); z=c*cos(u); %描述曲面被积函数向量
   I=surf_integral([0,0,x*y+z],[x,y,z],[u,v],[0,pi/2],[0,2*pi]) %直接求积分
```

3.6　数值微分问题

前面介绍了已知原型函数,可以通过 `diff()` 函数求取各阶导数解析解的方法,并得出结论,高达100阶的导数也可以用MATLAB语言在几秒钟的时间内直接求出。应该指出,前面介绍的解析解方法的前提是原型函数为已知的。如果函数表达式未知,只有实验数据,在实际应用中经常也有求导的要求,这样的问题就不能用前面的方法获得问题的解析解了。要求解这样的问题,需要引入数值算法得出所需问题的解。由于在MATLAB语言中没有现成的数值微分函数,所以本节将先介绍数值微分算法,介绍其中较好算法的MATLAB实现,最后将通过例子演示数值微分程序。

3.6.1 数值微分算法

假设已经等间隔地测出了一组数据 (t_i, y_i)，且已知时间间隔为 Δt，由高等数学中导数的定义可知，若 $\Delta t \to 0$，则相邻两点的差值除以间隔 Δt 就是该点处的导数，由此可以引入前向差分公式

$$y_i' = \frac{\Delta y_i}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} \tag{3-6-1}$$

类似地，还可以引入后向差分公式

$$y_i' = \frac{\Delta y_i}{\Delta t} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} \tag{3-6-2}$$

遗憾的是，这两种微分算法的精度都是 $o(\Delta t)$ 级的，当 Δt 稍大时，产生的误差会很大。经实践检验，利用基于前向和后向差分的数值微分算法求取高阶微分时的精度一般都是很低的，所以这里只介绍两种中心差分的算法。首先定义一阶微分为

$$y_i' = \frac{\Delta y_i}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \tag{3-6-3}$$

记

$$\widetilde{f}'(x) = \frac{f(x+\Delta t) - f(x-\Delta t)}{2\Delta t} \tag{3-6-4}$$

由 Taylor 级数展开可以将上式进一步写成

$$\begin{aligned}\widetilde{f}'(x) = {} & \frac{f(x) + \Delta t f'(x) + \Delta t^2 f''(x)/2! + \Delta t^3 f''(\xi)/3! + o(\Delta t^4)}{2\Delta t} - \\ & \frac{f(x) - \Delta t f'(x) + \Delta t^2 f''(x)/2! - \Delta t^3 f''(\xi)/3! + o(\Delta t^4)}{2\Delta t} = f'(x) + \frac{\Delta t^3}{3!} f''(\xi)\end{aligned} \tag{3-6-5}$$

可见这种中心差分的算法精度为 $o(\Delta t^2)$。

这里给出一组比此算法精度更高的高阶中心差分算法，这些算法的精度为 $o(\Delta t^4)$

$$\begin{aligned}
y_i' &= \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12\Delta t} \\
y_i'' &= \frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12\Delta t^2} \\
y_i''' &= \frac{-y_{i+3} + 8y_{i+2} - 13y_{i+1} + 13y_{i-1} - 8y_{i-2} + y_{i-3}}{8\Delta t^3} \\
y_i^{(4)} &= \frac{-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i - 39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3}}{6\Delta t^4}
\end{aligned} \tag{3-6-6}$$

3.6.2 中心差分方法及其 MATLAB 实现

从前面的介绍可知，式（3-6-6）中给出的微分算法有 $o(\Delta t^4)$ 级精度，因而即使 Δt 不趋于 0 时，仍能得出较好的近似微分。所以这里采用该公式为所选算法，可以编写出一个 MATLAB 函数，其内容为

```
function [dy,dx]=diff_ctr(y,Dt,n)
y1=[y 0 0 0 0 0 0]; y2=[0 y 0 0 0 0 0]; y3=[0 0 y 0 0 0 0];
y4=[0 0 0 y 0 0 0]; y5=[0 0 0 0 y 0 0]; y6=[0 0 0 0 0 y 0]; y7=[0 0 0 0 0 0 y];
switch n             % 按给定的阶次由开关结构求数值微分
   case 1, dy=(-y1+8*y2-8*y4+y5)/12/Dt;
   case 2, dy=(-y1+16*y2-30*y3+16*y4-y5)/12/Dt^2;
   case 3, dy=(-y1+8*y2-13*y3+13*y5-8*y6+y7)/8/Dt^3;
   case 4, dy=(-y1+12*y2-39*y3+56*y4-39*y5+12*y6-y7)/6/Dt^4;
end
```

```
dy=dy(5+2*(n>2):end-4-2*(n>2)); dx=([2:length(dy)+1]+(n>2))*Dt;
```

这样编写的M函数调用格式为 $[\boldsymbol{d}_y,\boldsymbol{d}_x]$=diff_ctr($\boldsymbol{y}$,$\Delta t$,$n$)，其中，$\boldsymbol{y}$为给定的等间距的实测数据构成的向量，$\Delta t$为自变量的间距，$n$为所需的导数阶次。向量$\boldsymbol{d}_y$为得出的导数向量，而$\boldsymbol{d}_x$为相应的自变量向量。注意这两个向量的长度比$\boldsymbol{y}$短。

例3-56 这里仍采用例3-13中给出的函数。由于原型函数已知，所以可以求出导数的解析解，从中求出精确的值。试用数值微分求取原函数的一阶～四阶导数，并和解析解比较精度。

解 生成一个横坐标点组成的向量$\boldsymbol{x}$。另外由已知的原型函数，可以立即得出函数各阶导数的解析解，并将已知的横坐标点代入，即可以得出各阶导数精确的数值解，可以用于对照

```
>> h=0.05; x=0:h:pi; syms x1; y(x1)=sin(x1)/(x1^2+4*x1+3); %得出解析解数据，用于比
   yy1=diff(y); f1=yy1(x); yy2=diff(yy1); f2=yy2(x);
   yy3=diff(yy2); f3=yy3(x); yy4=diff(yy3); f4=yy4(x);
```

假设由该原型函数可以生成一些数据点y_i，由这些点可以拟合出曲线的一阶～四阶导数。下面的语句可以通过数值的方法获得已知数据点处的各阶导数，还可以绘制出曲线，将数值导数和由解析解计算出来的导数在相同的坐标系下绘制出来，如图3-9所示。可以看出，由中心差分算法获得的导数是很精确的，其误差从图上是看不出来的。

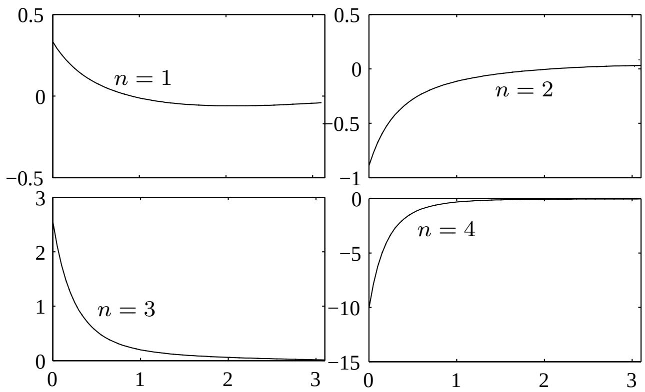


图3-9　各阶导数比较

```
>> y=sin(x)./(x.^2+4*x+3); [y1,dx1]=diff_ctr(y,h,1);
   subplot(221), plot(x,f1,dx1,y1,':'); [y2,dx2]=diff_ctr(y,h,2);
   subplot(222), plot(x,f2,dx2,y2,':'); [y3,dx3]=diff_ctr(y,h,3);
   subplot(223), plot(x,f3,dx3,y3,':'); [y4,dx4]=diff_ctr(y,h,4);
   subplot(224), plot(x,f4,dx4,y4,':') %解析解与数值解的曲线比较
```

下面定量地分析得出的误差，考虑计算得出的四阶导数向量，其长度比原始对照向量f_4短，所以两个向量取同样多点进行比较，就可以得出数值方法的相对误差最大值为3.5×10^{-4}，亦即0.035%。由此可见，这里的数值方法还是很精确的。

