第 1 章

绪　　论

1.1 概　　述

1.1.1 运筹学的产生

运筹学(operations research)作为一门科学产生于20世纪30年代末。当时以英、美为首的盟军为了对付德军,召集了包括数学家在内的科学家在广泛领域里研究作战或防御方法与策略问题。

补充材料:雷达的发明及早期应用

虽然第一部雷达①的发明人无从认定,但是一般会认为最早投入实用的军用雷达是由英国研制的。时任英国国家物理实验室无线电研究室主任的科学家罗伯特·沃特森·瓦特起了关键性的作用。

20世纪30年代初,罗伯特·沃特森·瓦特曾领导利用无线电波探测电离层的研究,他使用阴极射线管接收和显示无线电回波,并计测电波从发射到反射回来的时间,从而确定电离层的高度。

1935年1月,当他受英军委托研究利用电波探测空中飞机的装置时,充分利用已取得的研究成果,迅速研制出对空警戒雷达的试验装置。2月26日,罗伯特·沃特森·瓦特为军事部门领导人进行雷达表演,雷达探测到了16千米外的飞机。后来经过改进,到1936年1月,雷达探测距离已达120千米。鉴于雷达所具有的受天候的影响小、观测距离较远等优点,为了对付夜间上浮的德国潜艇,英国人决定将雷达搬上飞机。

1937年7月,世界上第一部机载雷达由英国科学家爱德华·鲍恩领导的研究小组研制成功。鲍恩等人从1935年开始研制机载雷达。在1937年年中研制出一部小型雷达,并把它安装在一架双发动机的安桑式飞机上——这架安桑式飞机便成为最早载有雷达的飞机。7月至9月,对机载雷达进行了多次试验,证明它可探测到16千米以外的水面舰艇。

1939年9月,第二次世界大战爆发。英国政府在罗伯特·沃特森·瓦特的建议下,拨出巨款在沿海一带迅速建造了许多雷达站,构成雷达网。当德国飞机从80千米外的海

① 雷达是一种利用电磁波探测目标的电子装备,它发射电磁波照射目标并接收其回波,由此来发现目标并测定其位置、运动方向和速度及其他特性。

面向英国本土飞来时，英国雷达站就把这些敌机的架数、航向、速度和抵达英国的时间十分准确地测出来了。这样，德国飞机一进入英国领空，就被英国空军战斗机击落了。

罗伯特·沃特森·瓦特发明的雷达，在第二次世界大战中，使英国避免了生命财产的巨大损失。今天，种类繁多的雷达已广泛应用于航空、航海、气象观测、宇航等方面，为人类社会的发展作出了积极的贡献。

第二次世界大战之前，英国人已经发明了雷达，技术上的问题已经基本解决，但是雷达应用的有效性问题却没有很好解决。德国飞机在利用夜间尤其是进行超低空偷袭时，英国军方并不能及时准确地发现敌机以迅速做好战斗准备。为此，一些数学家开始进行雷达有效布置问题的研究，并取得了显著效果。

除了空袭英国主要城市以外，德国也对英国进行了海上封锁。由于战争的需要，每天大约有几千万吨的军用物资要经由大西洋运到英国，而德军的潜艇和飞机是攻击这些几乎无护航的商船的天敌，大量军用物资无法安全运到。即使在有舰队护航的情况下，面对德军潜艇的“狼群战术”，盟军仍然是一筹莫展。为了更有效地达到反潜目的，军方请一些科学家研究反潜深水炸弹的爆炸深度问题，使德国潜艇的损失增加了 3 倍。而为了对付德军的飞机轰炸，盟军在增加护航的同时，也增加了商船的防空和作战能力，并进行了如何躲避轰炸的研究，提出了“大船急转向、小船缓转向”的有效方法，使得军用物资的损失率大为降低。

