第3章　润滑计算的数值解法

各种流体润滑问题都涉及在狭小间隙中的流体黏性流动，描写这种物理现象的基本方程为雷诺方程，它的普遍形式是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=6\left(U\frac{\partial \rho h}{\partial x}+V\frac{\partial \rho h}{\partial y}+2\frac{\partial \rho h}{\partial t}\right) \tag{3-1}$$

这个椭圆形的偏微分方程仅仅对于特殊的间隙形状才可能求得解析解，而对于复杂的几何形状或工况条件下的润滑问题，无法用解析方法求得精确解。随着电算技术的迅速发展，数值法成为求解润滑问题的有效途径。

数值法是将偏微分方程转化为代数方程组的变换方法。它的一般原则是：首先将求解域划分成有限个数的单元，并使每一个单元充分微小，以至于可以认为在各单元内的未知量（例如油膜压力 p）相等或者依照线性变化，而不会造成很大的误差。然后，通过物理分析或数学变换方法，将求解的偏微分方程写成离散形式，即将它转化为一组线性代数方程。该代数方程组表示了各个单元的待求未知量与周围各单元未知量的关系。最后，根据 Gauss 消去法或者 Gauss-Seidel 迭代法求解代数方程组，从而求得整个求解域上的未知量。

用来求解雷诺方程的数值方法很多，最常用的是有限差分法、有限元法和边界元法，这些方法都是将求解域划分成许多个单元，但是处理方法各不相同。在有限差分法和有限元法中，代替基本方程的函数在求解域内是近似的，但完全满足边界条件。而边界元法所用的函数在求解域内完全满足基本方程，但是却近似地满足边界条件。

能量方程和弹性变形方程是流体润滑问题中考虑热效应和表面弹性变形时必须求解的重要方程，在本章中也将介绍它们的数值解法。近年发展的多重网格法在润滑计算中得到广泛的应用。本章的最后还将介绍如何用多重网格法求解微分方程和积分方程。

3.1　雷诺方程的数值解法

3.1.1　有限差分法

根据边界条件求解雷诺方程，这在数学上称为边值问题。在流体润滑计算中，有限差分法的应用最为普遍。现将有限差分法求数值解的步骤和方法说明如下。

首先，将所求解的偏微分方程量纲一化。这样做的目的是减少自变量和因变量的数目，同时用量纲一化参数表示的解具有通用性。

然后，将求解域划分成等距的或不等距的网格。图 3-1 为等距网格，在 X 方向有 m 个节点，Y 方向有 n 个节点，总计 $m\times n$ 个节点。网格划分的疏密程度根据计算精度要求确定。有时为提高计算精度，可在未知量变化剧烈的区段内细化网格，即采用两种或几种不同

间距的分格,或者采用按一定比例递减的分格方法。

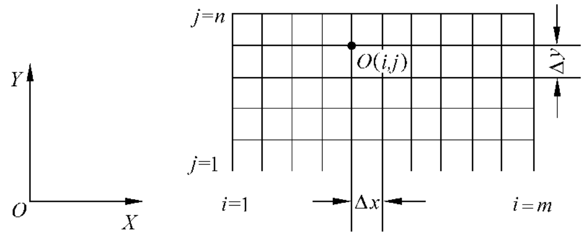

图 3-1 等距网格划分

如果用 ϕ 代表所求的未知量(例如油膜压力 p),则变量 ϕ 在整个域中的分布可以用各节点的 ϕ 值来表示。根据差分原理,任意节点 $O(i,j)$ 的一阶和二阶偏导数都可以由其周围节点的变量值来表示。

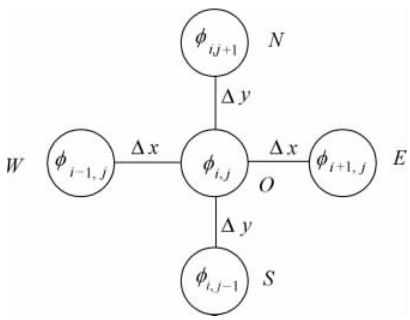

图 3-2 差分关系

如图 3-2 所示,如果采用中差分公式,则变量 ϕ 在 $O(i,j)$ 点的偏导数为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x}\\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta y}\end{aligned}\right\}\tag{3-2}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}-2\phi_{i,j}}{(\Delta x)^2}\\ \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-2\phi_{i,j}}{(\Delta y)^2}\end{aligned}\right\}\tag{3-3}$$

