Chapter 3 第三章

函数、方程及不等式

第一节　集合与函数

考试大纲解读

(1) 了解集合的定义、性质及运算.

(2) 了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域.

(3) 了解简单的分段函数及复合函数.

考向指南

(1) 本节以集合为载体考查函数、不等式、方程、数列、曲线及轨迹等有关知识.

(2) 考查集合的交、并运算,同时也考查集合的性质,会以应用题形式或者综合其他考点命题.

重、难考点突破

一、集合

1. 元素与集合的关系

用$\in$(属于)或$\notin$(不属于)表示;元素常用小写字母表示,集合常用大写字母表示,一般元素 a 属于集合 A,记为 $a\in A$.

2. 集合中元素的特性

集合中元素具有确定性、无序性、互异性.

3. 集合的分类

(1) 按元素个数分:有限集,无限集;

(2) 按元素特征分：数集，点集.

4. 集合的表示法

(1) 列举法：用来表示有限集或具有显著规律的无限集，如 $\mathbf{N}^{+}=\{0,1,2,3,\cdots\}$；
(2) 描述法：{掷一颗骰子点数为偶数}；
(3) 韦恩图示法：自然数集 $\mathbf{N}$，正整数集 $\mathbf{N}_{+}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$ 等.

5. 集合与集合的关系

集合与集合的关系用包含或者相等表示，如 A 是 B 的子集记为 $A\subseteq B$；A 是 B 的真子集记为 $A\subset(B)$

(1) 任何一个集合是它本身的子集，记为 $A\subseteq A$.
(2) 空集是任何集合的子集，记为$\varnothing\subseteq A$；空集是任何非空集合的真子集.
(3) 如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.
(4) n 个元素的子集有 2^n 个；真子集有 2^n-1 个；非空真子集有 2^n-2 个.

6. 集合的常见运算

(1) 交集 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.
(2) 并集 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.
(3) 补集 $\overline{A}=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$，集合 U 表示全集.

7. 集合运算中常用结论

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.
(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、函数基本概念

1. 函数的定义

函数就是定义在非空数集 A，B 上的某种对应关系 f，使得对于集合 A 中的任何一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么就称 f 是集合 A 上的一个函数，记作 $y=f(x)(x\in A)$，其中 x 常称为自变量，y 称为因变量，f 称为对应法则. 此时称数集 A 为定义域，数集 $C=\{y|y=f(x),x\in A\}$为值域.

2. 函数的三要素

(1) 定义域：自变量的取值范围.
(2) 对应法则：函数关系 $y=f(x)$. 函数对应法则通常表现为表格、解析式和图像.
(3) 值域：函数值(因变量)的取值范围.
从逻辑上讲，定义域、对应法则决定值域，是两个最基本的因素.

3. 函数定义域的求法

列出使函数有意义的自变量的不等式关系，求解即可求得函数的定义域. 其常涉及的依据有以下几点.

(1) 分母不为 0.

(2) 偶次根式中被开方数不小于 0.

(3) 对数的真数大于 0，底数大于 0 且不等于 1.

(4) 零指数幂的底数不等于 0.

(5) 实际问题要考虑实际意义等.

函数定义域是研究函数性质的基础和前提. 求函数定义域是通过解关于自变量的不等式(组)来实现的.

题型精准分类

题型一　集　　合

真题实例

【2014 年 1 月】 已知 $M=\{a,b,c,d,e\}$ 是一个整数集合. 则能确定集合 M.

(1) a,b,c,d,e 的平均值为 10.　　(2) a,b,c,d,e 的方差为 2.

【答案】 (C)

【解析】 两条件单独显然不充分，考虑联合.

方差 $S^2=\frac{1}{5}[(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2+(d-10)^2+(e-10)^2]=2$，整理得 $(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2+(d-10)^2+(e-10)^2=10$，即 5 个完全平方数的和等于 10，因为小于 10 的完全平方数只有 0，1，4，9，所以结合题目分析可知这 5 个完全平方数可能是 0，1，1，4，4 或者 0，0，0，1，9 两种情况.