第二次世界大战结束以后，在英美军队中正式成立了运筹学组织，专门进行战争战略和策略的研究，其研究成果也开始逐渐运用到经济领域。随着运筹学理论与方法在经济中的应用，非军方的研究组织和机构也相继成立并展开很多专门经济问题的研究，运筹学的研究对象更多地转向了经济领域，形成了许多分支学科。在目前运筹学体系中，主要包括规划论（线性规划、非线性规划、整数规划、参数规划、目标规划、动态规划、随机规划等）、图论与网络计划理论、排队论（随机服务系统理论）、搜索论、库存论、设备维修与更新理论、可靠性理论、质量管理理论、决策论、对策论等，并且研究领域仍然在不断地扩展，一些特定问题的求解方法也在不断地提出和改进，见图 1-1。

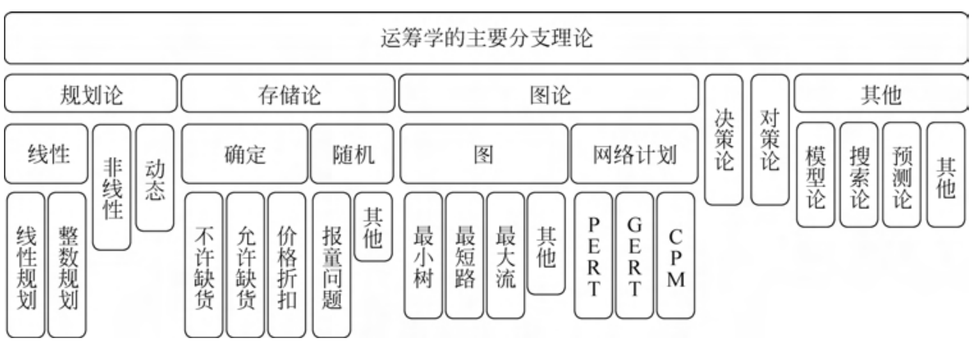


图 1-1 运筹学的分支理论体系

运筹学引入我国是 20 世纪 50 年代中期，开始译为运用学，1957 年正式定名为运筹学。以钱学森、徐国志、华罗庚等为首的一批科学家，进行了大量的引进、推广和研究工

作。清华大学、哈尔滨工业大学、吉林工业大学等高等院校也都开设了运筹学课程，国内一批经济管理学、物理学和数学方面的科学家和学者也陆续开始从事运筹学的研究，并取得了丰硕的研究成果。中国运筹学学会[①]和地方的运筹学学会也于 20 世纪 60 年代以后陆续成立，形成了一大批从事运筹学研究和推广工作的人员。目前运筹学在我国的经济管理和工程类的专业中已经成为普遍开设的课程。

1.1.2　运筹学的定义和基本原则

运筹学是一门应用科学，也有人称之为应用数学。有许多学者对其进行了定义，也使得到目前为止并没有一个被统一使用和认可的定义。

定义 1：为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。

定义 2：是一门应用科学，它广泛用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题。

定义 3：运筹学是一门给出问题不坏的答案的艺术，否则的话问题的结果会更坏。

为了有效地应用运筹学，英国运筹学会前会长托姆林森提出了六项基本原则：

(1) 合伙原则。是指运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作。

(2) 催化原则。在多学科共同解决问题时，要引导人们改变一些原有的常规看法。

(3) 互相渗透原则。彼此渗透地考虑问题，而不要局限于本部门。

(4) 独立原则。不受他人或部门特殊政策的影响。

(5) 宽容原则。解决问题的思路要宽，方法要多，不能局限于某些特定方法。

(6) 平衡原则。考虑各种矛盾的平衡，关系的平衡。

1.1.3　运筹学的工作步骤

运筹学在解决实际问题的过程中，形成了特有的工作步骤。

(1) 提出和形成问题。即要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料。

(2) 建立模型。即将问题中的可控变量，参数、目标和约束间的关系用一定的模型加以表示。

(3) 求解。用各种手段求模型的解，包括最优解、次优解、满意解等。

(4) 解的检验。检查解的求解过程和结果有无错误，能否反映现实问题。

(5) 解的控制。通过对解的控制来实现对问题目标的调整和控制。

(6) 解的实施。

---

①　中国运筹学会是中国运筹学工作者的学术性群众团体，是依法成立的社团法人，是中国科学技术协会的组成部分。中国运筹学会共有专业委员会 16 个、地方分会 9 个，团体会员 30 个，个人会员 1800 多人，集中了全国运筹学最优秀的科研人员。中国运筹学会还主办《运筹学学报》、《运筹与管理》、《中国运筹学会会刊》(*Journal of the Operations Research of China*)三份杂志。资料来源：http://www.orsc.org.cn

