



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLISHING FOUNDATION

“十三五”国家重点图书出版规划项目

智能制造
系列丛书

材料成形过程 模拟

周华民 等 编著



NUMERICAL SIMULATION
OF MATERIALS PROCESSING

清华大学出版社
北京

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

材料成形过程模拟/周华民等编著. —北京:清华大学出版社,2022.6
(智能制造系列丛书)

ISBN 978-7-302-59607-3

I. ①材… II. ①周… III. ①工程材料—成型—过程模拟 IV. ①TB3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 239510 号

责任编辑:袁琦

封面设计:李召霞

责任校对:王淑云

责任印制:丛怀宇

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印装者:北京嘉实印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×240mm 印 张:34

字 数:678 千字

版 次:2022 年 7 月第 1 版

印 次:2022 年 7 月第 1 次印刷

定 价:178.00 元

产品编号:078884-01

智能制造系列丛书编委会名单

主 任：

周 济

副主任：

谭建荣 李培根

委 员(按姓氏笔画排序)：

王 雪	王飞跃	王立平	王建民
尤 政	尹周平	田 锋	史玉升
冯毅雄	朱海平	庄红权	刘 宏
刘志峰	刘洪伟	齐二石	江平宇
江志斌	李 晖	李伯虎	李德群
宋天虎	张 洁	张代理	张秋玲
张彦敏	陆大明	陈立平	陈吉红
陈超志	邵新宇	周华民	周彦东
郑 力	宗俊峰	赵 波	赵 罡
钟诗胜	袁 勇	高 亮	郭 楠
陶 飞	霍艳芳	戴 红	

丛书编委会办公室

主 任：

陈超志 张秋玲

成 员：

郭英玲	冯 昕	罗丹青	赵范心
权淑静	袁 琦	许 龙	钟永刚
刘 杨			

清华大学出版社

编者名单

周华民	柳玉起	王新云	周建新	庞盛永
张云	黄志高	金俊松	章志兵	殷亚军
计效园	王云明	梁吕捷		

清华大学出版社

清华大学出版社

制造业是国民经济的主体,是立国之本、兴国之器、强国之基。习近平总书记在党的十九大报告中号召:“加快建设制造强国,加快发展先进制造业。”他指出:“要以智能制造为主攻方向推动产业技术变革和优化升级,推动制造业产业模式和企业形态根本性转变,以‘鼎新’带动‘革故’,以增量带动存量,促进我国产业迈向全球价值链中高端。”

智能制造——制造业数字化、网络化、智能化,是我国制造业创新发展的主要抓手,是我国制造业转型升级的主要路径,是加快建设制造强国的主攻方向。

当前,新一轮工业革命方兴未艾,其根本动力在于新一轮科技革命。21世纪以来,互联网、云计算、大数据等新一代信息技术飞速发展。这些历史性的技术进步,集中汇聚在新一代人工智能技术的战略性突破,新一代人工智能已经成为新一轮科技革命的核心技术。

新一代人工智能技术与先进制造技术的深度融合,形成了新一代智能制造技术,成为新一轮工业革命的核心驱动力。新一代智能制造的突破和广泛应用将重塑制造业的技术体系、生产模式、产业形态,实现第四次工业革命。

新一轮科技革命和产业变革与我国加快转变经济发展方式形成历史性交汇,智能制造是一个关键的交汇点。中国制造业要抓住这个历史机遇,创新引领高质量发展,实现向世界产业链中高端的跨越发展。

智能制造是一个“大系统”,贯穿于产品、制造、服务全生命周期的各个环节,由智能产品、智能生产及智能服务三大功能系统以及工业物联网和智能制造云两大支撑系统集成而成。其中,智能产品是主体,智能生产是主线,以智能服务为中心的产业模式变革是主题,工业物联网和智能制造云是支撑,系统集成将智能制造各功能系统和支撑系统集成成为新一代智能制造系统。

智能制造是一个“大概念”,是信息技术与制造技术的深度融合。从20世纪中叶到90年代中期,以计算、感知、通信和控制为主要特征的信息化催生了数字化制造;从90年代中期开始,以互联网为主要特征的信息化催生了“互联网+制造”;当前,以新一代人工智能为主要特征的信息化开创了新一代智能制造的新阶段。

这就形成了智能制造的三种基本范式,即:数字化制造(digital manufacturing)——第一代智能制造;数字化网络化制造(smart manufacturing)——“互联网+制造”或第二代智能制造,本质上是“互联网+数字化制造”;数字化网络化智能化制造(intelligent manufacturing)——新一代智能制造,本质上是“智能+互联网+数字化制造”。这三个基本范式次第展开又相互交织,体现了智能制造的“大概念”特征。

对中国而言,不必走西方发达国家顺序发展的老路,应发挥后发优势,采取三个基本范式“并行推进,融合发展”的技术路线。一方面,我们必须实事求是,因企制宜,循序渐进地推进企业的技术改造,智能升级,我国制造企业特别是广大中小企业还远远没有实现“数字化制造”,必须扎扎实实完成数字化“补课”,打好基础;另一方面,我们必须坚持“创新引领”,可直接利用互联网、大数据、人工智能等先进技术,“以高打低”,走出一条并行推进智能制造的新路。企业是推进智能制造的主体,每个企业要根据自身实际,总体规划,分步实施,重点突破,全面推进,产学研协同创新,实现企业的技术改造、智能升级。