```
>> norm((y4-f4(4:60))./f4(4:60)) %数值解的相对误差
```

3.6.3　二元函数的梯度计算

如果给定二元函数的函数值矩阵$\boldsymbol{z}$，其中，$\boldsymbol{z}$为网格数据，则可以由gradient()函数求取二元函数的梯度。该函数的调用格式为$[\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{f}_y]$=gradient($\boldsymbol{z}$)。其实，这样计算出来的$\boldsymbol{f}_x$与$\boldsymbol{f}_y$

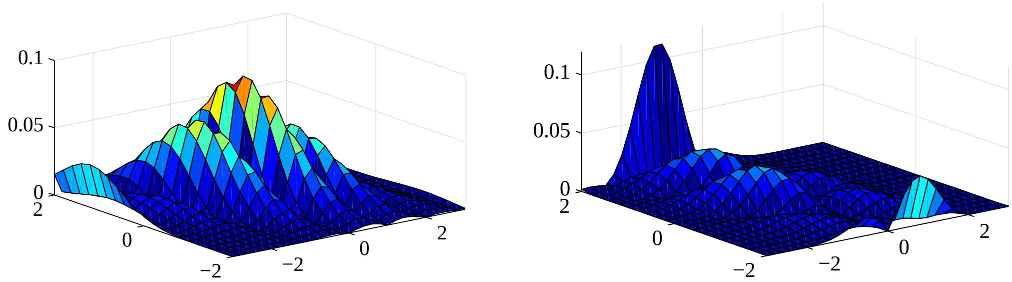
不是真正的梯度，这里尚未考虑 x, y 坐标的情况。如果得到的 z 矩阵是建立在等间距的形式生成网格基础上的，则实际的梯度值可以由 $\boldsymbol{f}_x = \boldsymbol{f}_x/\Delta x$ 和 $\boldsymbol{f}_y = \boldsymbol{f}_y/\Delta y$ 求出，其中，Δx 和 Δy 分别为 x, y 生成网格的步距。

例 3-57 考虑例 3-16 中的问题，假设已经得出网格数据，试用数值方法由该数据解出梯度值。

解 现在重新生成数据，则可以由这些数据直接计算出该函数的梯度，而无须再从原函数直接计算梯度值。由下面的语句还能绘制出带有等值线的引力线图，和图 3-3(b) 中的图形完全一致。

```
>> syms x y; z(x,y)=(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y);
   [x0,y0]=meshgrid(-3:.2:3,-2:.2:2); z0=double(z(x0,y0));
   [fx,fy]=gradient(z0); fx=fx/0.2; fy=fy/0.2; %梯度的数值计算
   contour(x0,y0,z0,30); hold on; quiver(x0,y0,-fx,-fy) %在等高线上绘制引力线
```

下面的语句将绘制出误差的曲面，如图 3-10 所示。可见大部分区域内误差还是较小的，但在某些小的区域内误差较大，这说明原来网格的间距较大，使得简单的梯度函数难以精确求解。



（a）$\partial z/\partial x$ 的误差曲面　　（b）$\partial z/\partial y$ 的误差曲面

图 3-10 二元函数数值梯度的误差曲面

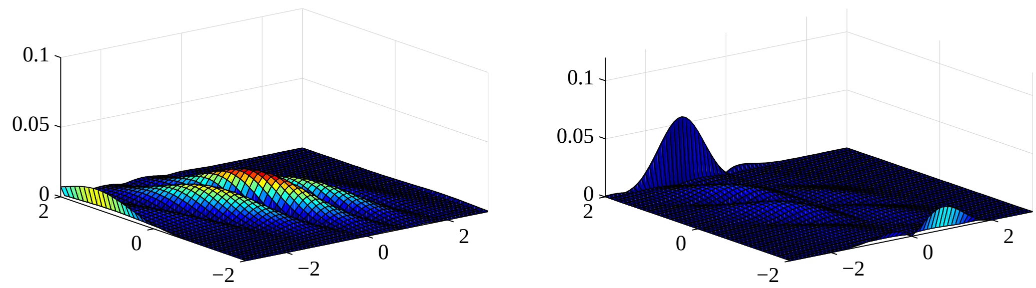
```
>> zx=diff(z,x); zx0=double(zx(x0,y0)); %梯度的理论值计算
   zy=diff(z,y); zy0=double(zy(x0,y0));
   subplot(121), surf(x0,y0,abs(fx-zx0)); axis([-3 3 -2 2 0,0.1]) %误差曲面绘制
   subplot(122), surf(x0,y0,abs(fy-zy0)); axis([-3 3 -2 2 0,0.12])
```

如果将网格加密一倍，则可以由下面的语句计算数值梯度，得出的结果和其与理论值之间的误差也可以绘制出来，如图 3-11 所示，可见这时误差显著减小。

```
>> [x1,y1]=meshgrid(-3:.1:3,-2:.1:2); z1=double(z(x1,y1));
   [fx,fy]=gradient(z1); fx=fx/0.1; fy=fy/0.1; %网格加密一倍的数值梯度计算
   z1=double(zx(x1,y1)); z2=double(zy(x1,y1));
   subplot(121), surf(x1,y1,abs(fx-z1)); axis([-3 3 -2 2 0,0.1]) %误差曲面绘制
   subplot(122), surf(x1,y1,abs(fy-z2)); axis([-3 3 -2 2 0,0.12])
```

3.7 数值积分问题

数值积分问题是传统数值分析课程中的重要内容。本节将分几种情况介绍数值积分问题的求解方法。首先，如果被积函数的数学表达式未知，则需要由实测数据通过梯形算法求出积分的近似值；如果被积函数已知，则将分别介绍一元函数积分、一元函数广义积分、二重积分以及多重积分问题。采用前面介绍的解析解方法和 vpa() 函数，可以得出任意一元函数的积分值，所以若安装了符号运算工具箱，则没有太大必要采用本节介绍的纯数值方法；对于重积分问题来说，



（a）$\partial z/\partial x$ 的误差曲面　　（b）$\partial z/\partial y$ 的误差曲面

图 3-11　网格加密后二元函数数值梯度的误差曲面

如果内重积分是解析不可积的，则解析解方法是不能得出积分值的，必须采用数值积分方法。

3.7.1　由给定数据进行梯形求积

一元函数定积分的数学表示为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{3-7-1}$$

在被积函数 $f(x)$ 理论上不可积时，即使有强大的计算机数学语言帮忙，也不能够求出该积分的解析解，所以往往要采用数值方法来求解。求解定积分的数值方法是多种多样的，如简单的梯形法、Simpson 法、Romberg 法等算法都是数值分析课程中经常介绍的方法。它们的基本思想都是将整个积分空间 $[a,b]$ 分割成若干个子空间 $[x_i,x_{i+1}]$，$i=1,2,\cdots,n$，其中，$x_1=a$，$x_{n+1}=b$。这样整个积分问题就分解为下面的求和形式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n \Delta f_i \tag{3-7-2}$$

而在每一个小的子空间上都可以近似地求解出来，当然最简单的求每一个小的子空间的积分方法是采用梯形近似的方法。梯形方法还可以应用于已知数据样本点的数值积分问题求解。假设在实验中测得一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$，且 x_i 为严格单调递增的数值，直接求取这些点对应曲线的数值积分最直观的方法就是用梯形方法，用直线将这些点连接起来，则积分可以近似为该折线与 x 轴之间围成的面积。

假设已经建立起向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}]^{\mathrm{T}}$，则由 MATLAB 的 `trapz()` 函数可以直接用梯形法求解积分问题，该函数调用格式为 S=`trapz(`$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$`)`，其中，$\boldsymbol{x}$ 可以为行向量或列向量，$\boldsymbol{y}$ 的行数应该等于 $\boldsymbol{x}$ 向量的元素数。如果 $\boldsymbol{y}$ 由多列矩阵给出，则用该函数可以得出若干个函数的积分值。

例 3-58　试用梯形法求出 $x\in(0,\pi)$ 区间内，函数 $\sin x$，$\cos x$，$\sin(x/2)$ 的定积分值。

解　生成区间内横坐标向量，用上述的算法可以求出各个函数的数值积分值为 1.9982，0.0000，1.9995，而这些理论值分别为 2，0，2。

