第3章

多维随机变量及其分布

第 2 章我们介绍了随机变量的情况. 但是在许多随机现象中,对每个样本点 e 只用一个随机变量去描述是不够的. 例如,考察某地区儿童的生长发育情况,仅研究儿童的身高 X 或仅研究其体重 Y 都是片面的,有必要把 X 和 Y 作为一个整体来考虑,讨论它们总体变化的规律性,进一步可以讨论 X 与 Y 之间的关系. 在有些随机现象中,甚至要同时讨论两个以上的随机变量. 如某地区的天气情况,既要考虑温度 X、湿度 Y,还要考虑 PM2.5 的指标 Z 等随机变量. 本章的主要讨论内容——二维随机变量及其分布,所得的概念和结论,读者可推广到 n 维随机变量的情形.

3.1 二维随机变量及其分布

3.1.1 二维随机变量及其分布函数

定义 3-1-1 设 E 是一个随机试验,它的样本空间为 $S=\{e\}$,设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在样本空间 S 上的随机变量,则称由它们构成的一个向量 (X,Y) 为二维随机变量或二维随机向量.

由此,也称第 2 章讨论的随机变量为一维随机变量. 和一维的情况类似,我们也借助分布函数来研究二维随机变量.

定义 3-1-2 设 (X,Y) 是二维随机变量,对任意实数 x,y,称二元函数

$$F(x,y) = P\{(X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\} \xlongequal{\text{记作}} P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} \tag{3.1.1}$$

为二维随机变量 (X,Y) 的**分布函数**,或称其为随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**.

联合分布函数描述了二维随机变量的统计规律. 如果 (X,Y) 看作平面 xOy 上随机点的坐标,那么其分布函数 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处的函数值就表示随机点 (X,Y) 落在以点 (x,y) 为顶点且位于该点左下方的无穷矩形区域内的概率(如图 3-1 中阴影部分所示).

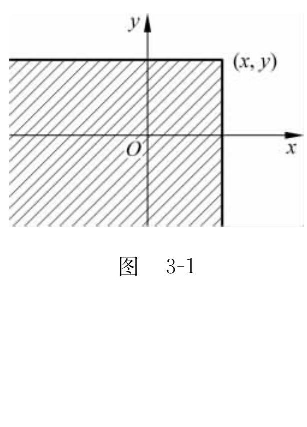

图 3-1

类似于一维分布函数,可以证明二维分布函数 $F(x,y)$ 具有如下性质.

性质 3-1-1 对任意实数 $x,y\in\mathbf{R}$，均有 $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且

对于任意固定的 x，$F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$；

对于任意固定的 y，$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$，

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

性质 3-1-2 对于任意固定的 y，$F(x,y)$是 x 的不减函数，即当 $x_2>x_1$ 时，$F(x_2,y)\geqslant F(x_1,y)$；对于任意固定的 x，$F(x,y)$是 y 的不减函数，即当 $y_2>y_1$ 时，$F(x,y_2)\geqslant F(x,y_1)$.

性质 3-1-3 对于任意固定的 y，$F(x,y)$关于 x 是右连续的，即 $F(x+0,y)=F(x,y)$；对于任意固定的 x，$F(x,y)$关于 y 是右连续的，即 $F(x,y+0)=F(x,y)$.

性质 3-1-4 对于任意的 $x_1<x_2,y_1<y_2$ 均有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0. \tag{3.1.2}$$

如果二元函数 $F(x,y)$满足上述性质 3-1-1～性质 3-1-4，则其一定是某一个二维随机变量(X,Y)的分布函数，这一点和一维的情形类似.

下面仅证明性质 3-1-4.

证 由概率的加法性质和分布函数的几何解释可得（参看图 3-2）

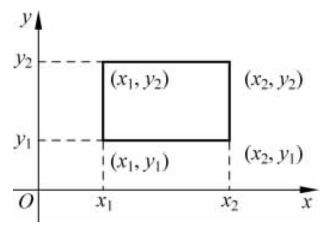

图 3-2

$$\begin{aligned}&P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\\ =&P\{X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}-P\{X\leqslant x_1,y_1<Y\leqslant y_2\}\\ =&P\{X\leqslant x_2,Y\leqslant y_2\}-P\{X\leqslant x_1,Y\leqslant y_2\}-\\ &P\{X\leqslant x_2,Y\leqslant y_1\}+P\{X\leqslant x_1,Y\leqslant y_1\}\\ =&F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1),\end{aligned}$$

恰好是式(3.1.2)的左端，再根据概率的非负性，性质得证.