1.2 运筹学模型的建立

1.2.1 运筹学模型的主要类型

运筹学在解决实际问题时，总是要对问题的变量、约束、目标等进行一定的数学和物理意义上的描述，这种描述就是模型。模型主要有以下三种。

(1) 形象模型。形象模型包括实体模型和比例模型。实体模型就是将研究对象本身作为研究模型；比例模型即是将研究对象按照一定的比例加以放大或缩小建立的模型。

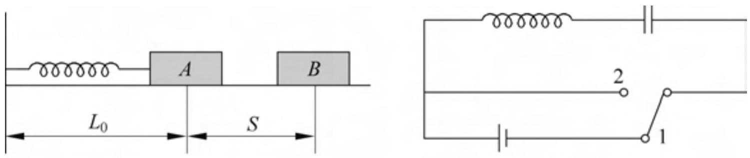
(2) 模拟模型。模拟模型即是根据相似性原理，通过对某一对象状态和运行机理的研究来达到对本研究对象进行研究的目的。

图 1-2(a)所示为一弹性系数为 K 的弹簧振子，其自然长度为 L_0，重物重量为 W，在外力作用下由平衡位置 A 移至 B，位移为 S，则其运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}+\frac{K}{W}S=0 \tag{1-1}$$

图 1-2(b)所示为 $L-C$ 串联振荡电路，L 为电感的自感系数，C 为电容。当电路开关在 1 处时，电源对电容充电；当电路开关在 2 处时，电容对电感线圈放电，由此产生简谐振荡。假设电容量为 q，在不考虑电阻的情况下，振荡方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}q=0 \tag{1-2}$$



(a) 弹簧振子　　(b) L-C串联振荡电路

图 1-2 运筹学模型

从式(1-1)和式(1-2)可见，弹簧振子和振荡电路具有类似的运动机理，则可以相互进行模拟。

(3) 数学模型。数学模型是用数学符号和数学方法描述变量之间相互作用和因果关系的模型，它是运筹学中最为常见的模型形式。

根据变量的性质不同模型也可以分为离散模型、连续模型；根据数学模型方程特点可以分为代数方程模型、微分方程模型、概率统计模型、逻辑模型等。如果用求解的方法来命名时，有直接最优化模型、数字模拟模型、启发式模型；其他的模型类型不再作更多介绍。

1.2.2 运筹学模型的主要构建方法

运筹学中的建模方法根据对研究对象的认识程度不同也有所不同。对于结构及运动机理十分清楚的研究对象(白箱，white box)、结构及运动机理十分不清楚的研究对象(黑

箱，black box)，以及介于两者之间的灰箱(grey box)，运筹学建模方法有所不同。

(1) 直接分析法。这种方法适用于白箱。运筹学中的线性规划模型、存储模型等，研究问题不存在任何不确定的因素，可以通过对问题的直接分析建立模型。

(2) 类比法。运用不同研究对象关系或运行机理类似性的特点，加以互相类比建立模拟模型，一般适用于白箱系统。

(3) 数据分析法。对于结构的运行机理并不完全清楚的研究对象，如果可以搜集到其运动状况的大量数据或是通过实验的方法可以获取所需要的数据，则可以通过统计分析建立统计模型，显然它适用于灰箱或黑箱系统。

(4) 实验分析法。对有些机理不清，且无数据可寻的情况，只能通过局部或小范围试验和实验的方法来获取数据以建立模型，这种方法适用于灰箱或黑箱系统。

(5) 构想法。对于黑箱系统，只能依靠想象和逻辑分析建立模型，这种方法称为想定法或构想法。当然，依靠想象和逻辑分析建立的模型可能与实际情况不符，需要对模型不断地修改与完善，直至满意为止。