未来20年,我国智能制造的发展总体将分成两个阶段。第一阶段:到2025年,“互联网+制造”——数字化网络化制造在全国得到大规模推广应用;同时,新一代智能制造试点示范取得显著成果。第二阶段:到2035年,新一代智能制造在全国制造业实现大规模推广应用,实现中国制造业的智能升级。

推进智能制造,最根本的要靠“人”,动员千军万马,组织精兵强将,必须以人为本。智能制造技术的教育和培训,已经成为推进智能制造的当务之急,也是实现智能制造的最重要的保证。

为推动我国智能制造人才培养,中国机械工程学会和清华大学出版社组织国内知名专家,经过三年的扎实工作,编著了“智能制造系列丛书”。这套丛书是编著者多年研究成果与工作经验的总结,具有很高的学术前瞻性与工程实践性。丛书主要面向从事智能制造的工程技术人员,亦可作为研究生或本科生的教材。

在智能制造急需人才的关键时刻,及时出版这样一套丛书具有重要意义,为推动我国智能制造发展做出了突出贡献。我们衷心感谢各位作者付出的心血和劳动,感谢编委会全体同志的不懈努力,感谢中国机械工程学会与清华大学出版社的精心策划和鼎力投入。

衷心希望这套丛书在工程实践中不断进步,更精更好,衷心希望广大读者喜欢这套丛书,支持这套丛书。

让我们大家共同努力,为实现建设制造强国的中国梦而奋斗。

周济

2019年3月

技术进展之快,市场竞争之烈,大国较劲之剧,在今天这个时代体现得淋漓尽致。

世界各国都在积极采取行动,美国的“先进制造伙伴计划”,德国的“工业 4.0 战略计划”,英国的“工业 2050 战略”,法国的“新工业法国计划”,日本的“超智能社会 5.0 战略”,韩国的“制造业创新 3.0 计划”,都将发展智能制造作为本国构建制造业竞争优势的关键举措。

中国自然不能成为这个时代的旁观者,我们无意较劲,只想通过合作竞争实现国家崛起。大国崛起离不开制造业的强大,所以中国希望建成制造强国、以制造而强国,实乃情理之中。制造强国战略之主攻方向和关键举措是智能制造,这一点已经成为中国政府、工业界和学术界的共识。

制造企业普遍面临着提高质量,增加效率,降低成本和敏捷适应广大用户不断增长的个性化消费需求,同时还需要应对进一步加大的资源、能源和环境等约束之挑战。然而,现有制造体系和制造水平已经难以满足高端化、个性化、智能化产品与服务的需求,制造业进一步发展所面临的瓶颈和困难迫切需要制造业的技术创新和智能升级。

作为先进信息技术与先进制造技术的深度融合,智能制造的理念和技术贯穿于产品设计、制造、服务等全生命周期的各个环节及相应系统,旨在不断提升企业的产品质量、效益、服务水平,减少资源消耗,推动制造业创新、绿色、协调、开放,共享发展。总之,面临新一轮工业革命,中国要以信息技术与制造业深度融合为主线,以智能制造为主攻方向,推进制造业的高质量发展。

尽管智能制造的大潮在中国滚滚而来,尽管政府、工业界和学术界都认识到智能制造的重要性,但是不得不承认,关注智能制造的大多数人(本人自然也在其中)对智能制造的认识还是片面的、肤浅的。政府勾画的蓝图虽气势磅礴、宏伟壮观,但仍有很多实施者感到无从下手;学者们高谈阔论的宏观理念或基本概念虽至关重要,但如何见诸实践,许多人依然不得要领;企业的实践者们侃侃而谈的多是当年制造业信息化时代的陈年酒酿,尽管依旧散发清香,却还是少了一点智能制造的

气息。有些人看到“百万工业企业上云,实施百万工业 APP 培育工程”时劲头十足,可真准备大干一场的时候,又仿佛云里雾里。常常听学者们言,CPS(cyber-physical systems,信息-物理系统)是工业 4.0 和智能制造的核心要素,CPS 万不能离开数字孪生体(digital twin)。可数字孪生体到底如何构建?学者也好,工程师也好,少有人能够清晰道来。又如,大数据之重要性日渐为人们所知,可有了数据后,又如何分析?如何从中提炼知识?企业人士鲜有知其个中究竟的。至于关键词“智能”,什么样的制造真正是“智能”制造?未来制造将“智能”到何种程度?解读纷纷,莫衷一是。我的一位老师,也是真正的智者,他说:“智能制造有几分能说清楚?还有几分是雾里又糊涂。”

所以,今天中国散见的学者高论和专家见解还远不能满足智能制造相关的研究者和实践者们之所需。人们既需要微观的深刻认识,也需要宏观的系统把握;既需要实实在在的智能传感器、控制器,也需要看起来虚无缥缈的“云”;既需要对理念和本质的体悟,也需要对可操作性的明晰;既需要互联的便捷,也需要互联的标准;既需要数据的通达,也需要数据的安全;既需要对未来的前瞻和追求,也需要对当下的实事求是……如此等等。满足多方位的需求,从多视角看智能制造,正是这套丛书的初衷。

为助力中国制造业高质量发展,推动我国走向新一代智能制造,中国机械工程学会和清华大学出版社组织国内知名的院士和专家编写了“智能制造系列丛书”。本丛书以智能制造为主线,考虑智能制造“新四基”[即“一硬”(自动控制和感知硬件)、“一软”(工业核心软件)、“一网”(工业互联网)、“一台”(工业云和智能服务平台)]的要求,由 30 个分册组成。除《智能制造:技术前沿与探索应用》《智能制造标准化》《智能制造实践》8 个分册外,其余包含了以下五大板块:智能制造模式、智能制造设计、智能传感与装备、智能制造使能技术以及智能制造管理技术。