由图 3-2 可以看出二维随机变量(X,Y)落在矩形区域$\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}$的概率用分布函数 $F(x,y)$表示为

$$\begin{aligned}&P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\\ =&F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1).\end{aligned}$$

例 3-1-1 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y),\quad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数 A,B,C.

解 根据分布函数 $F(x,y)$的性质 3-1-1，由

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}A(B+\arctan x)(C+\arctan y)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)(C+\arctan y)=0,$$

解得 $B=\dfrac{\pi}{2}$；

由

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}A(B+\arctan x)(C+\arctan y)=A(B+\arctan x)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

解得 $C=\dfrac{\pi}{2}$；

由 $B=\dfrac{\pi}{2},C=\dfrac{\pi}{2}$ 及

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}A(B+\arctan x)(C+\arctan y)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

解得 $A=\dfrac{1}{\pi^2}$.

故 $B=\dfrac{\pi}{2},C=\dfrac{\pi}{2},A=\dfrac{1}{\pi^2}$.

类似于一维随机变量，二维随机变量也分为离散型和连续型两种情况.

3.1.2 二维离散型随机变量及其分布

定义 3-1-3 若二维随机变量(X,Y)所有可能的取值为有限多对或可列无限多对，则称(X,Y)是二维离散型随机变量.

定义 3-1-4 设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能的取值为$(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$，且

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,\tag{3.1.3}$$

则称式(3.1.3)为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

式(3.1.3)常用如下的表格形式表示：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

由概率的定义可知：

$$p_{ij}\geqslant 0,\quad i,j=1,2,\cdots;\tag{3.1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.\tag{3.1.5}$$

二维离散型随机变量(X,Y)的分布函数(也称 X 和 Y 的联合分布函数)为

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij},\tag{3.1.6}$$

其中和式是对一切满足 $x_i\leqslant x,y_j\leqslant y$ 的 i,j 来求和的.

利用(X,Y)的分布律还可以计算如下概率：

设 D 为 xOy 平面上的一个点集，(X,Y)落在 D 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\sum_{(x_i,y_j)\in D}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij},\tag{3.1.7}$$

其中和式是对所有满足$(x_i, y_j) \in D$的i, j来求和的.

例 3-1-2 盒子里装有3只黑球、2只红球、2只白球,从中任取2只,以X表示取到黑球的只数,以Y表示取到红球的只数.

试求:(1) (X,Y)的分布律;

(2) $P\{X=Y\}$.

解 (1) (X,Y)可能取的值有$(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)$.计算得

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21},\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{4}{21},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21},\quad P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{2}{7},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{2}{7},\quad P\{X=2,Y=0\}=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}.$$

所以(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0
2	$\frac{1}{7}$	0	0

(2) 因为事件

$$\{X=Y\}=\{X=0,Y=0\}\cup\{X=1,Y=1\},$$

且两个事件互不相容,故

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=\frac{1}{21}+\frac{2}{7}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3.1.3 二维连续型随机变量及其分布

定义 3-1-5 设$F(x,y)$是二维随机变量(X,Y)的分布函数,若存在非负可积函数$f(x,y)$,使得对于任意实数x,y,有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.1.8}$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量,函数$f(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的概率密度或随机变量X和Y的联合概率密度.

根据概率密度的定义和分布函数的性质,可知$f(x,y)$具有以下性质.

(1) 非负性:

$$f(x,y)\geqslant 0. \tag{3.1.9}$$

(2) 规范性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(+\infty,+\infty)=1. \tag{3.1.10}$$

特别地,如果二元函数 $f(x,y)$满足性质(1)和(2),则其一定是某一个二维随机变量的概率密度,这一点和一维的情形类似.