一般情况下，建立的数学模型可表述为

目标函数：

$$U = f(x_i, a_j, \xi_k) \tag{1-3}$$

约束条件：

$$g(x_i, a_j, \xi_k) \geqslant 0 \tag{1-4}$$

式(1-3)和式(1-4)中，x_i，a_j，ξ_k 分别是决策变量，已知参数，随机变量。

一般而言，需要求出目标函数的最大值或最小值，有时只要求适中或满意即可。评价其最优或满意与否的标准可能只有一个，也可能会有多个。约束条件可能没有，也可能有多个，如果式(1-4)为等式形式，说明问题不受随机因素的影响，为确定性模型，否则为随机性模型。

1.3　运筹学在管理中的应用

运筹学在现实中的应用已经非常普遍，如政法、经济、科技、社会、军事等领域。由于篇幅的限制，仅就运筹在管理中的应用做出重点介绍。

(1) 市场销售。企业生产的产品会有不同的种类，也会面对不同的市场区域或不同的细分市场。因为产品在不同市场上的价格、促销费用、运输费用以及其他营销费用可能有所不同，所以在一定的总产量情况下，在不同地区销售不同量的产品会产生不同的效益。假定企业追求的是总利润的最大化，此时企业可以建立线性规划模型来决定不同产品在不同区域或不同细分市场上的最佳销售量。

(2) 生产计划。无论企业生产什么样的产品或有什么样的产品组合，总是要有各种资源的投入，而企业无论实力如何，其掌控的资源总是有限的。在一定资源总量的前提下，将其分配到不同的产品上去，会产生不同的效益，企业也可以利用线性规划方法进行最佳的生产计划安排。

(3) 库存管理。无论是工业企业，还是商业企业，在生产和经营过程中总要涉及库存

问题。比如工业企业要库存一定数量的原材料、燃料、标准件等以保证生产的连续进行；商业企业也要保证一定的商品库存量，以保证不会造成太大的机会损失；除了企业需要有一定的库存以外，国家也要储备一定数量的战略物资和重要的资源，家庭也要备有一定数量的生活必需品。因此，库存问题是日常经济生活中，大到国家小到家庭和个人都不可避免会遇到的问题。运筹学中的库存论就是解决库存问题的专门理论。

(4) 运输管理。运输问题是在当今物流业飞速发展年代面临的一个重要问题，运输可以产生商品的地点效用。不同的运输方式、采用不同的运输工具、不同的运输路线和运输量等因素都会产生不同的经济效果。运筹学中的运输问题模型及其解法，为产销间的物流提供了一种优化的方法。

(5) 财务管理。企业的财务管理涉及融资、投资、利润分配等领域，不同的融资渠道会有不同的融资成本；将一定数量的资金投到不同的投资项目上，投资比例不同也会产生不同的效益；企业利润是留存使用还是分配以及如何分配留存和分配的比例，也会影响到企业的生存和发展。运筹学中的动态规划、目标规划、决策论等为之提供了多种决策方法。

(6) 人力资源管理。人力资源管理主要涉及供需分析、工作安排、招聘、培训、激励、评价、考核与晋升等方面的内容。这些活动总是要占用时间、消耗资源并产生一定的结果，所以不同的计划方案会有不同的经济和社会效果。运筹学中的规划论、图论与网络分析等分支理论为之提供了优化的方法。

(7) 行政管理。运筹学在各级政府的行政管理中也可发挥其特有的作用。比如图论中的方法可以用于选址和布局问题；排队论可以用于一些公共设施、服务机构的规模确定问题；搜索论可以用于提高办公和办事效率问题；决策论可以解决政府决策的科学化问题。

除了上面讨论的应用领域以外，运筹学所能解决的问题几乎可以涉足政治、经济、社会的方方面面，而且随着运筹学的发展，还会出现更多的分支理论和专门的解法。运筹学的应用和运筹科学是未来本学科的一个发展趋势，而且运筹学不仅是解决特定问题的专门理论，还会逐渐向解决复杂大系统的优化问题和综合性问题的方向发展。

本章主要知识点

运筹学的产生及其发展、运筹学的主要分支、运筹学模型的类型及建模方法、运筹学工作流程、运筹学的应用

思　考　题

1. 运筹学主要有哪些定义？其产生的背景是什么？
2. 运筹学中主要包括了哪些内容？
3. 运筹学建模的主要方法有哪些？
4. 运筹学的工作流程是什么？
5. 运筹学在管理中的主要应用领域有哪些？