本丛书编著者包括高校、工业界拔尖的带头人和奋战在一线的科研人员,有着丰富的智能制造相关技术的科研和实践经验。虽然每一位作者未必对智能制造有全面认识,但这个作者群体的知识对于试图全面认识智能制造或深刻理解某方面技术的人而言,无疑能有莫大的帮助。本丛书面向从事智能制造工作的工程师、科研人员、教师和研究者,兼顾学术前瞻性和对企业的指导意义,既有对理论和方法的描述,也有实际应用案例。编著者经过反复研讨、修订和论证,终于完成了本丛书的编写工作。必须指出,本丛书肯定不是完美的,或许完美本身就不存在,更何况智能制造大潮中学界和业界的急迫需求也不能等待对完美的寻求。当然,这也不能成为掩盖丛书存在缺陷的理由。我们深知,疏漏和错误在所难免,在这里也希望同行专家和读者对本丛书批评指正,不吝赐教。

在“智能制造系列丛书”编写的基础上,我们还开发了智能制造资源库及知识服务平台,该平台以用户需求为中心,以专业知识内容和互联网信息搜索查询为基础,为用户提供有用的信息和知识,打造智能制造领域“共创、共享、共赢”的学术生

态圈和教育教学系统。

我非常荣幸为本丛书写序,更乐意向全国广大读者推荐这套丛书。相信这套丛书的出版能够促进中国制造业高质量发展,对中国的制造强国战略能有特别的意义。丛书编写过程中,我有幸认识了很多朋友,向他们学到很多东西,在此向他们表示衷心感谢。

需要特别指出,智能制造技术是不断发展的。因此,“智能制造系列丛书”今后还需要不断更新。衷心希望,此丛书的作者们及其他的智能制造研究者和实践者们贡献他们的才智,不断丰富这套丛书的内容,使其始终贴近智能制造实践的需求,始终跟随智能制造的发展趋势。

2019年3月

清华大学出版社

智能制造是加快建设制造强国的主攻方向,模拟仿真是制造业数字化、智能化不可或缺的关键核心技术。材料成形过程模拟在深入认识成形过程数理模型的基础上,与数值计算、人工智能、大数据分析、虚拟现实等技术深度结合,实现成形过程各物理参量、成形产品精度与性能的高精度高效率预测、展示、分析与优化。近年来,材料成形过程模拟向全流程、多物理场、跨尺度、形性预测等方向快速发展,涉及材料、机械、力学、信息、计算机等相关学科,大力促进了基于集成计算工程的设计制造新模式的形成与发展。华中科技大学长期从事材料成形模拟技术研究,研发出冲压、锻造、铸造、焊接、塑料注射等成形工艺的系列模拟软件。本书作为“智能制造系列丛书”的组成部分,致力于总结作者与同事们多年来的研究成果,探讨主要材料成形工艺的模拟技术进展,为相关领域的科技工作者和研究生提供系统性、基础性和前瞻性的知识。

全书包含7章。第1章阐述材料成形模拟的基本方法,第2~6章分别解析板料成形、锻造、铸造、焊接、塑料注射成形等主要成形工艺的模拟方法,第7章简要介绍当前的主流成形模拟软件。本书的具体编写工作分工如下:第1章由周华民、柳玉起、周建新、庞盛永编写,第2章由柳玉起、章志兵编写,第3章由金俊松、王新斌编写,第4章由周建新、殷亚军、计效同编写,第5章由庞盛永编写,第6章由张云、周华民、王云明编写,第7章由黄志高、章志兵、金俊松、殷亚军、梁吕捷编写。全书由周华民策划并定稿,王云明协助整理与校稿。

李德群院士对本书的编写提出了非常重要的意见和建议,在此深表感谢。在编写的过程中,许多教授提供了宝贵的研究和教学成果,在此对李远才、李巧敏、邓磊、周何乐子、黄安国等老师表示感谢。余文劫、周晓伟、刘启涛、王靖升、母中彦等博士研究生为本书的出版也做出了贡献。清华大学出版社对本书的出版给予了极大支持,冯昕等多位编辑以他们的敬业精神和严谨学风促成了本书的及时出版,保证了本书质量,在此深表感谢。

材料成形过程模拟是一门综合性科学技术,涉及的范围很广,限于作者的研究水平和教学经验,书中的错误和缺点在所难免,恳请广大专家和读者批评指正。

周华民

2022 年 3 月

于华中科技大学材料科学与工程学院

材料成形与模具技术国家重点实验室

第 1 章 成形模拟的基本方法	001
1.1 有限单元法	001
1.1.1 基础理论	001
1.1.2 单元和插值函数的构造	010
1.2 有限差分法	023
1.2.1 基本原理	023
1.2.2 逼近误差	025
1.2.3 差分方程、截断误差和相容性	026
1.2.4 收敛性与稳定性	030
1.2.5 拉克斯等价定理	036
1.3 边界元法	037
1.3.1 数学基础	037
1.3.2 位势问题	043
1.3.3 线弹性静力学问题	046
1.3.4 时间相关问题	052
1.4 有限体积法	059
1.4.1 基本原理	059
1.4.2 扩散问题	061
1.4.3 对流扩散问题	065
1.4.4 瞬态问题	069
参考文献	071
第 2 章 板料成形模拟方法	072
2.1 引言	072
2.2 板壳单元	072