在求解域的边界上或者根据计算要求也可采用前差分公式,即

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}\\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{\Delta y}\end{aligned}\right\}\tag{3-4}$$

或者用后差分公式,即

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}}{\Delta x}\\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{i,j}&=\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{\Delta y}\end{aligned}\right\}\tag{3-5a}$$

通常,中差分的精度最高,若采用下面的中差分表达式,则精度更高,例如

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{\phi_{i+1/2,j}-\phi_{i-1/2,j}}{\Delta x}\tag{3-5b}$$

以 ϕ 表示润滑膜压力,将雷诺方程写成二维二阶偏微分方程的标准形式,即

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+C\frac{\partial\phi}{\partial x}+D\frac{\partial\phi}{\partial y}=E$$

式中,A、B、C、D 和 E 均为已知量。

将上述方程应用到各个节点，根据中差分公式(3-2)和式(3-3)用差商代替偏导数，即可求得各节点的变量 $\phi_{i,j}$ 与相邻各节点变量的关系。这种关系可以写成

$$\phi_{i,j} = C_N\phi_{i,j+1} + C_S\,\phi_{i,j-1} + C_E\,\phi_{i+1,j} + C_W\,\phi_{i-1,j} + G \tag{3-6}$$

式(3-6)中各系数值随节点位置而改变。其中

$$C_N = \left(\frac{B}{\Delta y^2} + \frac{D}{2\Delta y}\right)\Big/K$$

$$C_S = \left(\frac{B}{\Delta y^2} - \frac{D}{2\Delta y}\right)\Big/K$$

$$C_E = \left(\frac{A}{\Delta x^2} + \frac{C}{2\Delta x}\right)\Big/K$$

$$C_W = \left(\frac{A}{\Delta x^2} - \frac{C}{2\Delta x}\right)\Big/K$$

$$G = -\frac{E}{K},\quad K = 2\left(\frac{A}{\Delta x^2} + \frac{B}{\Delta y^2}\right)$$

方程(3-6)是有限差分法的计算方程，对于每个节点都可以写出一个方程，而在边界上的节点变量应满足边界条件，它们的数值是已知量。这样，就可以求得一组线性代数方程。方程与未知量数目相一致，所以可以求解。采用消去法或迭代法求解代数方程组，并使计算结果满足一定的收敛精度，最终求得整个求解域上各节点的变量值。

以下介绍流体润滑问题的有限差分法求解。

1. 流体静压润滑

在稳定工况下，流体静压润滑的油膜厚度 h 为常数，若不考虑相对滑动和热效应，则黏度 η 也是常数。这时雷诺方程可简化为 Laplace 方程，即

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{3-7}$$

将上式量纲一化，令 $x=XA$，$y=YB$，A、B 为几何尺寸；$p=Pp_r$，p_r 为油腔压力；$\alpha=A^2/B^2$；则量纲一化雷诺方程为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \alpha\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = 0 \tag{3-8}$$

求解方程(3-8)的边界条件为

(1) 在油腔内 $P=1$；

(2) 在四周边缘上 $P=0$。

将中差分公式(3-3)代入基本方程(3-8)得

$$\frac{P_{i+1,j} + P_{i-1,j} - 2P_{i,j}}{\Delta X^2} + \alpha\frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1} - 2P_{i,j}}{\Delta Y^2} = 0 \tag{3-9}$$

给出边界条件即可由方程(3-9)求得油膜压力分布的数值解。

2. 流体动压润滑

用于不可压缩流体动压润滑轴承的雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 6U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{3-10}$$

当 h 是 x、y 的已知函数时，对于等黏度润滑问题而言，方程(3-10)是线性的。对于变黏度润滑问题，则需要考虑黏度随温度或压力的变化，特别是呈非牛顿性的润滑剂的黏度还

受各点速度梯度的影响，则方程(3-10)变成非线性偏微分方程，求解过程较为复杂。

1）准二维问题求解

在润滑问题的工程计算中，往往采用准二维简化方法。其要点是对于二维变化的油膜压力，预先给定沿某一坐标方向(如轴向)的变化规律，再将这一规律代入二维的雷诺方程，即变换为容易求解的一维问题。