```
>> x1=[0:pi/30:pi]'; y=[sin(x1) cos(x1) sin(x1/2)]; S=trapz(x1,y) %梯形积分法计
```

由于选择的步距较大，为 $h=\pi/30\approx 0.1$，故得出的结果有较大的误差。在 8.1.2 节中将积分问题与样条插值技术相结合，给出一个能精确计算数值积分的 MATLAB 函数，并演示其在更大步距下的有效性和精度。

例 3-59　请用定步长方法求解积分 $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\cos 15x\,\mathrm{d}x$。

解 求解问题之前，首先用下面的MATLAB语句绘制出被积函数的曲线，如图3-12所示。可见，在求解区域内被积函数有很强的振荡。

```
>> x=linspace(0,3*pi/2,500); y=cos(15*x); plot(x,y) %被积函数的振荡曲线
```

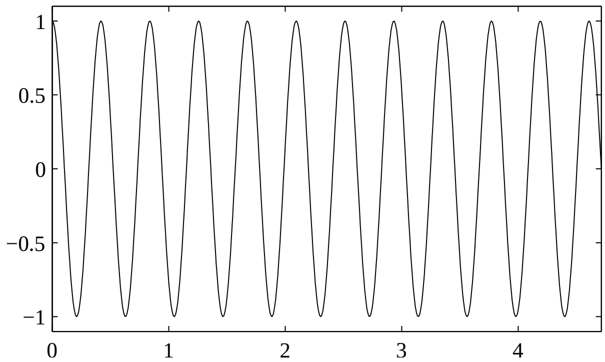


图 3-12 被积函数 $f(x) = \cos 15x$ 的曲线

对不同的步距 $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001$，可以用下面的语句求出采用不同步距的积分近似结果，见表3-1。

```
>> syms x, A=int(cos(15*x),0,3*pi/2); h0=10.^[-1:-1:-6]; v=[];
   for h=h0, tic %不同计算步长下的梯形法数值积分计算
      x=[0:h:3*pi/2, 3*pi/2]; y=cos(15*x); I=trapz(x,y); v=[v; h,I,1/15-I];
   toc, end
```

表 3-1 步距选择与计算结果

步长	得出积分值	误差	步长	得出积分值	误差
0.1	0.05389175150075948	0.0127749152	0.0001	0.06666665416666881	1.24999978×10^{-8}
0.01	0.0665416954658383	0.0001249712	10^{-5}	0.06666666654166685	1.24999816×10^{-10}
0.001	0.06666541668003727	1.2499866×10^{-6}	10^{-6}	0.06666666666541621	1.25045807×10^{-12}

可见，随着步距 h 的减小，计算精度逐渐增加。例如，当 $h = 10^{-6}$ 时可以保留小数点后11位精确数字，但这时求解的时间也将成倍增加，达到0.25 s——此函数执行效率较早期版本有明显的改善。如果想进一步增加计算精度，还得再减小步长，这样内存将耗尽，程序不能继续执行下去。

如果积分区间从现在的 $(0, 3\pi/2)$ 修改成更大的范围，如 $(0, 1000)$，为保证计算精度，不宜增大步长。如果仍取 $h = 10^{-6}$，则下面将给出内存不足的错误信息，所以需要更有效的数值积分函数。

```
>> h=1e-6; x=[0:h:1000]; tic, y=cos(15*x); I=trapz(x,y); toc %大范围积分不可行
```

3.7.2 单变量数值积分问题求解

单变量函数的数值积分还可以采用一般数值分析中介绍的其他算法进行求解。例如，可以采用下面给出的Simpson方法求解出 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分 Δf_i 的近似值为

$$\Delta f_i \approx \frac{h_i}{12}\left[f(x_i) + 4f\left(x_i+\frac{h_i}{4}\right) + 2f\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right) + 4f\left(x_i+\frac{3h_i}{4}\right) + f(x_i+h_i)\right] \tag{3-7-3}$$

式中，$h_i = x_{i+1} - x_i$。

MATLAB中引入了新的自适应变步长数值积分求取函数 `integral()`，其调用格式为

I=integral(f,a,b, 属性设置对)，其中，f 用于描述被积函数，它可以是一个 Fun.m 函数文件名（由 @Fun 或 'Fun' 给出），该函数的一般格式为 $\boldsymbol{y}$=Fun($\boldsymbol{x}$)，还可以用匿名函数等；a，b 分别为定积分的上限和下限。该函数还允许给出“属性设置对”来设置积分控制选项，如 RelTol 选项和相对误差限的值来指定计算精度。这样的属性还包括绝对误差限 AbsTol、向量积分控制标志 ArrayValued 等。下面将通过例子演示数值积分的求解。

早期MATLAB版本可以使用底层函数 quad()、quadl()、quadgk() 和 quadv() 计算数值积分的值，其调用格式与 integral() 类似，其效率要远远低于 integral() 函数。

例 3-60 考虑不可积数学函数 $\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，试用数值方法来求解该积分。

解 在求取数值解之前，需要首先描述一下被积函数。描述被积函数有三种方法：

（1）**M 函数**。建立一个 MATLAB 函数并将其存成文件，其内容为

```
function y=c3ffun(x), y=2/sqrt(pi)*exp(-x.^2); %被积函数的M函数描述
```

这样，可以将上述内容存入一个 c3ffun.m 文件。由于自变量每次读入的可以是一组 $\boldsymbol{x}$ 的值，所以函数内部应该使用点运算来计算每个自变量取值处的函数值 $\boldsymbol{y}$。

（2）**匿名函数**。建立匿名函数，其格式为 f=@(x)2/sqrt(pi)*exp(-x.^2)，这种方法的特点是可以动态地描述需要求解的问题，而无须建立一个单独的文件，所以这样的方法更适合于简单问题的直接应用，该函数中，@ 符号后的括号内为函数的自变量，后面接函数的计算表达式。

（3）**inline() 函数**。类似于匿名函数的方法，可以用 inline() 函数定义被积函数，如

```
>> f=inline('2/sqrt(pi)*exp(-x.^2)','x'); %被积函数的inline()描述
```

同样，这种方法也无须建立一个单独的 MATLAB 文件。相比之下，inline() 函数的第一个输入变量为被积函数本身，和 MATLAB 函数描述格式完全相同，第二个输入变量为自变量，当然还可以带有多个自变量。不过，inline() 函数方法属于被淘汰的方法，不建议使用。

定义了被积函数，可以调用 integral() 函数直接求解出定积分值为 0.966105146475311。

```
>> f=@(x)2/sqrt(pi)*exp(-x.^2); y=integral(f,0,1.5) %双精度数值积分计算
```

其实，对这样简单的一元数值积分问题来说，用符号运算工具箱可以求解出更精确的解 $I_0=0.9661051464753107139369337299499 1$。可见，前面的数值解在双精度意义下还是相当精确的。

```
>> syms x, I0=vpa(int(2/sqrt(pi)*exp(-x^2),0,1.5)) %高精度数值解
```

虽然前面介绍的三种方法均可以用于描述被积函数，但它们各有特点。M 函数的方法可以描述带有中间变量的问题，而后两种方法则不能。在后面将涉及的返回多个变量的问题也不适合采用匿名函数与 inline() 函数。从计算速度看，使用匿名函数的速度要明显快于 M 函数，本书将尽量采用匿名函数，如需返回多个变量或涉及中间变量时则只能采用 M 函数。

例 3-61 试求解下面分段函数的积分问题

$$I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x,\quad 其中,\quad f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 80/\big[4-\sin(16\pi x)\big], & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

解 用曲线绘制函数不难绘制出分段函数，这里为减小视觉上的误差，在端点和间断点处采用了特殊处理，故可以得出如图 3-13 所示的填充图形。可见，在 $x=2$ 点处有跳跃。

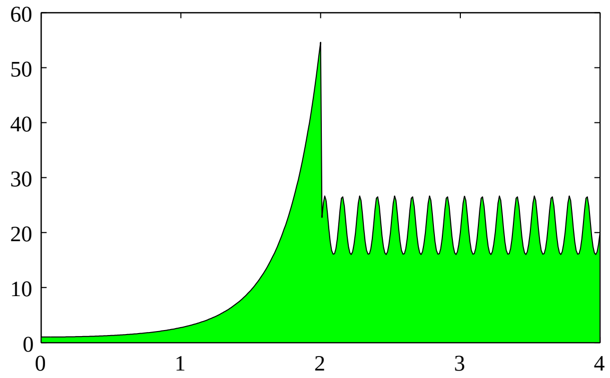


图 3-13 被积区域填充示意图