2.2.1	薄膜单元	072
2.2.2	薄壳单元	073
2.2.3	中厚壳单元	077
2.2.4	等效弯曲单元	083
2.3	本构方程	087
2.3.1	J_2 流动理论	089
2.3.2	J_2 随动强化理论	090
2.3.3	各向异性理论	091
2.4	各向异性屈服函数	092
2.4.1	Hill 正交各向异性函数	093
2.4.2	Barlat-Lian 屈服函数	094
2.4.3	Barlat 六参量正交各向异性屈服函数	096
2.5	工艺条件约束处理	097
2.5.1	罚函数法	098
2.5.2	防御节点法	099
2.5.3	摩擦力的计算	103
2.5.4	板料冲压成形界面滑动约束处理	106
2.6	接触搜索判断	107
2.6.1	工具形状的定义	107
2.6.2	接触判断	108
2.7	板料成形有限元方法	110
2.7.1	非线性方程组迭代解法	110
2.7.2	板料成形全量拉格朗日有限元方法	114
2.7.3	板料成形修正拉格朗日有限元方法	118
2.7.4	板料成形虚功率增量型有限元方法	122
2.7.5	板料成形数值模拟算例	125
2.8	板料成形显式有限元方法	126
2.8.1	动力分析的虚功(率)方程	126
2.8.2	动力显式积分算法有限元方程	126
2.8.3	显式时间积分的中心差分算法	128
2.8.4	临界时间步长的确定	129
2.9	板料成形有限元逆算法	130
2.9.1	有限元逆算法基本理论	131
2.9.2	初始场猜测	133
2.9.3	逆算法算例	134
	参考文献	136

第3章 锻造成形模拟方法 137

3.1	刚塑性有限元法	137
-----	---------	-----

3.1.1	概述	137
3.1.2	刚塑性变分原理	142
3.1.3	刚塑性有限元列式	146
3.1.4	刚黏塑性有限元法	148
3.1.5	计算实例	150
3.2	弹塑性有限元法	153
3.2.1	小变形弹塑性有限元法	153
3.2.2	有限应变弹塑性有限元分析	158
3.2.3	有限元方程	160
3.2.4	计算实例	164
3.3	无网格法	166
3.3.1	概述	166
3.3.2	无网格法基本原理	166
3.3.3	有限元与无网格耦合方法	172
3.3.4	计算实例	173
3.4	塑性变形微纳尺度模拟	175
3.4.1	概述	175
3.4.2	分子动力学基本理论与关键技术	176
3.4.3	单晶铜纳米压痕过程中棱柱位错环的形成机制	178
3.4.4	纳米孪晶铜塑性变形过程中棱柱位错环与共格孪晶界面的反应机制	188
参考文献		193
第 4 章	铸造成形模拟方法	197
4.1	温度场模拟	197
4.1.1	传热的基本方式概述	197
4.1.2	数学模型	198
4.1.3	基于有限差分的离散	200
4.1.4	初始条件与边界条件	202
4.1.5	潜热的处理	205
4.1.6	计算实例	211
4.2	充型过程模拟	215
4.2.1	概述	215
4.2.2	数学模型	215
4.2.3	离散方法	218
4.2.4	SOLA-VOF 方法	221
4.2.5	计算稳定性处理	226
4.2.6	流动与传热的耦合	226
4.2.7	计算实例	229

4.3	应力场模拟	232
4.3.1	概述	232
4.3.2	数学模型	232
4.3.3	离散方法	240
4.3.4	计算实例	241
4.4	冒口自动工艺优化	244
4.4.1	冒口自动工艺优化算法	245
4.4.2	冒口自动工艺优化方法实例	247
	参考文献	253
第5章	焊接成形模拟方法	254
5.1	概述	254
5.2	焊接熔池行为仿真	254
5.2.1	焊接熔池行为数学模型	255
5.2.2	计算方法	258
5.2.3	计算实例	265
5.3	焊接金属蒸气行为仿真	272
5.3.1	焊接蒸气行为数学模型	272
5.3.2	计算方法	274
5.3.3	计算实例	277
5.4	焊接结构应力与变形仿真	281
5.4.1	焊接过程的温度-应力-变形问题有限元求解框架	281
5.4.2	焊接结构变形仿真	290
5.4.3	计算实例	291
5.5	小结	298
	参考文献	298
第6章	塑料注射成形模拟方法	301
6.1	充模保压过程模拟	303
6.1.1	材料模型与控制方程	305
6.1.2	模型简化方法	318
6.1.3	压力场的计算	324
6.1.4	流动前沿的确定	327
6.1.5	方程求解	331
6.1.6	计算实例	338
6.2	冷却过程模拟	341
6.2.1	稳态传热分析模型	344

6.2.2	稳态传热的边界元求解方法	348
6.2.3	瞬态传热分析	355
6.2.4	计算实例	358
6.3	残余应力与翘曲变形模拟	362
6.3.1	残余应力模拟	363
6.3.2	翘曲变形模拟	375
6.3.3	计算实例	383
6.4	微结构与形态演化过程模拟	392
6.4.1	材料类型	392
6.4.2	结晶过程模拟	399
6.4.3	共混聚合物的相形态演化演变模拟	408
6.4.4	取向演化模拟	427
6.4.5	数值实现	439
6.4.6	结构与性能的关系建模	444
6.4.7	多尺度建模与模拟	449
	参考文献	454
第 7 章	常用材料成形模拟软件简介	473
7.1	板料成形模拟软件	473
7.1.1	FASTAMP 软件	473
7.1.2	DYNAFORM 软件	475
7.1.3	AUTOFORM 软件	478
7.2	锻造成形模拟软件	482
7.2.1	概述	482
7.2.2	DEFORM 软件	482
7.2.3	MSC. Marc/AutoForge 软件	487
7.3	铸造成形模拟软件	489
7.3.1	华铸 CAE	489
7.3.2	ProCAST	497
7.3.3	MAGMA SOFT	497
7.4	焊接成形模拟软件	498
7.4.1	InteWeld	498
7.4.2	Simufact, welding	501
7.4.3	SYSWELD	502
7.5	注射成形模拟软件	503
7.5.1	HsCAE	503
7.5.2	Moldflow	511
7.5.3	Moldex 3D	517
	参考文献	520