又因为 a,b,c,d,e 的平均值为 10，所以这 5 个完全平方数只能为 0，1，1，4，4. 对应的 a,b,c,d,e 为 8，9，10，11，12，即集合 $M=\{8,9,10,11,12\}$.

【归纳】 本题综合了数据描述的知识点，集合主要考查了互异性，忽略集合性质会误选(E).

【难度指数】 ★★★★★

举一反三

【例 3.1】 已知两个不同的集合 $A=\{1,3,a^2-a+3\}$，$B=\{1,5,a^3-a^2-4a+7\}$，若 $A\cap B=\{1,3\}$，则 $A\cup B=$(　　).

(A) $\{1,3,5\}$　　(B) $\{1,3,9\}$　　(C) $\{1,3,5,9\}$　　(D) $\{3,5,9\}$

(E) 以上均不正确

【答案】 (C)

【解析】 由 $A\cap B=\{1,3\}$，及集合间元素的互异性，有$\begin{cases}a^3-a^2-4a+7=3\\a^2-a+3\neq5\\a^2-a+3\neq3\end{cases}$，解得 $a=-2$，即 $a^3-a^2-4a+7=3$，$a^2-a+3=9$，所以 $A\cup B=\{1,3,5,9\}$.

【例 3.2】 设 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant0\}$，若 $A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant3\}$，则 a，b 分别为（　　）.

(A) 3，2　　(B) 1，−2　　(C) −3，2　　(D) −2，−3

(E) 以上均不正确

【答案】 (D)

【解析】 先对 A、B 中的不等式化简，A：$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x+1)(x-1)>0$，

解得 $A=\{x\mid x\in(-2,-1)\cup(1,+\infty)\}$，因为 $A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant3\}$，所以得 $B=\{x\mid x\in[-1,-3]\}$，

因此 $(x-3)(x+1)=x^2+ax+b$，解得 $a=-2$，$b=-3$.

【例 3.3】 a 的取值范围是 $\left\{a\mid a\leqslant\frac{9}{8}\right\}$.

(1) 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}$ 至多有一个元素.

(2) 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}$ 至少有一个元素.

【答案】 (B)

【解析】 集合中元素的个数为方程根的个数，因此：

当 A 中只有一个元素时，$a=0$ 或 $\Delta=9-8a=0$.

当 A 中无元素时，$\Delta=9-8a<0$.

当 A 中有两个元素时，$\Delta=9-8a>0$.

条件(1)，集合 A 至多有一个元素，因此 $\left\{a\mid a\geqslant\frac{9}{8}\text{或 }a=0\right\}$，不充分；条件(2)，集合 A 至少有一个元素，因此 $\left\{a\mid a\leqslant\frac{9}{8}\right\}$，充分，选(B).

一练再练

1. 集合 $A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 a 的值为（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4　　(E) 3

2. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x\mid x=2a,a\in M\}$，则集合 $M\cap N=$（　　）.

(A) $\{0\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{1,2\}$　　(D) $\{0,2\}$

(E) 以上均不正确

3. 已知集合 $M=\{3,\log_{2x}4\}$，$N=\{x,y\}$，若 $M\cap N=\{2\}$，则 $M\cup N$ 等于（　　）.

(A) $\{1,2,3\}$　　(B) $\{1,2,3,4\}$　　(C) $\{-1,1,2,3\}$

(D) $\{2,3,x,y\}$　　(E) $\{2,3,4\}$

答案与解析

1.【答案】 (D)

【解析】　由题意得$\{a,a^2\}=\{4,16\}$，只有$\begin{cases}a=4\\a^2=16\end{cases}\Rightarrow a=4$.

2.【答案】（D）

【解析】　由题意得 $N=\{0,2,4\}$，故 $M\cap N=\{0,2\}$.

3.【答案】（A）

【解析】　由 $M\cap N=\{2\}$可知，$\log_{2x}4=2$，$\therefore x=1$，又 $M\cap N=\{2\}$，$\therefore y=2$，$\therefore M\cup N=\{1,2,3\}$.