第 2 章

线性规划与单纯形法

线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，它是进行辅助科学管理的一种数学方法。在经济管理活动中，提高经济效果是必然要求，而提高经济效果一般通过两种途径：一是技术途径；二是管理途径，即合理安排人、财、物等资源，以达到资源消耗和成本的节约。线性规划是在一组线性约束条件下，寻求用线性函数表示的目标函数取得最优解的问题。即求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题。

补充材料：线性规划的产生及其发展

法国数学家傅里叶和瓦莱-普森分别于 1832 和 1911 年独立地提出线性规划的想法，但未引起注意。

1939 年苏联数学家康托罗维奇在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题，也未引起重视。

1947 年美国数学家丹齐克提出求解线性规划的单纯形法，为该学科奠定了基础。

1947 年美国数学家冯·诺依曼提出对偶理论，开创了线性规划的许多新的研究领域，扩大了它的应用范围和解题能力。

1951 年美国经济学家库普曼斯把线性规划应用到经济领域，为此与康托罗维奇一起获 1975 年诺贝尔经济学奖。

自 20 世纪 50 年代后，对线性规划进行大量的理论研究，并涌现出一大批新的算法。例如，1954 年莱姆基提出对偶单纯形法，1954 年加斯和萨迪等人解决了线性规划的灵敏度分析和参数规划问题，1956 年塔克提出互补松弛定理，1960 年丹齐克和沃尔夫提出分解算法等。

线性规划的研究成果还直接推动了其他数学规划问题，包括整数规划、随机规划和非线性规划的算法研究。由于数字电子计算机的发展，出现了许多线性规划软件，如 MPSX，OPHEIE，UMPIRE 等，可以很方便地求解几千个变量的线性规划问题。

1979 年苏联数学家卡倩提出解线性规划问题的椭球算法，并证明它是多项式时间算法。

1984 年美国贝尔电话实验室的印度数学家卡马卡提出解线性规划问题的新的多项式时间算法。用这种方法求解线性规划问题在变量个数为 5000 时只要单纯形法所用时间的 1/50。现已形成线性规划多项式算法理论。

2.1 线性规划问题及其数学模型

2.1.1 问题提出与线性规划模型的建立

线性规划是运筹学中的一个重要分支。最早研究线性规划问题的是苏联数学家康托罗维奇，他在20世纪30年代发表的《生产组织与计划中的数学方法》一书中，就介绍了线性规划问题。1940年数学家劳莱发展并建立了线性规划模型。1947年丹齐克提出了一般线性规划问题的求解方法——单纯形法，使得线性规划理论日臻成熟。特别是计算机技术的发展使变量众多的复杂线性规划问题的求解成为可能，也使得线性规划方法有了更为广阔的应用空间。线性规划可以解决很多实际问题，下面仅以几个例子说明线性规划问题的应用领域和线性规划模型的建立。

例 2-1 某企业准备生产甲乙两种产品，需要消耗A、B、C三种资源，生产每单位产品对各种资源的消耗量，三种资源的总拥有量，产品的单位利润如表2-1所示，假设企业追求利润最大化，试建立该问题的线性规划模型。

表 2-1 两种产品的基本情况

资源 \ 产品	甲	乙	资源总量（公斤）
A	1	2	18
B	5	2	50
C	0	1	8
单位利润(元)	5	4	

解：设甲乙两种产品的产量分别为 x_1, x_2，则可建立如下的线性规划模型

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-1}$$

例 2-2 某企业生产甲、乙、丙三种型号手机，其产量主要受原料A和工时的限制，基本情况如表2-2所示，试建立该问题的线性规划模型。

表 2-2 两种产品的基本情况

资源 \ 产品	甲	乙	丙	资源总量
原料A （公斤）	2	2	4	2000
工时 （小时）	2	3	3	1500
最低生产量 （千部）	100	200	200	—
单位利润 （元）	40	50	100	—

解：设甲、乙、丙三种手机的生产量分别为 x_1, x_2, x_3，根据题意可建立如下线性规划模型

$$\max Z = 40x_1 + 50x_2 + 100x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 2000 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 1500 \\ x_1 \geqslant 100 \\ x_2 \geqslant 200 \\ x_3 \geqslant 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-2}$$