```
>> x=[0:0.01:2, 2+eps:0.01:4,4]; y=exp(x.^2).*(x<=2)+80./(4-sin(16*pi*x)).*(x>2);
   y(end)=0; x=[eps, x]; y=[0,y]; fill(x,y,'g') %绘制积分区域的填充图形
```

利用关系表达式可以描述出被积函数，调用积分函数 integral() 就可以求解出原始定积分，得出 $I_1 = 57.764450125048505$。

```
>> f=@(x)exp(x.^2).*(x<=2)+80./(4-sin(16*pi*x)).*(x>2); I=integral(f,0,4)
```

其实，还可以将原来的积分问题转换成 $\int_0^2 + \int_2^4$ 的问题，用积分问题解析解求解函数 int() 可以得出原始问题的精确解为 $I = 57.764450125053010333315235385 18$。

```
>> syms x; I0=vpa(int(exp(x^2),0,2)+int(80/(4-sin(16*pi*x)),2,4))
```

此问题的解析解是已知的，当然可以和解析解对比，看得出的解精度如何，而实际应用中解析解是未知的，如何检验得出的解是否正确呢？考虑设置一下更严格的相对误差限 RelTol，看看能否得出一致的结果，如果不能则再设置更小的误差限。例如，本问题选择误差限 10^{-20} 即可得出更精确的结果 $I_2 = 57.764450125053010$，可见，该解是双精度数据结构下最精确的解。

```
>> I2=integral(f,0,4,'RelTol',1e-20) %数值积分的双精度计算
```

利用符号变量的分段函数表示方法，可以给出下面语句计算积分，结果和前面的完全一致。

```
>> f=piecewise('x<=2','exp(x^2)','x>2','80/(4-sin(16*pi*x))');
   syms x; I=vpa(int(f,x,0,4)) %定积分的解析高精度计算
```

例 3-62 试用 integral() 函数求解例 3-59 中的定积分问题，$I = \displaystyle\int_0^{3\pi/2} \cos 15x \,\mathrm{d}x$。

解 从例 3-59 中演示的定步长方法看，只有步长选得极小，才能准确得出 11 位有效数字，且耗时较长。其实，用变步长数值积分函数可以轻而易举地求出该定积分问题的解为 $S = 0.06666666666667$，所需时间只需 0.0035 s，使用的时间也大大地减少了。

```
>> f=@(x)cos(15*x); tic, S=integral(f,0,3*pi/2,'RelTol',1e-20), toc
```

所以，由此可以得出结论：求解变化不均匀的函数的积分不宜采用传统数值分析类课程介绍的定步长积分算法，因为用该算法精度难以保证；而若要使用小步长，则计算量将极大，且仍然无法保证计算精度。采用变步长算法可以很容易地得出原问题的解。

例 3-63 试求解复数积分问题 $\displaystyle\int_2^{6-\mathrm{j}5} \mathrm{e}^{-x^2-\mathrm{j}x} \sin(7+\mathrm{j}2)x\mathrm{d}x$。

解 复函数的积分问题可以由下面的语句直接求解，得出的积分值为 $I = -0.9245 + \mathrm{j}25.792$。采用理论值求解方法可以验证，前面得出的数值积分是准确的。

```
>> f=@(x)exp(-x.^2-1i*x).*sin((7+2i)*x); I=integral(f,2,6-5i,'RelTol',1e-20)
   syms x; i=sqrt(-1); F=exp(-x^2-i*x)*sin((7+2i)*x); I0=vpa(int(F,2,6-5i))
```

例 3-64 重新考虑例 3-59 中的振荡函数积分问题，若积分区间为 $[0,1000]$，试求出其数值积分。

解 由于积分区间过大且被积函数一直在振荡，所以梯形方法 trapz() 函数将失效。利用新版本的数值积分函数可以得出积分的值为 $I_1=0.059561910526150$，耗时仅 0.013 s。采用解析解方法验证了该积分的精确值为 $I=\sin(15000)/15\approx 0.05956191052641859089450785303999 6$，耗时 0.093 s，可见，数值函数 integral() 是精确高效的。

```
>> f=@(x)cos(15*x); tic, I1=integral(f,0,1000,'RelTol',1e-20), toc
   syms x; tic, I=int(cos(15*x),x,0,1000), vpa(I), toc %积分的解析解
```

3.7.3 广义数值积分问题求解

前面介绍的 integral() 可以直接用于广义积分的求取，函数的调用格式与前面介绍的完全一致，直接在积分限位置给出 -inf 或 inf 即可。下面通过例子演示该函数的应用。

例 3-65 试求出无穷积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$。

解 由数值积分函数 integral() 可以直接得出所需的无穷积分为 $I=0.886226925452758$，与理论值 $I_1=\sqrt{\pi}/2\approx 0.88622692545275801365$ 相当接近，误差达到 10^{-16} 级别。

```
>> f=@(x)exp(-x.^2); I=integral(f,0,inf,'RelTol',1e-20) %数值积分
   syms x; I1=int(exp(-x^2),0,inf), vpa(I1) %误差限提高后的数值积分计算
```

例 3-66 已知 $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin(\alpha^2 x)\mathrm{d}x$，试绘制出 $I(\alpha)$ 与 α 的关系曲线，其中 $\alpha\in(0,4)$。

解 前面介绍的积分都是某个单个函数的定积分，而这里需要求解的是对一系列 α 值的定积分问题，使用应该采用向量函数积分的方法。下面的语句可以直接求取原问题的积分，得出的函数曲线如图 3-14 所示。早期版本求解此问题需要采用循环结构。

```
>> a=0:0.1:4; f=@(x)exp(-a*x.^2).*sin(a.^2*x); %向量函数的数值积分
   I=integral(f,0,inf,'RelTol',1e-20,'ArrayValued',true); plot(a,I)
```

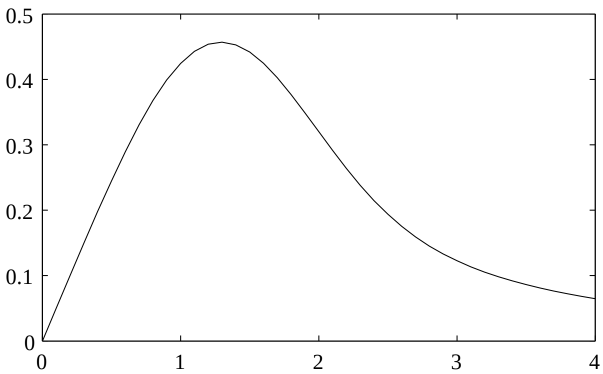


图 3-14 积分 $I(\alpha)$ 与 α 的关系曲线

3.7.4 积分函数的数值求解

本节前面介绍的内容都是求出 (a,b) 区间的定积分的方法，如何绘制出函数的积分函数

$$F(x)=\int_a^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3-7-4}$$

的曲线是这里要探讨的问题。仿照数值积分的方法，可以将积分区间 (a,b) 作 n 等分，令 $x_1=a$，$x_2=a+h,\cdots,x_{n+1}=b$，其中，$h=(b-a)/n$，则积分函数在 a 点的值为 0（即 (a,a) 区间的定积分为 0），记 $F_1=0$，可以由下面的递推公式直接求解积分函数

$$F_{k+1}=F_k+\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{3-7-5}$$

这样，可以编写出如下的 MATLAB 函数来计算积分函数

```
function [x,f1]=intfunc(f,a,b,n)
if nargin<=3, n=100; end; x=linspace(a,b,n); f1=0; F=0; %设置默认参数
for i=1:n-1, F=F+integral(f,x(i),x(i+1),'RelTol',1e-20); f1=[f1, F]; end
```

该函数的调用格式为 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}_1]$=intfunc($f,a,b,n$)，$n$ 的默认值为 100。

例 3-67 试绘制出例 3-61 中分段函数的积分曲线。

解 由于分段函数中 e^{x^2} 是不可积的函数，所以不能用解析解方法绘制出其积分函数曲线，求解这样的问题只能用数值方法。先用匿名函数定义出被积函数，则可以调用 intfunc() 函数直接求解原问题，得出的积分函数曲线如图 3-15 所示。可见，例 3-61 得出的定积分只是其右侧端点的函数值。