根据 Ocvirk 对无限短轴承的分析，油膜压力 p 沿 Y 方向(即轴向)的分布规律为抛物线，即

$$p = p_c(1 - Y^{\phi}) \tag{3-11}$$

式中，p_c 为轴向中间断面上的压力；Y 为量纲一化坐标；ϕ 为指数。实践表明，将轴向压力分布指数 ϕ 取为 2 适合大多数有限长轴承的情况。

下面以斜面楔形滑块的等黏度润滑计算为例说明雷诺方程的准二维解法。图 3-3 所示为有限长斜面滑块。

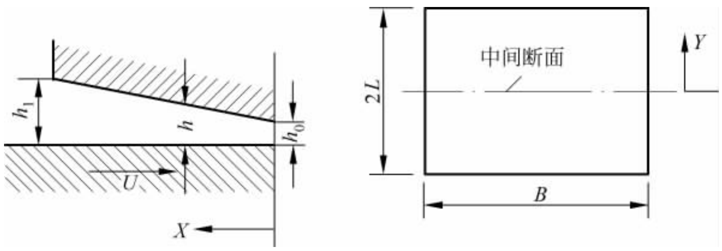

图 3-3 斜面滑块

若令

$$x = XB$$
$$y = YL$$
$$p = P\frac{6\eta UB}{h_0^2}$$
$$\alpha = \frac{B^2}{L^2}$$
$$h = h_0\left(1 + X\frac{h_1 - h_0}{h_0}\right) = Hh_0$$

代入式(3-10)后得量纲一化基本方程：

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \alpha\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{3}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{H^3}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X} \tag{3-12}$$

这种形式的方程被称为 Poisson 方程。

再将 $P = P_c(1 - Y^2)$ 代入方程(3-12)，则变换成只含变量 P_c 和 X 的方程，即可求解中间断面上量纲一化压力 P_c 随 X 的变化。因而

$$\frac{\partial^2 P_c}{\partial X^2} + \frac{3}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}\frac{\partial P_c}{\partial X} - 2\alpha P_c = \frac{1}{H^3}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}$$

或

$$\frac{\partial^2 P_c}{\partial X^2} + a\frac{\partial P_c}{\partial X} + bP_c = c \tag{3-13}$$

方程(3-13)中各系数值为

$$a=\frac{3}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$$

$$b=-2\alpha=-\frac{2B^2}{L^2}$$

$$c=\frac{1}{H^3}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}$$

差分方程可写成

$$P_i+C_EP_{i-1}+C_WP_{i+1}=G$$

式中，C_E、C_W、G 是由 a、b、c 表达的系数。

2）二维问题求解

通常的径向滑动轴承设计采用等黏度润滑计算，即假定润滑膜具有相同的黏度，同时认为间隙 h 只是 x 的函数，而不考虑安装误差和轴的弯曲变形。

将轴承表面沿平面展开，如图 3-4 所示，并代入 $x=R\theta$，$\mathrm{d}x=R\mathrm{d}\theta$，则雷诺方程变为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+h^3R^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=6U\eta R\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}\tag{3-14}$$

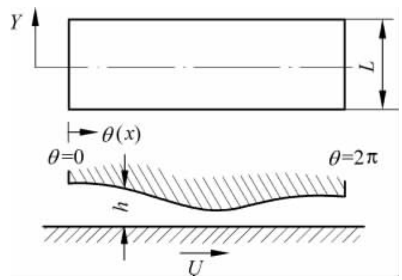

图 3-4　径向轴承展开

若令

$$y=YL/2$$
$$\alpha=(2R/L)^2$$
$$h=c(1+\varepsilon\cos\theta)=Hc$$
$$p=P\frac{6U\eta R}{c^2}$$

代入后，得量纲一化雷诺方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H^3\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\alpha H^3\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\\&\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\alpha\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}-\frac{3\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\frac{\partial P}{\partial\theta}=-\frac{\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\end{aligned}\right\}\tag{3-15}$$

以上各式中，R 为轴承半径；L 为轴承长度；ε 为偏心率，$\varepsilon=e/c$，e 为偏心距，c 为半径间隙。

然后，应用差分公式得出式(3-6)形式的计算方程。由于变量 P 是二维变化的，所以代数方程包含 5 个系数。

对于径向轴承，方程(3-15)中两个自变量的变化范围是：在轴向中间断面处，$Y=0$；在边缘处，$Y=1$。而 θ 在 $0\sim2\pi$ 之间变化，这一问题的边界条件为