清华大学出版社

成形模拟的基本方法

1.1 有限单元法

有限单元法(finite element method, FEM)的基本思想是将一个连续的求解系统离散为一组由节点相互连在一起的单元组合体,用每个单元内假设的近似函数来分片表示系统的求解场函数,其是单元离散插值拟合的数学方法。为了描述材料成形过程,一般会采用增量法,将成形过程分成若干比较小的增量步,即材料成形问题中在每个小的增量步内采用最小势能原理。

1.1.1 基础理论

1. 最小势能原理

如图 1-1-1 所示,所要分析的系统为一个受力弹性体。其中, A 为弹性体的表面积, V 为弹性体的体积, G 为弹性体的体力, P 为作用于弹性体表面的分布力。则弹性体的势能 Π_P 为

$$\Pi_P = W_i - W_e \quad (1-1-1)$$

式中, W_i 为弹性体变形后所具有的内能; W_e 为弹性体所受的外力功。它们的具体表达式分别为

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (1-1-2)$$

$$W_e = \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{P} dA + \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{G} dV \quad (1-1-3)$$

式中, $\boldsymbol{\epsilon}$ 为弹性体的应变; $\boldsymbol{\sigma}$ 为弹性体的应力; $\mathbf{u}$ 为弹性体的可容位移。

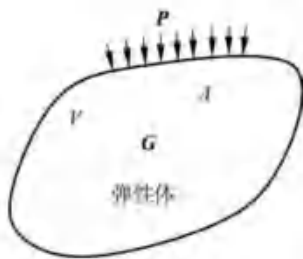


图 1-1-1 弹性体受力情况

弹性体处于平衡状态时,其势能应为最小,即

$$\delta \Pi_P = 0 \quad (1-1-4)$$

$$\delta \Pi_P = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} dA - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{G} dV = 0 \quad (1-1-5)$$

式(1-1-5)就是最小势能原理,它是位移法有限元法的数学基础。

2. 单元平衡方程

按照有限元法的基本思想,选择适当的单元模型对所要分析的系统进行网格划分,对于系统中的每个单元,式(1-1-5)同样成立。若在此基础上推导单元平衡方程,一般还要知道 3 个关系式,即单元模型的插值关系、单元运动与变形的几何关系及单元变形与受力的本构关系,这 3 个关系式是位移法推导单元平衡方程时必不可少的。

(1) 单元插值关系(单元内任意点的位移 u 与单元节点位移 u^e 之间的关系)为

$$u = Nu^e \quad (1-1-6)$$

式中, N 为单元形函数矩阵,后面将详细介绍各种常见单元的形函数矩阵和具体求法。

(2) 单元几何关系(单元内任意点的位移 u 与应变 ϵ 之间的关系)为

$$\epsilon = Lu \quad (1-1-7)$$

式中, L 为单元几何微分算子矩阵,后面将详细介绍常见运动关系的几何微分算子。

(3) 单元本构关系(单元内任意点的应变 ϵ 与应力 σ 之间的关系)为

$$\sigma = D^e \epsilon \quad (1-1-8)$$

式中, D^e 为单元弹性矩阵,后面将详细介绍常见弹性本构矩阵。

将式(1-1-6)~式(1-1-8)代入最小势能原理式(1-1-5)可得

$$\int_v \delta(u^e)^T B^T D^e B u^e dv - \int_a \delta(u^e)^T N^T P da - \int_v \delta(u^e)^T N^T G dv = 0 \quad (1-1-9)$$

式中, v 为单元体积; a 为单元表面积; B 称为 B 矩阵,即

$$B = LN \quad (1-1-10)$$

由单元节点位移 u^e 的任意性,得

$$\int_v B^T D^e B u^e dv - \int_a N^T P da - \int_v N^T G dv = 0 \quad (1-1-11)$$

式(1-1-11)就是单元平衡方程,或称为单元刚度方程,即

$$k u^e = f \quad (1-1-12)$$

式中, k 称为单元刚度矩阵,即

$$k = \int_v B^T D^e B dv \quad (1-1-13)$$

f 称为单元载荷向量,即

$$f = \int_a N^T P da + \int_v N^T G dv \quad (1-1-14)$$

单元刚度矩阵具有以下特性。

(1) 对称性。如果单元弹性矩阵 D^e 是对称的,则 k 也是对称的。

(2) 奇异性。单元处于平衡状态时,节点力相互不是独立的,单元平衡方程组的各方程间是线性相关的。

(3) 主元恒正且对角占优。 k 的对角线元素 k_{ii} 始终满足

$$k_{ii} > 0 \quad (1-1-15)$$

并且 k_{ii} 是所在行列中比较大的数。

3. 单元平衡方程组装过程

每个单元的平衡方程求得以后无法分别单独求解,主要原因是,对于单元平衡方程来说,单元间的节点内力也是边界条件,它们在单元应力确定前是未知的。因此,要把所有的单元平衡方程进行组装,消除单元间的节点内力。而组装后总体平衡方程的边界条件都是实际存在且已知的。