```
>> f=@(x)exp(x.^2).*(x<=2)+80./(4-sin(16*pi*x)).*(x>2); %描述分段函数
   [x1,f1]=intfunc(f,0,4,100); plot(x1,f1,x1(end),f1(end),'o'), f1(end)
```

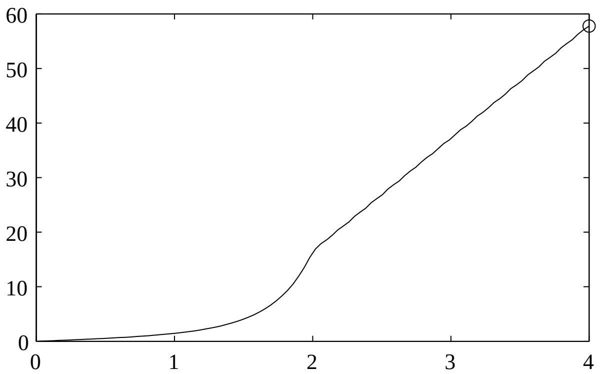


图 3-15 给出函数的积分曲线

3.7.5 双重积分问题的数值解

考虑下面的双重定积分问题的标准型

$$I=\int_{x_\mathrm{m}}^{x_\mathrm{M}}\int_{y_\mathrm{m}(x)}^{y_\mathrm{M}(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{3-7-6}$$

由 MATLAB 提供的 integral2() 函数就可以直接求出上述双重定积分的数值解。该函数的调用格式为 I=integral2($f,x_\mathrm{m},x_\mathrm{M},y_\mathrm{m},y_\mathrm{M}$,属性参数对)，其中，“属性参数对”的用法与

integral() 函数完全一致，y_m 与 y_M 可以是积分边界的函数句柄。调用 integral() 函数时需要特别注意的是积分次序为先 y 后 x。

例 3-68 试求出双重定积分 $J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sin(x^2+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解 对矩形积分区域而言，因为可以交换积分次序，所以只要能找对 x 和 y 的积分边界阶可以直接求解了。用匿名函数表示被积函数，选择 x 和 y 的积分范围分别为 $[-2,2]$，$[-1,1]$，这样就可以通过下面的MATLAB语句求出被积函数的双重定积分值为1.574498159218786。

```
>> f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y); J=integral2(f,-2,2,-1,1,'RelTol',1e-20)
```

仿照图3-15的思路，可以编写出等间距矩形子区域的积分函数数值解的MATLAB函数，并绘制出积分函数曲面，该函数的调用格式为 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{F}]$=intfunc2$(f,x_\mathrm{m},x_\mathrm{M},y_\mathrm{m},y_\mathrm{M},n,m)$，其中，$f$ 为匿名函数或M函数，$(x_\mathrm{m},x_\mathrm{M})$ 和 $(y_\mathrm{m},y_\mathrm{M})$ 为积分的矩形区域，n,m 为 x,y 轴的分段数，默认值为50。返回变量 $\boldsymbol{F}$(end,end) 即为定积分的值。

```
function [yv,xv,F]=intfunc2(f,xm,xM,varargin)
[ym,yM,n,m]=default_vals({xm,xM,50,50},varargin{:}); %设置默认参数
xv=linspace(xm,xM,n); yv=linspace(ym,yM,m); d=yv(2)-yv(1);
[x y]=meshgrid(xv,yv); F=zeros(n,m); %建立网格点并进行初始化
for i=2:n, for j=2:m,                %对每个网格点进行循环
   F(i,j)=integral2(f,xv(1),xv(i),yv(1),yv(j),'RelTol',1e-20); %数值积分计算
end, end
```

例 3-69 求解例3-68被积函数在矩形区域内的积分曲面。

解 下面语句可以先用匿名函数定义被积函数，这样就可以求出二元函数的积分曲面，如图3-16所示，曲面左上角的值为例3-68求出的近似定积分值 $I=1.574498159218787$，但耗时较长，达到5.67 s，需要更高效的算法极其实现。

```
>> f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y); %被积函数的匿名函数描述
   tic, [x,y,z]=intfunc2(f,-2,2,-1,1); toc, surf(x,y,z), I=z(end,end)
```

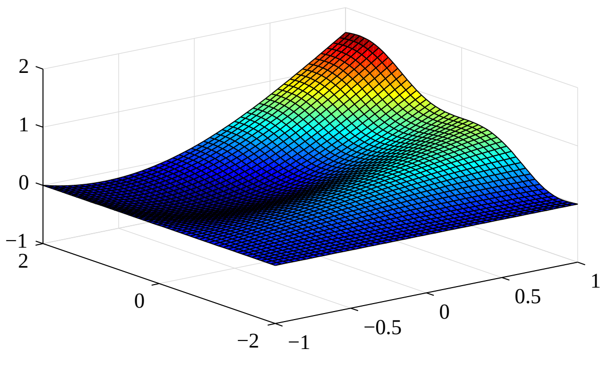


图 3-16 给出二元函数的积分曲面

例 3-70 试求出双重定积分 $J=\displaystyle\int_{-1/2}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2/2}}^{\sqrt{1-x^2/2}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sin(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。

解 这里的例子是先 y 后 x，和标准型中的积分顺序是一致的，所以可以直接调用下面的语句求解，其结果为0.411929546176295。

```
>> fh=@(x)sqrt(1-x.^2/2); fl=@(x)-sqrt(1-x.^2/2); %内积分上下限的匿名函数描述
   f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y); y=integral2(f,-1/2,1,fl,fh) %数值积分计算
```

解析解方法不能得出原问题的解析解，但可以得出其高精度数值解为 0.41192954617629512。

```
>> syms x y   %现在考虑解析解方法
   i1=int(exp(-x^2/2)*sin(x^2+y),y,-sqrt(1-x^2/2),sqrt(1-x^2/2));
   int(i1,x,-1/2,1), vpa(ans) %求取解析解时得出警告信息，但数值解可得出
```

遗憾的是，在 MATLAB 中并没有提供求解先 x 后 y 的双重积分问题的求解函数

$$I=\int_{y_{\mathrm{m}}}^{y_{\mathrm{M}}}\int_{x_{\mathrm{m}}(y)}^{x_{\mathrm{M}}(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-7-7}$$

可以考虑将其变换为式 (3-7-6) 的标准形式，再用 `integral2()` 函数求解原始问题。先对 y 再对 x 积分的问题，具体地，令 $\hat{x}=y$，$\hat{y}=x$，则式 (3-7-7) 可以等效地变换为

$$I=\int_{\hat{x}_{\mathrm{m}}}^{\hat{x}_{\mathrm{M}}}\int_{\hat{y}_{\mathrm{m}}(\hat{x})}^{\hat{y}_{\mathrm{M}}(\hat{x})} f(\hat{y},\hat{x})\,\mathrm{d}\hat{y}\mathrm{d}\hat{x} \tag{3-7-8}$$

这样，最简单的方法就是互换原函数 $f(x,y)$ 中变量的次序，而不必修改其他的部分，将被积函数定义成 f=@(y,x) 即可。下面将通过一个具体例子来演示双重积分的运算。

例 3-71 求解双重积分 $J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\sinh(x^2+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的数值解。

解 从理论上说，该问题是没有解析解的，不过利用符号运算的方式，可以得出原双重积分的高精度数值解为 $I=0.70412133490335689947800312022517$，耗时 123.57 s。