（1）轴向方向。在边缘 $Y=1$ 处，$P=0$；在中间断面 $Y=0$ 处，$\frac{\partial P}{\partial Y}=0$。

（2）圆周方向。按雷诺边界条件，即油膜起点在 $\theta=0$ 处，取 $P=0$；油膜终点在发散区间内符合 $P=0$ 及 $\partial P/\partial\theta=0$ 的地方。油膜终点的位置必须在求解过程中加以确定，是浮动边界条件。即应用迭代法求解代数方程组时，在每次迭代过程中，对于 $P<0$ 的各节点令 $P=0$，最终可以自然地确定油膜终点位置。

等黏度润滑计算的另一个困难问题是如何确定黏度的数值。在流体动压润滑中，黏性摩擦使得油膜中各点的温度不同，因而黏度也不同。精确的方法是根据温度场进行变黏度润滑计算，显然，这是相当复杂的。

为了考虑温度的影响，等黏度计算中采用有效黏度 η_e 代入雷诺方程。有效黏度值应根据轴承有效温度 T_e 的大小来确定。

假设由摩擦功转化的热量全部由油流带走，则热平衡方程为

$$FU = Jc_V\rho Q\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{FU}{Jc_V\rho Q} = \frac{2p\eta U^2 RL}{Jc_V\rho Qc}$$

式中，ΔT 为润滑油温升；F 为轴颈摩擦力，由 Петров 摩擦可得，$F=2\pi U\eta RL/c$；U 为滑动速度；J 为热功当量；c_V 为比定体热容；ρ 为密度；Q 为容积流量；η 为黏度；R 和 L 为轴承的半径和长度；c 为半径间隙。

显然，有效温度 T_e 介于轴承入口油温和出口油温之间，因此，写成

$$T_e = T_i + k\Delta T$$

式中，T_i 为入口油温；k 值介于 0 与 1 之间。

王应龙等[1]对可倾瓦轴承的润滑计算得出，有效温度取作 0.9 乘以各瓦块的平均温度时，按等黏度计算的承载量与变黏度润滑计算和实验结果十分接近。

有效黏度是求解雷诺方程的基本参数，它的数值取决于温升，而温升的确定又依赖于求解雷诺方程。这种相互制约的关系必须采用反复迭代的方法求解。

3.1.2 有限元法与边界元法

下面对润滑计算中的有限元法与边界元法作简要的介绍。

1. *有限元法*

有限元法是从弹性力学计算中发展起来，继而在流体润滑计算中得到应用的一种数值计算方法。与有限差分法比较，有限元法的主要优点是：适应性强、受几何形状的限制较少、可处理各种定解条件、单元大小和节点可以任意选取、计算精度较高。但是，有限元法计算方程的构成比较复杂。

应用有限元法必须先按照变分原理推导出所求解方程的泛函。用于不可压缩流体润滑计算的雷诺方程普遍形式为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial(hU)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial(hV)}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial t} \quad (3\text{-}16)$$

写作矢量形式

$$\nabla\cdot\left(\frac{h^3}{12\eta}\nabla p\right)=\frac{1}{2}\nabla\cdot(h\boldsymbol{U})+\dot{h} \quad (3\text{-}17)$$

式中，$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$；$\boldsymbol{U}$ 为速度矢量；$\dot{h}=\dfrac{\partial h}{\partial t}$。

如图 3-5 所示，润滑区域划分成若干个三角形单元。在边界上存在两类边界条件，即在 s_p 边界上压力为已知量，$p=p_0$；在 s_q 边界上流量为已知量，$q=q_0$。

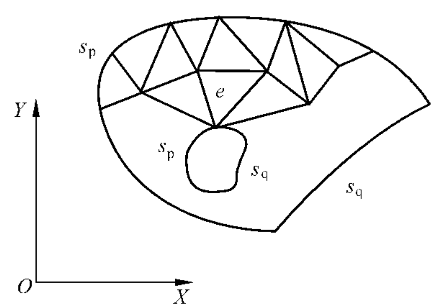

图 3-5 润滑区有限元划分

设在 e 单元中的压力为 p_e，则定义 e 单元的泛函 J_e 为

$$J_e = -\iint_A \left[-\frac{h^3}{12\eta}\nabla p_e \cdot \nabla p_e + h\boldsymbol{U}\cdot\nabla p_e - 2\dot{h}p_e\right]\mathrm{d}A + 2\int_{s_q} q_0 p_e \mathrm{d}s \tag{3-18}$$