单元平衡方程组装成总体平衡方程是按有限元节点自由度对应关系进行的,将单元平衡方程左右端的元素累加到总体平衡方程的左右端。下面通过二维桁架结构说明组装过程。如图 1-1-2 所示平面桁架结构,经过有限元单元划分,1,2,3 为节点号,①,②,③为单元号。假设节点 1 对应的自由度为 1 和 2,节点 2 对应的自由度为 3 和 4,节点 3 对应的自由度为 5 和 6。按式(1-1-13)和式(1-1-15)可以求得单元①和②的单元平衡方程为



图 1-1-2 简单二维桁架结构的有限元单元划分

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{Bmatrix} \quad (1-1-16)$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{Bmatrix} \quad (1-1-17)$$

式中, k_{ij}^n 表示单元刚度矩阵中每个元素, i 和 j 表示它在单元刚度矩阵中的位置, n 表示单元号, 用于区分不同单元; u_i^m 表示单元的位移自由度, i 表示单元自由度位置, m 表示它在整个系统中的自由度位置。相应地, 在 k_{ij}^n 矩阵的左侧和上方也标出了它的行列在整个系统中的自由度位置。

组装过程就是按照所给自由度对应位置直接累加到系统的总体平衡方程

中,即

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} k_{11}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^1 + k_{21}^2 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & 0 & 0 \\ k_{51}^2 & k_{52}^2 & 0 & 0 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{61}^2 & k_{62}^2 & 0 & 0 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} f_1^1 + f_1^2 \\ f_2^1 + f_2^2 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1-1-18)$$

式(1-1-17)就是经过单元①和②组装后的总体平衡方程,所有单元平衡方程都进行类似的组装后就得到最终的总体平衡方程,或称总体刚度方程。即

$$KU = F \quad (1-1-19)$$

式中, K 称为总体刚度矩阵; U 称为位移向量; F 称为载荷向量。

单元刚度矩阵组装时,可以将几种类型的单元组装在一个总体刚度矩阵中,总体刚度矩阵 K 具有以下特性。

- (1) 对称性。如果单元刚度矩阵 k 是对称的,组装后 K 也是对称的。
- (2) 奇异性。在没有经过边界条件约束处理前, K 是奇异的。
- (3) 稀疏性。对于大规模求解问题来说, K 中的零元素非常多,一般大规模求解问题,大多会含有 99% 以上的零元素。
- (4) 非零元素带状分布。如果有限元节点号排列比较合理,则 K 的带宽就会比较小。

4. 总体刚度方程约束处理

组装后的总体平衡方程不能求解,总体平衡方程式(1-1-19)没有经过边界条件约束处理,它还是一个奇异的方程组,也就是说它有无穷多组解。固体力学问题的物理意义是,受力系统如果不受任何外部约束,将进行无限制的刚体运动。而对于实际问题来说,系统处于平衡状态的边界条件将确定方程组式(1-1-19)的唯一解。因此,有限元分析过程中,边界条件的约束处理是必不可少的过程。

材料成形有限元法相对于一般结构问题有限元法的最大区别在约束处理方面,包括模具约束、工艺参数约束等。材料成形过程中,材料会与模具接触、滑动、脱开,其中接触和滑动过程中,材料在模具表面是切向运动,材料接触点满足平面方程约束。

1) 边界条件分类

线弹性问题的边界条件都是已知的,主要分力和位移两类边界条件。

力边界条件常见的主要包括集中载荷力、作用于系统表面的分布力、系统重量引起的自重力、热交换和热流引起的温度载荷等。这些载荷项的分配可以通过式(1-1-15)求得,将载荷分配到相应的有限元节点上。

位移边界条件会制约系统的刚体位移,消除 $\mathbf{K}$ 的奇异性。常见约束类型主要如下。

(1) 固定位移。例如, $U_2=0.0$ 、 $U_5=0.0$ 、 $U_6=0.0$ 等约束位移大小等于零的边界条件。

(2) 强制位移。例如, $U_1=1.0$ 、 $U_2=0.5$ 、 $U_4=1.5$ 等约束位移大小是常数且不等于零的边界条件,当单向拉伸时,夹具夹死试件两端拉伸。

(3) 关联位移。例如, $U_6=kU_7+C$, 式中 k 和 C 是一个确定的常数,材料在模具面运动时属于这种平面方程约束。

如果 $k=0$, 则关联位移约束条件就退化成强制位移约束条件。如果 $k=0$ 、 $C=0$, 则关联位移约束条件就退化成固定位移约束条件。因此,下面主要给出关联位移边界条件的约束处理方法。

2) 边界条件约束处理方法

为了公式推导方便,可以以 6 阶方程组为例说明约束处理过程,然后总结约束处理方法。假设要约束处理的原始有限元平衡方程为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (1-1-20)$$

式中,方程组系数矩阵是对称的。

假设关联约束方程为

$$U_4 = kU_3 + C \quad (1-1-21)$$

常见的约束处理方法有两种:赋 0 赋 1 法和乘大数法。下面将分别说明它们的具体实施方法。

1) 赋 0 赋 1 法

将关联约束方程式(1-1-21)代入有限元平衡方程式(1-1-20)中,并将常数项移到方程组等式的右端,则式(1-1-20)变换为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} + kK_{14} & 0 & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} + kK_{24} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} + kK_{34} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} + kK_{44} & 0 & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} + kK_{54} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} + kK_{64} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - CK_{41} \\ F_2 - CK_{42} \\ F_3 - CK_{43} \\ F_4 - CK_{44} \\ F_5 - CK_{45} \\ F_6 - CK_{46} \end{bmatrix} \quad (1-1-22)$$