(3) 设 D 是 xOy 平面上的一个区域,则(X,Y)落在 D 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.1.11}$$

(4) 若 $f(x,y)$在点(x,y)连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y). \tag{3.1.12}$$

式(3.1.12)表示若 $f(x,y)$在点(x,y)连续,则当 $\Delta x,\Delta y$ 很小时,

$$P\{x<X\leqslant x+\Delta x,y<Y\leqslant y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y,$$

也就是说随机点(X,Y)落在小长方形$(x,x+\Delta x]\times(y,y+\Delta y]$内的概率近似地等于 $f(x,y)\Delta x\Delta y$.

在几何上 $z=f(x,y)$表示空间的一个曲面.由性质(2)知,介于它和 xOy 面的空间区域的体积为 1.由性质(3),$P\{(X,Y)\in D\}$的值等于以 D 为底,以曲面 $z=f(x,y)$为顶面的柱体体积.

例 3-1-3 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1) 常数 k;

(2) (X,Y)的分布函数 $F(x,y)$;

(3) $P\{X>1,Y<1\}$;

(4) $P\{X<Y\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}k\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{k}{2}=1,$$

解得

$$k=2.$$

故

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 由 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 可知,当 $x>0,y>0$ 时,

$$F(x,y)=\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{-2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^x\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\int_0^y 2\mathrm{e}^{-2v}\mathrm{d}v=(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y});$$

当 x,y 为其他数值时,被积函数 $f(u,v)\equiv 0$,所以 $F(x,y)=0$.

故(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $P\{X>1,Y<1\}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 2\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-2})$.

(4) 将(X,Y)看作平面上随机点的坐标，则$\{X<Y\}=\{(X,Y)\in D\}$，其中

$$D=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty, x<y\},$$

如图 3-3 所示，因此

$$\begin{aligned} P\{X<Y\}=P\{(X,Y)\in D\}&=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^y 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x \\ &=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2y}(1-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y=\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

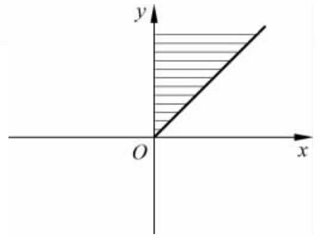

图　3-3

下面介绍二维连续型随机变量中的两个常用分布——均匀分布和二维正态分布.

(1) 均匀分布

设 G 是坐标平面 xOy 上面积为 A 的有界区域，若二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{3.1.13}$$

则称(X,Y)在区域 G 上服从均匀分布. 记作$(X,Y)\sim U(G)$.

若$(X,Y)\sim U(G)$，概率密度函数如式(3.1.13)所示，则对 G 中的任一(有面积的)子区域 D，有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(x,y)\in D}\frac{1}{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{S_D}{A},$$

其中 S_D 是 D 的面积. 上式表明，二维随机变量落入区域 D 的概率与 D 的面积成正比，而与 D 在 G 中的位置和形状无关.

例 3-1-4　设(X,Y)在区域 D 上服从均匀分布，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$，求概率 $P\{|X|\leqslant r/2\}$.

解　易知 D 的面积为 πr^2，因此(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此所求概率为

$$\begin{aligned} P\{|X|\leqslant r/2\}&=\iint\limits_{|x|\leqslant r/2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-r/2}^{r/2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}\mathrm{d}y \\ &=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-r/2}^{r/2}2\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi r^2}\left(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\frac{x}{r}\right)\Bigg|_{-r/2}^{r/2} \\ &=\frac{1}{\pi r^2}\left(r\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}+2r^2\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0.609. \end{aligned}$$

(2) 二维正态分布

如果二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$-\infty<x,y<+\infty, \tag{3.1.14}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数，且 $\sigma_1,\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$，则称(X,Y)为服从参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

注 二维正态分布概率密度 $f(x,y)$的图像如图 3-4 所示.

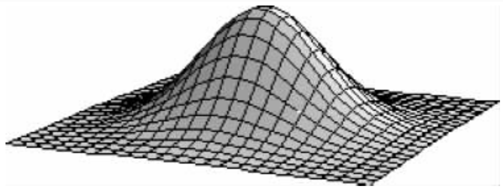

图 3-4

习 题 3-1

1. 盒子里装有 4 只白球、2 只红球，每次从中任取一球，不放回地抽取两次. 设随机变量 X 和 Y 定义如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到红球,}\\ 0, & \text{第一次取到白球,}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到红球,}\\ 0, & \text{第二次取到白球.}\end{cases}$$

试求：(1)(X,Y)的分布律；(2)$P\{X\leqslant Y\}$.