```
>> syms x y, tic, i1=int(exp(-x^2/2)*sinh(x^2+y),x,-sqrt(1-y^2),sqrt(1-y^2));
   I=int(i1,y,-1,1), vpa(I), toc %求取解析解时得出警告信息，但数值解可得出
```

对这里给出的问题来说，由于积分顺序是先 x 后 y，所以无须修改被积函数本身，只需修改匿名函数的入口变量顺序，就可以由下面语句直接得出其数值解为 0.704121334903362，耗时仅需 0.0195 s。可见该数值算法是很高效的，精度也是很高的。

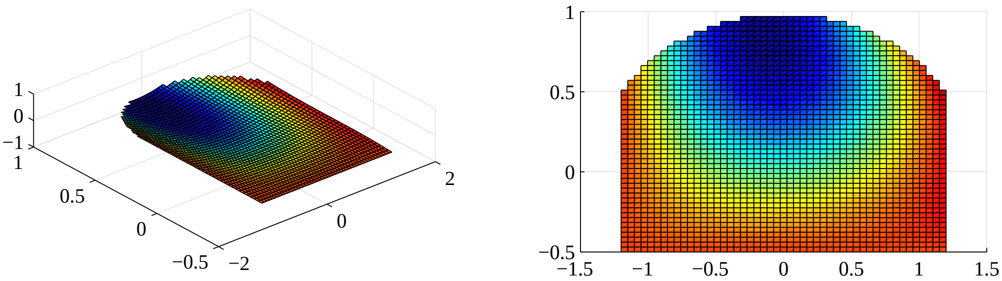
```
>> tic, f=@(y,x)exp(-x.^2/2).*sinh(x.^2+y); fh=@(y)sqrt(1-y.^2); %仅交换变量次序
   fl=@(y)-sqrt(1-y.^2); I=integral2(f,-1,1,fl,fh,'RelTol',1e-20), toc
```

积分函数曲面仍然可以利用 `intfunc2()` 函数求出，然后将积分区域之外部分的函数值设置成 `NaN` 即可。

例 3-72 试求取例 3-70 中的积分曲面。

解 可以由前面介绍的方法先求出矩形区域的积分函数数值解，然后对得到的解逐列扫描，将积分区域之外的点函数值设置为 `NaN`，这样可以通过下面语句绘制积分函数的曲面，如图 3-17(a) 所示。使用 `view(0,90)` 则可以得出积分区域的表示，如图 3-17(b) 所示。

```
>> f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y); fh=@(x)sqrt(1-x.^2/2);
   fl=@(x)-sqrt(1-x.^2/2); [x,y,z]=intfunc2(f,-1/2,1,-1.2,1.2);
   for i=1:length(x), x0=x(i); xx=sort([fl(x0), fh(x0)]);
      ii=find(y>xx(2) | y<xx(1)); z(ii,i)=NaN;  %剔除积分区域之外的点
   end
```



（a）二元函数积分曲面（手工旋转）　（b）曲面俯视图

图 3-17　二元函数的积分曲面

```
surf(x,y,z), figure, surf(x,y,z), view(0,90) %绘制积分示意图
```

3.7.6　三重定积分的数值求解

一般三重定积分的标准型为

$$I=\int_{x_\mathrm{m}}^{x_\mathrm{M}}\int_{y_\mathrm{m}(x)}^{y_\mathrm{M}(x)}\int_{z_\mathrm{m}(x,y)}^{z_\mathrm{M}(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{3-7-9}$$

这样的三重积分问题可以由MATLAB的`integral3()`函数得出。该函数调用格式为

I=`integral3(`f,x_m,x_M,y_m,y_M,z_m,z_M,属性参数对`)`

其中，f描述三元被积函数，同样可以用M函数、匿名函数或`inline()`函数定义。“属性参数对”的内容与`integral()`函数完全一致，y_m，y_M，z_m与z_M可以是函数句柄。如果积分的顺序有变，则可以仿照前面的`integral2()`处理方式做相应的变换再直接求解。

例 3-73　用数值方法求解例3-32中的三重定积分问题$\displaystyle\int_0^2\int_0^\pi\int_0^\pi 4xz\mathrm{e}^{-x^2y-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。

解　用匿名函数描述被积函数，该被积函数有x,y,z三个自变量，通过下面的语句立即可以求出三重定积分值，其近似解为3.108079402085465，耗时0.42 s。

```
>> f=@(x,y,z)4*x.*z.*exp(-x.*x.*y-z.*z); %描述多元被积函数
   tic, I=integral3(f,0,2,0,pi,0,pi,'RelTol',1e-20), toc %数值积分计算
```

例 3-74　试求解下面的三重积分问题

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{e}^{-(x+y^2)}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

解　用下面的语句可以直接求解出积分的数值解$I=0.237902335517189$，耗时0.16 s。

```
>> tic, f=@(x,y,z)z.^2.*exp(-(x+y.^2)); yM=@(x)sqrt(1-x.^2); %被积函数
   zm=@(x,y)sqrt(x.^2+y.^2); zM=@(x,y)sqrt(2-x.^2-y.^2);      %积分区域边界
   I=integral3(f,0,1,0,yM,zm,zM,'RelTol',1e-20); toc          %三重数值积分
```

如果考虑采用解析求解方法，则可以尝试下面的语句，不过经过43.9 s的等待，将得到提示，该问题是没有解的，也不能得出该积分的近似值，所以只能借助于数值方法。

```
>> syms x y z, zm=sqrt(x^2+y^2); zM=sqrt(2-x^2-y^2); tic %积分的解析求解
   I=int(int(int(z^2*exp(-(x+y^2)),z,zm,zM),y,0,sqrt(1-x^2)),x,0,1), vpa(I), toc
```

3.7.7 多重积分数值求解

当前的MATLAB版本并不能求解更多重积分的问题，美国学者Wilson和Gardner开发的NIT工具箱（Numerical Integral Toolbox）[3]可以解决多重超长方体边界的定积分问题，例如，使用quadndg()函数，但对一般积分区域来说则没有现成的求解函数。积分区域为超长方体的多重积分问题可以表示为

$$I=\int_{x_{1\mathrm{m}}}^{x_{1\mathrm{M}}}\int_{x_{2\mathrm{m}}}^{x_{2\mathrm{M}}}\cdots\int_{x_{p\mathrm{m}}}^{x_{p\mathrm{M}}} f(x_1,x_2,\cdots,x_p)\mathrm{d}x_p\cdots\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \tag{3-7-10}$$

该问题的求解语句为I=quadndg(f,[$x_{1\mathrm{m}},x_{2\mathrm{m}},\cdots,x_{p\mathrm{m}}$],[$x_{1\mathrm{M}},x_{2\mathrm{M}},\cdots,x_{p\mathrm{M}}$],$\epsilon$)，其中，$f$为描述被积函数的M函数，$\epsilon$为误差容限，可以忽略。

例3-75 试用多重积分的求解函数重新求例3-73中的三重积分问题$\int_0^2\int_0^\pi\int_0^\pi 4xz\mathrm{e}^{-x^2y-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。

解 令$x_1=x,x_2=y,x_3=z$，则原问题的被积函数可以重新改写成$f(\boldsymbol{x})=4x_1x_3\mathrm{e}^{-x_1^2x_2-x_3^2}$，可以用下面的匿名函数直接描述被积函数，然后调用求解函数求解原积分问题，得出原问题的解为$I=3.108079402085409$，该结果与例3-73一致，但由于quadndg()算法效率高于integral3()，所以求解的时间大约为例3-73的1/10。

```
>> f=@(x)4*x(1)*x(3)*exp(-x(1)^2*x(2)-x(3)^2); %被积函数的匿名函数描述
   tic, I=quadndg(f,[0 0 0],[2,pi,pi]), toc     %三重积分的数值解
```

例3-76 用数值和解析解方法求解下面的五重定积分问题。

$$I=\int_0^5\int_0^4\int_0^1\int_0^2\int_0^3 \sqrt[3]{v}\sqrt{w}x^2y^3z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}w\mathrm{d}v$$

解 对这样的特殊问题来说，其解析解是可以求出的，积分值为$120\sqrt[3]{5}$，耗时0.133 s。

```
>> syms x y z w v; F=v^(1/3)*sqrt(w)*x^2*y^3*z; tic %多重积分的解析解
   I=int(int(int(int(int(F,z,0,3),y,0,2),x,0,1),w,0,4),v,0,5), toc
```

事实上，大部分高维积分问题解析解是不存在的，所以应该采用数值方法去求解。令$x_1=v$，$x_2=w,x_3=x,x_4=y,x_5=z$，则被积函数可以改写成

$$f(\boldsymbol{x})=\sqrt[3]{x_1}\sqrt{x_2}x_3^2x_4^3x_5$$

所以此积分问题的被积函数可以由匿名函数表示，这样可以给出下面的求解语句，得出$I=205.2205\approx120\sqrt[3]{5}$。由于这里采用的算法是非向量型的，所以运算速度较向量型算法慢很多，本例所需时间大约4.92 s。