式(1-1-22)就是约束后的有限元平衡方程,它有 6 个方程、5 个未知数(其中

U_4 已经被消去), 如果约束方程式(1-1-21)可以消除有限元平衡方程式(1-1-20)的奇异性, 则取式(1-1-22)中任意 5 个方程联立求解, 都会得到方程组的唯一一组解。

但是式(1-1-22)的系数矩阵由原来对称的变成了非对称的, 这对于大规模有限元方程组求解是十分不利的, 因为采用相同的求解方法, 在求解时间和矩阵存储容量方面都增加了 1 倍。

比较式(1-1-20)和式(1-1-22)可以发现, 式(1-1-22)的系数矩阵是在式(1-1-20)的基础上做了一次列初等变换, 因此, 为了保持有限元平衡方程组系数矩阵的对称性, 对式(1-1-22)再做一次相同的行初等变换, 即式(1-1-22)的第 4 行乘以系数 k 加到第 3 行, 并去掉第 4 行, 为了保持系数矩阵的阶数, 将第 4 行的所有元素赋 0, 在其对角线元素位置赋 1, 即赋 0 赋 1 法, 可得

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} + kK_{14} & 0 & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} + kK_{24} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} + kK_{41} & K_{32} + kK_{42} & K_{33} + kK_{43} + k(K_{43} + kK_{44}) & 0 & K_{35} + kK_{45} & K_{36} + kK_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} + kK_{54} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} + kK_{64} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - CK_{11} \\ F_1 - CK_{21} \\ F_1 - CK_{31} + k(F_1 - CK_{41}) \\ 0 \\ F_1 - CK_{51} \\ F_1 - CK_{61} \end{Bmatrix} \quad (1-1-23)$$

可以发现, 经过初等变换, 方程组式(1-1-23)的系数矩阵仍然保持对称, 而且所做的初等变换也不会改变方程组的解, 也就是说式(1-1-23)与式(1-1-22)的解是相同的。通过方程组式(1-1-23)可以求得除 U_4 以外的 5 个未知数, 再通过关联约束方程式(1-1-21)回代求解 U_4 。

实际上, 式(1-1-23)的第 4 行不参与方程组求解, 因此可以对式(1-1-23)进一步改进, 将关联约束方程式(1-1-21)直接引进方程组式(1-1-23)中, 使自由度 U_4 也直接参与方程组求解。具体做法如下: 用关联约束方程式(1-1-21)取代方程组式(1-1-23)的赋 0 赋 1 行(第 4 行), 再做对称化处理, 也就是将取代后的第 4 行方程乘以 $-k$ 加到第 3 行, 经过这样处理后, 方程组式(1-1-23)的系数矩阵仍然保持对称, 即

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} + kK_{14} & 0 & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} + kK_{24} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} + kK_{41} & K_{32} + kK_{42} & K_{33} + kK_{43} + k(K_{43} + kK_{44}) + k^2 & -k & K_{35} + kK_{45} & K_{36} + kK_{46} \\ 0 & 0 & -k & 1 & 0 & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} + kK_{54} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} + kK_{64} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - CK_{11} \\ F_1 - CK_{21} \\ F_1 - CK_{31} + k(F_1 - CK_{41}) \\ 0 \\ F_1 - CK_{51} \\ F_1 - CK_{61} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1 - CK_{14} \\ F_2 - CK_{24} \\ F_3 - CK_{34} + k(F_4 - CK_{44}) - kC \\ C \\ F_5 - CK_{54} \\ F_6 - CK_{64} \end{Bmatrix} \quad (1-1-24)$$

这样通过求解方程组式(1-1-24)就可以一次解出所有未知数。上面所述就是关联位移边界条件的约束处理过程,其基本原理就是利用初等变换对求解方程组进行相同的行列变换,既可以保证方程组解不会改变,又可以保持方程组系数矩阵的对称性。在进行初等变换时,只要保证对方程组系数矩阵做相同的行列变换,就可以保持方程组系数矩阵的对称性。

固定位移和强制位移边界条件约束处理可以通过式(1-1-24)进行简化。关联约束方程式(1-1-21)中如果 $k=0$,则退化成强制位移边界条件,即

$$U_4 = C \quad (1-1-25)$$

则约束后的方程组式(1-1-24)就简化为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - CK_{14} \\ F_2 - CK_{24} \\ F_3 - CK_{34} \\ C \\ F_5 - CK_{54} \\ F_6 - CK_{64} \end{Bmatrix} \quad (1-1-26)$$

如果关联约束方程式(1-1-21)中, $k=0, C=0$,则退化成固定位移边界条件,即

$$U_4 = 0 \quad (1-1-27)$$

则约束后的方程组式(1-1-26)就进一步简化为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (1-1-28)$$

从式(1-1-26)和式(1-1-28)可以看出,固定位移和强制位移边界条件的赋0赋1约束处理相对比较简单,而且它们的系数矩阵约束后是相同的,只是简单地将方程组系数矩阵中要约束自由度的行列分别赋0,对角线元素赋1(这也是赋0赋1法的由来)。在方程组载荷右端项的处理方法上两者是不同的,处理固定位移边界条件时,只要将对应自由度的载荷赋0即可。处理强制位移边界条件时,要在方程