式中，A 为积分面积；s 为积分长度。

如果润滑区域共划分为 n 个单元，各单元泛函的总和应为

$$J = \sum_{e=1}^{n} J_e$$

根据变分原理，泛函存在极值或驻定值的必要条件是它的变分为零，即

$$\delta J = \sum_{e=1}^{n} \delta J_e = 0 \tag{3-19}$$

由欧拉-拉格朗日公式可以证明：符合上述边界条件由雷诺方程(3-17)求得的解 $p(x, y)$，能够满足泛函驻定值条件(3-19)。反之，由驻定值条件(3-19)求得的解 $p(x, y)$，必然是雷诺方程(3-17)在上述边界条件下的解。这样，有限元法是将不能直接积分求解的二维雷诺方程转化为求泛函的驻定值，而由式(3-19)建成的计算方程可以求解。

通常，有限元法的求解过程可归纳如下：

(1) 将求解域划分成若干三角形或者四边形单元；

(2) 按变分原理写出所求解方程的泛函；

(3) 建立插值函数，即以单元各节点上的变量数值表示单元内任意点的数值；

(4) 根据驻定值条件建立在单元内节点未知量的代数方程组；

(5) 用叠加方法建立总体节点未知量的代数方程组；

(6) 求解代数方程组。

2. 边界元法

边界元法是 20 世纪 70 年代末发展起来的数值计算技术。它的基本特点是通过数学方法建立求解域内未知量与边界上未知量之间的关系，这样，只需要将边界划分成若干个单元，求解边界上未知量，进而推算求解域内未知量。所以，边界元法的主要优点是代数方程数很少，同时显著地减少了数据量，尤其是在求解二维和三维问题时更加突出。此外，边界元法的计算精度高于有限元法，并且可以方便地计算混合问题。然而，建立边界元法的计算方程在数学上十分困难。

目前边界元法主要应用于分析弹性力学和传热学问题。作者[2]在 1980 年以 Rayleigh 阶梯滑块为例介绍了边界元方法在润滑计算中的应用。

如图 3-6 所示，阶梯滑块依润滑膜厚度不同可分为 Ω_1、Ω_2 两部分。每一部分油膜的压力 p 所遵循的雷诺方程为

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{3-20}$$

根据对称性只需分析滑块的一半，即 $OBCE$ 部分。其总边界 s 可分成 s_1 和 s_2 两类，$s = s_1 + s_2$。边界条件分别为：

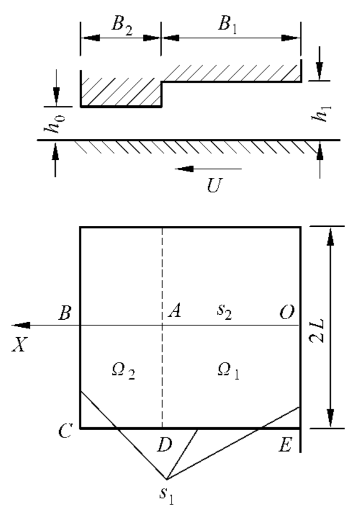

图 3-6　阶梯滑块

在 s_1 边界上 $p=p_0=0$；在 s_2 边界上 $q=\dfrac{\partial p}{\partial y}=q_0=0$。引入一个能满足基本方程(3-20)的权函数 P，根据加权残数方法可得

$$\int_{\Omega}(\nabla^2 p)P\mathrm{d}\Omega=\int_{s_2}(q-q_0)P\mathrm{d}s-\int_{s_1}(p-p_0)Q\mathrm{d}s$$

式中，$Q=\partial P/\partial Y$。

经过数学分析，求得本问题的权函数为

$$P=\ln\frac{1}{r}\Big/2\pi$$

式中，r 为 i 点至各点的距离。

求解域中任意点的未知量 p_i 与边界上积分的关系为

$$p_i+\int_s pQ\mathrm{d}s=\int_s qP\mathrm{d}s \tag{3-21}$$

同样，边界上任意点的未知量 p_i 与边界上积分的关系为

$$\frac{1}{2}p_i+\int_s pQ\mathrm{d}s=\int_s qP\mathrm{d}s \tag{3-22}$$

由式(3-22)求得边界上各点未知量后，利用式(3-21)即可计算域内各点未知量。

将求解域边界划分成 n 个单元。为简单起见，采用如图 3-7 所示的直线单元，以 n 段直线代替实际边界。同时取单元的中点为节点，并假定各单元上未知量相等或按线性变化。