```
>> f=@(x)(x(1))^(1/3)*sqrt(x(2))*x(3)^2*x(4)^3*x(5); %描述被积函数
   tic, I=quadndg(f,[0 0 0 0 0],[5,4,1,2,3]), toc     %数值积分的计算
```

例3-77 用数值方法求解下面的五重定积分问题。

$$I=\int_0^5\int_0^4\int_0^1\int_0^2\int_0^3\left(\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{v}}\sin\sqrt{w}+\mathrm{e}^{-x^2y^3z}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}w\mathrm{d}v$$

解 这里给出的例子是不能解析求解的，必须借助数值方法求解原始问题。仍旧令$x_1=v,x_2=w$，$x_3=x,x_4=y,x_5=z$，则被积函数可以改写成

$$f(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x_1}}\sin\sqrt{x_2}+\mathrm{e}^{-x_3^2x_4^3x_5}$$

此积分问题的被积函数可以由匿名函数表示，这样可以给出下面的求解语句，得出多重积分的值为$I=113.60574122$。尽管被积函数比上例的复杂很多，但两者的计算时间相差无几。

```
>> f=@(x)exp(-(x(1))^(1/3))*sin(sqrt(x(2)))+exp(-x(3)^2*x(4)^3*x(5)); %被积函数
   tic, I=quadndg(f,[0 0 0 0 0],[5,4,1,2,3]), toc %计算另一个多重积分
```

3.8 习 题

（1）试求出如下极限：

① $\lim\limits_{x\to\infty}(3^x+9^x)^{1/x}$， ② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{x+2}(x+3)^{x+3}}{(x+5)^{2x+5}}$， ③ $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}$，

④ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$，

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x+x\right)}{x}\right]$。

（2）试求出下面的累极限 $\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b}f(x,y)\right]$ 和 $\lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a}f(x,y)\right]$：

① $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}, a=\infty, b=\infty$， ② $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}, a=0, b=\infty$。

（3）试求下面的双重极限：

① $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}}\dfrac{x^2y+xy^3}{(x+y)^3}$， ② $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$， ③ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{x^2+y^2}}$。

（4）试证明函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right]=0$，但该函数的双重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在。

（5）试求出 $y(t)=\sqrt{(x-1)(x-2)/[(x-3)(x-4)]}$ 函数的四阶导数。

（6）求出下面函数的导数：

① $y(x)=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$， ② $y=\dfrac{1-\sqrt{\cos ax}}{x\left(1-\cos\sqrt{ax}\right)}$，

③ $\mathrm{atan}\dfrac{y}{x}=\ln(x^2+y^2)$， ④ $y(x)=-\dfrac{1}{na}\ln\dfrac{x^n+a}{x^n}, n>0$。

（7）试求函数 $y(x)=(1-\sqrt{\cos ax})/[x\left(1-\cos\sqrt{ax}\right)]$ 的十阶导数。

（8）在高等数学中，求解分子和分母均同时为0或 ∞ 的分式极限时可使用L'Hôpital法则，即对分子分母分别求导数，再由比值得出。试用该法则求 $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)\ln(1-x)-\ln(1-x^2)]/x^4$，并和直接求出的极限结果相比较。

（9）已知参数方程 $\begin{cases}x=\ln\cos t\\ y=\cos t-t\sin t,\end{cases}$ 试求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\pi/3}$。

（10）试求出下面参数方程的一阶导数与二阶导数：

① $\begin{cases}x(t)=a(\ln\tan t/2+\cos t-\sin t)\\ y(t)=a(\sin t+\cos t),\end{cases}$ ② $\begin{cases}x(t)=2at/(1+t^3)\\ y=a(3at^2)/(1+t^3)\end{cases}$

（11）假设 $u=\arccos\sqrt{x/y}$，试验证 $\partial^2u/(\partial x\partial y)=\partial^2u/(\partial y\partial x)$。

（12）设 $\begin{cases}xu+yv=0\\ yu+xv=1,\end{cases}$ 试求解 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$。

(13) 假设 $u=xyze^{x+y+z}$,试求 $\partial^{p+q+r}u/(\partial x^p\partial y^q\partial z^r)$。(提示:`diff()` 函数并不能直接求 p 阶导数,试将 p,q,r 选择为不同整数再求导,并总结规律。)

(14) 假设 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$,试求 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

(15) 试由下面参数方程求出 dy/dx, d^2y/dx^2 和 d^3y/dx^3:

① $x=e^{2t}\cos^2 t, y=e^{2t}\sin^2 t$, ② $x=\mathrm{arcsin}t/\sqrt{1+t^2}, y=\mathrm{arccos}t/\sqrt{1+t^2}$。

(16) 若 $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$,求出 dy/dx, d^2y/dx^2 和 d^3y/dx^3 在 $x=0,y=1$ 时的值。

(17) 假设已知函数矩阵 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}3x+e^yz\\x^3+y^2\sin z\end{bmatrix}$,试求出其 Jacobi 矩阵。

(18) 若 $u=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4$,试求 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$。

(19) 试计算习题(18)中函数 $u(x,y)$ 的 Laplace 算子。

(20) 若 $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$,试求 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$。

(21) 若 $z=\psi\left(x^2+y^2\right)$,试求 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

(22) 若 $u=x\phi(x+y)+y\psi(x+y)$,试求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。

(23) 若 $z=F(r,\theta)$,其中,r 与 θ 为 x 和 y 的函数,$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,试求出 $\partial z/\partial x$ 与 $\partial z/\partial y$。

(24) 试求出下面向量函数的散度与旋度

① $\boldsymbol{v}(x,y)=\left[5x^2y-4xy,\ 3x^2-2y\right]$, ② $\boldsymbol{v}(x,y,z)=\left[x^2y^2,\ 1,\ z\right]$,

③ $\boldsymbol{v}(x,y,z)=\left[2xyz^2,\ x^2z^2+z\cos yz,\ 2x^2yz+y\cos yz\right]$。

(25) 试求解下面的不定积分问题:

① $I(x)=-\displaystyle\int\frac{3x^2+a}{x^2\left(x^2+a\right)^2}dx$, ② $I(x)=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx$,

③ $I(x)=\displaystyle\int xe^{ax}\cos bx dx$, ④ $I(x)=\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\sin cx dx$, ⑤ $I(t)=\displaystyle\int(7t^2-2)3^{5t+1}dt$。

(26) 试求出下面的定积分或反常积分:

① $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$, ② $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$, ③ $\displaystyle\int_{e^{-2\pi n}}^1\left|\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx$。

(27) 试求解下面的定积分:

① $\displaystyle\int_0^{0.75}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$, ② $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$, ③ $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx$。

(28) 试求出下面的不定积分:

① $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$, ② $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$。

(29) 试求出积分 $I(s)=\displaystyle\int_0^s\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$。

(30) 给定函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换定义为 $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$,试求出下面函数的 Laplace 变换

① $f(t)=1$, ② $f(t)=e^{\beta t}$, ③ $f(t)=\sin\alpha t$, ④ $f(t)=t^m$。

（31）假设 $f(x)=\mathrm{e}^{-5x}\sin(3x+\pi/3)$，试求出积分函数 $R(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)f(t+x)\mathrm{d}x$。

（32）试求出下面重积分：

① $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，② $\displaystyle\int_0^1\int_{-1}^{1-x}\arcsin(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，

③ $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，④ $\displaystyle\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

（33）试求取下面的三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_V x^3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中，$V$ 为给定区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant z\leqslant xy$。

（34）对 a 的不同取值试求出 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

（35）试证明对任何函数 $f(t)$，$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$。

（36）试求解下述的多重积分问题：

① $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，② $\displaystyle\int_0^3\int_0^{3-x}\int_0^{3-x-y}xyz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，

③ $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。

（37）试求出如下多重积分：

① $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y\int_0^z xyzu\mathrm{e}^{6-x^2-y^2-z^2-u^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，