组系数矩阵未赋 0 赋 1 前,首先将对应自由度的列乘以系数 C 减到载荷右端项,然后将对应自由度的载荷位置赋 C 。

2) 乘大数法

乘大数法约束位移边界条件还是利用矩阵的初等变换不改变方程组解的思想。

下面仍以有限元平衡方程式(1-1-20)和关联位移约束方程式(1-1-21)为例说明乘大数法约束处理方法的具体实施过程。

将关联约束方程式(1-1-21)乘以一个大数 A 。其中,大数 A 一般是式(1-1-20)系数矩阵中对角线元素 K_{44} 的 10^{10} 倍量级左右。乘大数 A 后,式(1-1-21)整理成如下形式:

$$-AkU_3 + AU_4 = AC \quad (1-1-29)$$

将式(1-1-29)加到有限元平衡方程式(1-1-20)约束处理对应自由度行,即第 3 行或第 4 行,这里加到第 4 行,得

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} - Ak & K_{44} + A & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 + AC \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (1-1-30)$$

如果约束方程式(1-1-21)可以消除有限元平衡方程式(1-1-20)的奇异性,方程组式(1-1-30)的解就是方程组式(1-1-20)的唯一一组解。但是经过约束处理后,方程组式(1-1-30)的系数矩阵是非对称的,下面将利用初等变换方法将其变换成对称的。从式(1-1-30)可以发现,系数矩阵中只有(3,4)和(4,3)两个元素是不对称的,因此,将已乘完大数的关联约束方程式(1-1-29)再乘以系数 $-k$,得

$$Ak^2U_3 - AkU_4 = -AkC \quad (1-1-31)$$

将经过处理的关联约束方程加到方程组式(1-1-30)的第 3 行,得

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} + Ak^2 & K_{34} - Ak & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} - Ak & K_{44} + A & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - AkC \\ F_4 + AC \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (1-1-32)$$

经过这些初等变换以后,约束后的有限元平衡方程式(1-1-32)仍然保持对称。

以上就是乘大数法约束处理关联位移约束边界条件的方法和过程。

固定位移和强制位移边界条件约束处理可以通过式(1-1-32)进行简化。关联约束方程式(1-1-21)中,如果 $k=0$,则退化成强制位移边界条件,约束后的方程组式(1-1-32)就简化为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} + A & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 + AC \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (1-1-33)$$

关联约束方程式(1-1-21)中,如果 $k=0, C=0$,则退化成固定位移边界条件,约束后的方程组式(1-1-33)就进一步简化为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} + A & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (1-1-34)$$

从式(1-1-33)和式(1-1-34)可以看出,固定位移和强制位移边界条件的乘大数约束处理相对比较简单,而且它们的系数矩阵约束后是相同的,只是简单地将方程组系数矩阵中要约束自由度的对角线元素加上一个相对大数 A 即可。从这点上说,乘大数法的名称并不十分准确,应该称为加大数法更贴切。当然对于固定位移和强制位移边界条件约束处理来说,乘大数和加大数对方程组式(1-1-33)和式(1-1-34)的影响非常小,但是对关联位移边界条件约束处理来说,只乘大数就无法实施整个约束处理过程了。

(3) 赋0赋1法和乘大数法的比较

这两种方法都可以消除有限元平衡方程的奇异性,得到符合实际边界条件的唯一一组解,但两种方法还是有很大的区别:

(1) 赋0赋1法在约束处理过程中是严格精确的,而乘大数法是一种近似约束处理方法,它的精度取决于所乘大数 A 值。

(2) 采用乘大数法约束处理后的有限元平衡方程在求解时可能造成解的失真,大数 A 值越大可能解的偏差会越大,而赋0赋1法就不会出现类似的问题,它在约束过程和求解过程中都是精确的。

(3) 乘大数法相对于赋0赋1法在约束处理过程上简单一些。

(4) 赋0赋1法实际上是将关联位移约束方程代入有限元平衡方程中的,是代入

法。而乘大数法是将占绝对优势的关联位移约束方程合并到有限元平衡方程中,是罚方法,计算误差来自于合并过程,计算精度取决于关联位移约束方程的优势大小。

在现有商业软件中,位移边界条件的约束处理大多采用赋 0 赋 1 法,很少被采用乘大数法,因为乘大数法是一种近似方法,而且大数的大小不易确定,有时还会造成求解失败。

1.1.2 单元和插值函数的构造

1. 常用单元模型

1) 一维单元

常用一维单元主要包括 2 节点线单元、3 节点线单元、梁单元,如表 1-1-1 所示。

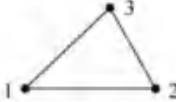
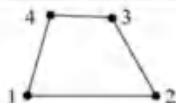
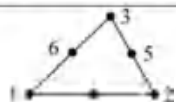
表 1-1-1 常用一维单元

阶次	单元名称	图 示
一次	2 节点线单元	
	梁单元	
二次	3 节点线单元	

2) 二维单元

常用二维单元主要包括 3 节点三角形线性单元、6 节点三角形二次单元、10 节点三角形三次单元、4 节点四边形双线性单元、8 节点四边形二次单元、12 节点四边形三次单元,如表 1-1-2 所示。

表 1-1-2 常用二维单元

阶次	单元名称	图 示
一次	3 节点三角形单元	
	4 节点四边形单元	
二次	6 节点三角形单元	
	8 节点四边形单元	