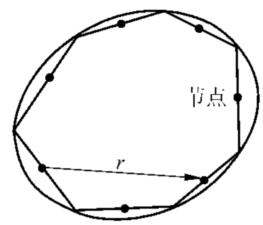

图 3-7 边界元划分

将方程(3-22)应用到等值单元的边界上，即

$$\frac{1}{2}p_i+\sum_{j=1}^{n}p_j\int_{s_j}Q\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^{n}q_j\int_{s_j}P\mathrm{d}s \tag{3-23}$$

每个节点有 p 和 q 两个变量，共有 $2n$ 个变量。其中，有 n_1 个 p 值和 n_2 个 q 值根据边界条件给出，且 $n_1+n_2=n$，所以只有 n 个未知量。由式(3-23)得到 n 个代数方程，因此，整个方程组具有确定解，即可求得边界上各节点的 p 和 q 值。然后由方程(3-21)计算域内各点的未知量。方程(3-21)的离散形式为

$$p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i\int_{s_j}P\mathrm{d}s-\sum_{j=1}^{n}p_j\int_{s_j}Q\mathrm{d}s$$

3.1.3 数值解法的其他问题

1. 参数变换

当径向轴承的偏心率较大(例如 $\varepsilon>0.8$)，或者楔形滑块具有较大的倾斜角时，最小油膜厚度 $h_{\min}$ 值很小，而在 $h_{\min}$ 附近膜厚的变化率 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ 数值很高，这就会造成在 $h_{\min}$ 附近很窄的区间内油膜压力急剧变化。此时，除非采用非常细密的网格，否则计算结果严重失真，而很密的网格又将使计算工作量增加。此外，压力在很小区间内的急剧变化，常常导致雷诺方程的求解过程不稳定。

为了克服这一困难，可以进行参数变换。对于流体润滑计算，常用的变换关系为 $M=ph^{3/2}$，称为 Vogenpohl 变换。

将 $M = ph^{3/2}$ 代入雷诺方程直接求解变量 M，然后再根据变换关系计算出 p 的数值。当 $h_{\min}$ 数值很小时，在它附近的 p 值剧增，如果以 M 为变量，M 的数值不至于变得很大。同时，M 值在 $h_{\min}$ 附近的变化也较平缓。所以，采用 M 作为变量可以获得较高的计算精度。

2. 数值积分

对于流体润滑问题，在求得压力分布以后，为了计算承载量、摩擦力和流量等都需要应用数值积分方法。

这里，以图 3-3 所示的斜面滑块为例说明计算方法的基本要点。

(1) 承载量

$$W = \iint p \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$W^* = \frac{Wh_0^2}{6U\eta LB^2} = \iint P \mathrm{d}X \mathrm{d}Y$$

(2) 摩擦力

$$F = \iint \tau \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint \left(\frac{\eta U}{h} \mp \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$F^* = \frac{Fh_0}{U\eta LB} = \iint \left(\frac{1}{H} \mp 3H \frac{\partial P}{\partial X} \right) \mathrm{d}X \mathrm{d}Y$$

(3) 容积流量

$$Q_x = \int \left(\frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \mathrm{d}y$$

$$Q_x^* = \frac{Q_x}{ULh_0} = \int \left(\frac{H}{2} - \frac{H^3}{2} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \mathrm{d}Y = \int q_x^* \mathrm{d}Y$$

$$Q_y = \int \left(- \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \mathrm{d}x$$

$$Q_y^* = \frac{Q_y}{ULh_0} = \int \alpha \left(- \frac{H^3}{2} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \mathrm{d}X = \int q_y^* \mathrm{d}X$$

以上各式中，W^*、F^*、Q_x^*、Q_y^*、q_x^* 和 q_y^* 为量纲一化变量。

用数值方法计算以上积分通常采用 Simpson 法则。例如，计算沿 X 方向的流量 Q_x^* 时有

$$Q_x^* = \frac{1}{3(m-1)} \Delta Y (q_{x1}^* + 4q_{x2}^* + 2q_{x3}^* + 4q_{x4}^* + \cdots + q_{xm}^*)$$