② $\displaystyle\int_0^{7/10}\int_0^{4/5}\int_0^{9/10}\int_0^1\int_0^{11/10}\sqrt{6-x^2-y^2-z^2-w^2-u^2}\mathrm{d}w\mathrm{d}u\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。

（38）试对下面函数进行 Fourier 级数展开：

① $f(x)=(\pi-|x|)\sin x, -\pi\leqslant x<\pi$，② $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}, -\pi\leqslant x<\pi$

③ $f(x)=\begin{cases}2x/l, & 0<x<l/2\\ 2(l-x)/l, & l/2<x<l,\end{cases}$ 且 $l=\pi$。

（39）试求出下面函数的 Taylor 幂级数展开：

① $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，② $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$，③ $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，④ $(1+4.2x^2)^{0.2}$，

⑤ $\mathrm{e}^{-5x}\sin(3x+\pi/3)$ 分别关于 $x=0, x=a$ 的幂级数展开。

（40）试得出 $f(t)=\mathrm{e}^t$ 的 Taylor 级数展开公式，并判断其前十项能逼近的 t 的范围。

（41）试求出下面多元函数的 Taylor 幂级数展开：

① $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 关于 $x=0, y=0$ 点和 $x=a, y=b$ 点的展开，

② $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$ 关于 $x=0, y=0$ 和 $x=a, y=b$ 的展开。

（42）对 $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{x^2+y^2}}$ 关于 $x=1, y=0$ 点进行二维 Taylor 幂级数展开。

（43）试求下面级数的前 n 项及无穷项的和：

① $\dfrac{1}{1\times 6}+\dfrac{1}{6\times 11}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$，

② $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$，

③ $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1\times 4}{3\times 6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{1\times 4\times 7}{3\times 6\times 9}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+\dfrac{1\times 4\times 7\times 10}{3\times 6\times 9\times 12}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4+\cdots$。

(44) 试求下面无穷级数之和:

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n},\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, ② $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$, ③ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$,

④ $\displaystyle\frac{1}{3}\frac{x}{2}+\frac{1\times 4}{3\times 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\times 4\times 7}{3\times 6\times 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1\times 4\times 7\times 10}{3\times 6\times 9\times 12}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots$。

(45) 试求出下面级数的前 n 项有限和与无穷级数:

① $\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+\cdots+(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x})+\cdots$,

② $\displaystyle 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$。

(46) 已知序列通项 a_n,试求出无穷级数的和:

① $\displaystyle a_n=\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n-1}{n+1}$, ② $\displaystyle a_n=\frac{1}{n^{1+k/\ln n}}$。

(47) 试求出下面序列的和:

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$, ② $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$, ③ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$。

(48) 试求出下面的极限:

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-1}\right)$,

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\frac{1}{n^2+3\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$。

(49) 试证明 $\displaystyle\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin(n\theta/2)\cos[(n+1)\theta/2]}{\sin\theta/2}$。

(50) 试求出下面的无穷序列乘积:

① $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$, ② $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{9n^2}{(3n-1)(3n+1)}$, ③ $\displaystyle\prod^{\infty}a^{(-1)^n/n},a>0$。

(51) 若级数通项为 $\displaystyle a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\mathrm{d}x$,试计算 $\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$。

(52) 试判定下面无穷级数的收敛性:

① $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}\right)^n$, ② $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{\ln n\ln(\ln x)}$, ③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$,

④ $\displaystyle\frac{3}{2}-\frac{3\times 5}{2\times 5}+\frac{3\times 5\times 7}{2\times 5\times 8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 5\times 8\times\cdots\times(3n-1)}+\cdots$。

(53) 试求出使得下面无穷级数收敛的 x 区间:

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$, ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}\,n}{2^n}x^n(1-x)^n$, ③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$。

(54) 试求出以下的曲线积分:

① $\displaystyle\int_l(x^2+y^2)\mathrm{d}s$,$l$ 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t),(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,

② $\displaystyle\int_l(yx^3+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y$,其中,$l$ 为 $a^2x^2+b^2y^2=c^2$ 正向上半椭圆,

③ $\displaystyle\int_l y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,$l$ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t,y=\mathrm{e}^{-t},z=at,0\leqslant t\leqslant 1,a>0$,

④ $\displaystyle\int_l(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$,其中,$l$ 为由 $(a,0)$ 点到 $(0,0)$ 再经 $x^2+y^2=ax$ 上正向半圆周构成的曲线。

(55) 假设某曲线可以由极坐标函数 $r=\rho(\theta)$ 描述,且 $\theta\in(\theta_{\rm m},\theta_{\rm M})$,则曲线的长度为

$$L=\int_{\theta_{\rm m}}^{\theta_{\rm M}}\sqrt{\rho^2(\theta)+[{\rm d}\rho(\theta)/{\rm d}\theta]^2}{\rm d}\theta$$

试求出曲线 $\rho=a\sin^2\theta/3,\theta\in(0,3\pi)$ 的长度。

(56) 若曲面 S 为半球 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的底部,试求下面曲面积分:

① $\displaystyle\int_S xyz^3\,{\rm d}s$, ② $\displaystyle\int_S(x+yz^3)\,{\rm d}x{\rm d}y$。

(57) 试对表 3-2 中数据描述的函数求取各阶数值微分,并用梯形法求取定积分。

表 3-2　习题(57)中的数据

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
y_i	0	2.2077	3.2058	3.4435	3.241	2.8164	2.311	1.8101	1.3602	0.98172	0.67907	0.4473	0.27684

(58) 由表 3-3 给出的数据计算函数的梯度。已知这些数据是由函数 $f(x,y)=4-x^2-y^2$ 生成的,试将得出的梯度曲面和理论值进行比较。

表 3-3　习题(58)中的数据

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	4	3.96	3.84	3.64	3.36	3	2.56	2.04	1.44	0.76	0
0.2	3.96	3.92	3.8	3.6	3.32	2.96	2.52	2	1.4	0.72	−0.04
0.4	3.84	3.8	3.68	3.48	3.2	2.84	2.4	1.88	1.28	0.6	−0.16
0.6	3.64	3.6	3.48	3.28	3	2.64	2.2	1.68	1.08	0.4	−0.36
0.8	3.36	3.32	3.2	3	2.72	2.36	1.92	1.4	0.8	0.12	−0.64
1	3	2.96	2.84	2.64	2.36	2	1.56	1.04	0.44	−0.24	−1
1.2	2.56	2.52	2.4	2.2	1.92	1.56	1.12	0.6	0	−0.68	−1.44
1.4	2.04	2	1.88	1.68	1.4	1.04	0.6	0.08	−0.52	−1.2	−1.96
1.6	1.44	1.4	1.28	1.08	0.8	0.44	0	−0.52	−1.12	−1.8	−2.56
1.8	0.76	0.72	0.6	0.4	0.12	−0.24	−0.68	−1.2	−1.8	−2.48	−3.24
2	0	−0.04	−0.16	−0.36	−0.64	−1	−1.44	−1.96	−2.56	−3.24	−4

(59) 试用数值方法求出定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-t)^{1/4}f(t){\rm d}t$,其中,$f(t)={\rm e}^{-t}\sin(3t+1)$。如果采样点选为 $t=0.1,0.2,\cdots,\pi$,试用数值方法求出各个采样点处的积分函数值 $F(t)=\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{1/4}f(\tau)\,{\rm d}\tau$,并绘制出 $F(t)$ 曲线。

(60) 试用数值积分方法求出下面的多重积分值。值得指出的是,下面积分的解析解均不存在,所以应该验证得出的结果是否正确。

① $\displaystyle\int_0^2\int_0^{{\rm e}^{-x^2/2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,{\rm e}^{-x^2-y^2}\,{\rm d}y{\rm d}x$, ② $\displaystyle\int_0^2\int_0^2\int_0^2 z(x^2+y^2){\rm e}^{-x^2-y^2-z^2-xz}\,{\rm d}z{\rm d}y{\rm d}x$,

③ $\displaystyle\int_0^{7/10}\int_0^{4/5}\int_0^{9/10}\int_0^1\int_0^{11/10}\sqrt{6-x^2-y^2-z^2-w^2-u^2}\,{\rm d}w{\rm d}u{\rm d}z{\rm d}y{\rm d}x$。

参考文献

[1] 吉米多维奇. 数学分析习题集,李荣涑译. 北京:人民教育出版社,1979.
[2] 陈传璋,金福临,朱学炎,等. 数学分析. 北京:人民教育出版社,1979.
[3] Wilson H,Gardner B. Numerical integration toolbox (NIT).