2. 将两封信随机地投入 4 个邮筒，X 和 Y 分别表示第一个和第二个邮筒中信的总数. 试求(X,Y)的分布律.

3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-(3x+2y)} & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

试求：(1)常数 k；(2)(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$；(3)概率 $P\{X\geqslant Y\}$.

4. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

试求：(1) 常数 k；(2) $P\{X<1,Y<3\}$；(3) $P\{X<2\}$；(4) $P\{X+Y\leqslant 4\}$.

3.2 边缘分布

二维随机变量(X,Y)中，X 和 Y 也都是随机变量，它们也分别有各自的概率分布. 分别称 X 和 Y 的概率分布为二维随机变量(X,Y)关于 X 和关于 Y 的**边缘概率分布**，简称**边缘分布**.

我们称 X 和 Y 各自的分布函数为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数，分别记作 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$. 一般地，对于二维随机变量(X,Y)，我们可以通过(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$来求出边缘分布函数 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$. 事实上，

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}=F(x,+\infty),$$

即

$$F_X(x) = F(x, +\infty). \tag{3.2.1}$$

同理可得

$$F_Y(y) = F(+\infty, y). \tag{3.2.2}$$

下面我们就离散型和连续型两种情况，分别讨论对于二维随机变量如何从联合分布确定边缘分布的问题.

3.2.1 二维离散型随机变量的边缘分布

设(X,Y)为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i,j = 1,2,\cdots,$$

由于

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y < +\infty\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X = x_i, Y = y_j\},$$

而事件组$\{X=x_i, Y=y_j\}(j=1,2,\cdots)$两两互不相容，由概率的可列可加性可得

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots.$$

同理可得

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1,2,\cdots.$$

若记

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1,2,\cdots,$$

于是

$$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}, \quad i = 1,2,\cdots, \tag{3.2.3}$$

$$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}, \quad j = 1,2,\cdots. \tag{3.2.4}$$

分别称式(3.2.3)和式(3.2.4)为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的**边缘分布律**.

常常利用 X 和 Y 的联合分布律表格表示法求边缘分布律，如下所示：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

上表的中间部分是 X 与 Y 的联合分布律,而处在边沿部分的最后一行和最后一列是将联合分布律的表格按同列、同行的概率分别相加得到的,这就是所求的两个边缘分布律:关于 X 的边缘分布律为

X	x_1	x_2	…	x_i	…
$p_{i\cdot}$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	…	$p_{i\cdot}$	…

关于 Y 的边缘分布律为

Y	y_1	y_2	…	y_j	…
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	…	$p_{\cdot j}$	…

例 3-2-1 试求 3.1.2 节例 3-1-2 中二维随机变量(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

解 由于

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{4}{7}$
2	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$	

故(X,Y)关于 X 的边缘分布律为

X	0	1	2
$p_{i\cdot}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

关于 Y 的边缘分布律为

Y	0	1	2
$p_{\cdot j}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

3.2.2 二维连续型随机变量的边缘分布

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,由于

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u,$$

所以 X 是一个连续型随机变量，且其概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y; \tag{3.2.5}$$

同理可知 Y 也是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{3.2.6}$$

分别称 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度.

例 3-2-2　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$.

解　随机变量(X,Y)的概率密度 $f(x,y)$的非零取值区域如图 3-5 所示。

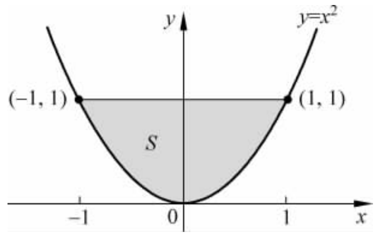

图　3-5

当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y=\frac{21}{8}x^2(1-x^4),$$

所以(X,Y)关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}},$$

所以(X,Y)关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3-2-3　设二维随机变量(X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，分别求(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度.

解　(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\\ =&(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2,\end{aligned}$$

所以

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$