式中，m 为节点数，采用 Simpson 法则时，m 须为奇数；$q_{x1}^*, q_{x2}^*, \cdots, q_{xm}^*$ 为各节点的流量；ΔY 为节点之间步长。

计算 W^* 和 F^* 要连续应用 Simpson 法则两次，先按一个方向积分，然后将计算结果沿另一方向数值积分。此外，在计算 F^*、Q_x^*、Q_y^* 时，还需预先计算各节点的 $\partial P/\partial X$ 或 $\partial P/\partial Y$ 数值，对于内部节点，采用中差分公式(3-2)不难求得它们的数值。而对于边缘上的节点，则可应用三点抛物线公式计算。假设压力分布函数为 $p = ax^2 + bx + c$，则

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2ax + b$$

即

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{1j} = b$$

根据各点压力求得 b 值后，即得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{1j}=\frac{4p_{2j}-p_{3j}-3p_{1j}}{2\Delta x}$$

3．计算公式与多元回归法

数值方法的优点是对于复杂的问题能够给出较准确的解，这对于某些重要的设计和理论研究无疑是有效的手段。然而，数值方法在使用上的缺点是它求解的是个别的具体算例，缺乏一般的通用性。为了增加数值解的通用性，可以将若干组计算数据采用多元回归方法归纳成拟合公式。

先列出影响某一性能 P 的各个相关参数 A、B、C、D、…，然后，根据经验资料选择适当的函数表示各个相关参数与该性能的关系，通常采用指数函数的形式，即

$$P=KA^aB^bC^cD^d\cdots$$

最后，根据一组数量足够的(例如500个)理论计算或者实验测量的数据，采用多元回归法确定上式中的常数 K 和指数 a、b、c、d 等的数值。显然，这样确定的拟合公式不可能十分准确地符合全部数据，而只能是具有一定的可信度。同时，还必须进行反复试算和修改才能得到满意的结果。

4．突变膜厚(阶梯)的处理

在雷诺方程(3-1)的左端项中，记流量系数为

$$\frac{\rho h^3}{\eta}=k$$

如果利用中差分式

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{\phi_{i+1/2,j}-\phi_{i-1/2,j}}{\Delta x}$$

因为流量系数 k 是 x 的函数，在计算过程中一般只知道在网格点 $i-1$、i 和 $i+1$ 上的流量系数值 k_{i-1}、k_i 和 k_{i+1}，所以需要用这些已知的节点流量系数表示控制容积中间界面 $i-1/2$ 处的流量系数值 $k_{i-1/2}$ 以及中间界面 $i+1/2$ 处的流量系数值 $k_{i+1/2}$。因此，需要确定计算中间界面流量系数 $k_{i-1/2}$、$k_{i+1/2}$ 的方法。下面的讨论针对不均匀流量系数的情况，这种不均匀性可能是由阶梯突变产生的，也可能是由温度分布的不均匀导致的。

一般用中间差分求中间界面流量系数 $k_{i-1/2}$ 的最简单和直观的方法是假设 k 在 $i-1$ 和 i 之间呈线性变化，于是有

$$k_{i-1/2}=(1-\alpha)k_{i-1}+\alpha k_i \tag{3-24}$$

式中，α 是插入因子，按下式计算：

$$\alpha\equiv\frac{(\delta x)_{i-1/2-}}{(\delta x)_{i-1/2}}$$

式中，$(\delta x)_{i-1/2}$ 代表 $i-1$ 到 i 间的距离；$(\delta x)_{i-1/2-}$ 为 $i-1/2$ 到 $i-1$ 的距离。

如果界面 $i-1/2$ 位于节点 $i-1$ 到节点 i 的中点，那么由式(3-24)得到 $\alpha=0.5$，即 $k_{i-1/2}$ 是 k_{i-1} 与 k_i 的算术平均值。

在膜厚突变(阶梯)情况下这种简单化的做法会导致相当不准确的结果，因此，它不能准确地处理流量系数的突然变化问题。有一种简单而且要比这种做法好得多的替代办法可以采用。在阐明这种替代的方法时，需要指出：我们主要关心的不是流量系数在界面 $i-1/2$ 上的局部值的大小，而是要得到一个通过压力降求得描述的界面流量 $Q_{i-1/2}$ 的正确表达式，