例 2-3　某企业接到一笔生产 1000 公斤铸铁的订货，其成分要求是含锰量不低于 0.5%，含硅量在 3.5%～5%，铸铁的单价为 0.5 元/公斤。目前企业可用的生铁有三种，性质如表 2-3 所示。纯锰可以直接加入熔化后的铁水中，每熔化 1 公斤适于生铁的费用为 0.05 元。试问企业在生产时应如何选择炉料能使总利润为最大？

表 2-3　三种生铁及纯锰的性质及价格

炉料 / 元素	生铁 Fe 种类			纯锰 Mn
	甲	乙	丙	
含硅 Si 量　(%)	4	1	2	—
含锰 Mn 量　(%)	0.3	0.2	0.5	100
原料单价　(元/吨)	210	250	150	8000

解：设炉料中甲、乙、丙三种生铁和纯锰的使用量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 公斤

利润函数：$Z = 1000 \times (0.5 - 0.05) - 0.21x_1 - 0.25x_2 - 0.15x_3 - 8x_4$

含硅量限制：$0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.02x_3 \geqslant 0.035 \times 1000$

$0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.02x_3 \leqslant 0.05 \times 1000$

含锰量限制：$0.003x_1 + 0.002x_2 + 0.005x_3 + x_4 \geqslant 0.005 \times 1000$

订货量限制：$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$

整理后可得到如下的线性规划模型

$$\min Z = 0.21x_1 + 0.25x_2 + 0.15x_3 + 8x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3500 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 5000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 1000x_4 \geqslant 5000 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-3}$$

从上面的三个例子可以看出，线性规划问题具有下述共性特征：

(1) 每一问题都用一组决策变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示某一方案；这组决策变量的值就代表一个具体方案 ，一般这些变量值是非负的；

(2) 存在一定的约束条件，它们可用线性等式或不等式表示；

(3) 都有一个要求达到的目标，它们可用决策变量的线性函数表示，称目标函数。根

据问题不同,要求目标函数实现最大化或最小化。

满足上述三个条件的数学模型为线性规划模型,其一般形式为:

目标函数

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2-4}$$

资源约束

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n(\leqslant, =, \geqslant)b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n(\leqslant, =, \geqslant)b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n(\leqslant, =, \geqslant)b_m \end{cases} \tag{2-5}$$

非负约束

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{2-6}$$

2.1.2 图解法

线性规划解法的基本原理源于图解法。下面用例 2-1 说明图解法的基本思想,模型为

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 & (2) \\ x_2 \leqslant 8 & (3) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & (4) \end{cases}$$

将模型中的资源约束条件变为等式,则在 x_1-x_2 坐标平面内表现为直线,见图 2-1。再考虑不等式条件,第一个约束为 $x_1+2x_2\leqslant18$,满足此条件的点集在直线 $x_1+2x_2=18$ 的左下方。同理,满足约束条件(2)和约束条件(3)的点集分别位于直线 $5x_1+2x_2=50$ 的左下方和直线 $x_2=8$ 的下方。再考虑非负约束条件 $x_1,x_2\geqslant0$,即是点集落在 x_1 轴的上方,x_2 轴的右方。同时满足上述所有约束条件的点落在 $ODABC$ 所围成的区域内,该区域称为可行域。

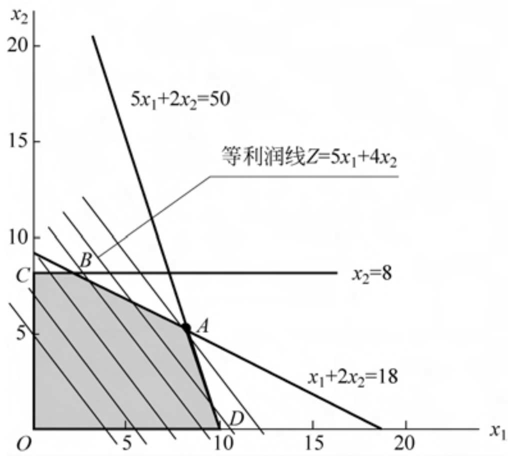


图 2-1 图解法