题型二　函　　数

真题实例

【2017 年 12 月】　设函数 $f(x)=x^2+ax$. 则 $f(x)$的最小值与 $f(f(x))$的最小值相等.

（1）$a\geqslant 2$.　　　　（2）$a\leqslant 0$.

【答案】（D）

【解析】　二次函数 $f(x)=x^2+ax$，最小值在对称轴处取到为 $f_{\min}\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}$，

令 $x^2+ax=t$，则 $t\geqslant-\frac{a^2}{4}$，则 $f(f(x))=f(t)=t^2+at\left(t\geqslant-\frac{a^2}{4}\right)$，又因为函数 $f(x)$与函数 $f(t)$表达式相同，所以要想最小值相等，则函数 $f(t)$的对称轴大于等于区间端点$-\frac{a^2}{4}$，即$-\frac{a}{2}\geqslant-\frac{a^2}{4}$，解得 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 2$，因此条件(1)、(2)均充分，答案选(D).

【归纳】　本题以分析二次函数 $f(x)$的最小值为突破口进行换元，换元后再结合元的范围分析新函数的最值.

【难度指数】　★★★★★

【评定理由】　本题评定为高难度题目是因为函数 $f(f(x))$的考查思维程度较高，同时还结合二次函数最值的分析，思路跳转较大，容易衔接不上.

举一反三

【例 3.4】　函数 $y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$的定义域为（　　）.

（A）$(-4,-1)$　（B）$(-4,1)$　（C）$(-1,1)$　（D）$(-1,1]$

（E）以上均不正确

【答案】（C）

【解析】　要使 $y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$有意义，需满足$\begin{cases}x+1>0\\-x^2-3x+4>0\end{cases}$，解得$-1<x<1$，选(C).

【例 3.5】　已知 $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2-3x+2$，求 $f(g(x))$.

【答案】　$2x^2-6x+3$

【解析】 $f(g(x))=2(x^2-3x+2)-1=2x^2-6x+3$.

【例 3.6】 对实数 a 和 b,定义运算"$\otimes$":$a\otimes b=\begin{cases}a,a-b\leqslant 1\\ b,a-b>1\end{cases}$,设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-x^2)$,$x\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点,则实数 c 的取值范围是(　　).

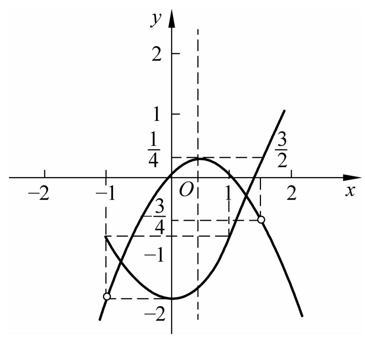
(A) $(-\infty,2]\cup\left(-1,\frac{3}{2}\right)$　　(B) $(-\infty,-2]\cup\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$

(C) $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　(D) $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

(E) 以上均不正确

【答案】 (B)

【解析】 由已知得 $f(x)=\begin{cases}x^2-2\left(-1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right)\\ x-x^2\left(x<-1 \text{ 或 } x>\frac{3}{2}\right)\end{cases}$,如图,



要使 $y=f(x)-c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点,则 $-1<c<-\frac{3}{4}$ 或 $c\leqslant -2$,选(B).

第二节　不等式的性质

考试大纲解读

(1) 了解不等式的有关概念及其分类.

(2) 掌握不等式的性质及其应用,明确各个性质中结论成立的前提条件.

考向指南

(1) 单纯对不等式性质的考查不多,往往与其他知识相结合,如集合运算、指数函数、对数函数、数列等.

（2）考查利用不等式的性质与实数的性质、函数的性质的结合，进行大小的比较.

（3）考查依据给定的条件，利用不等式的性质，判断不等式或有关的结论是否成立.

重、难考点突破

- 不等式
  - 不等式的概念：含有“$\neq$”“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”这些不等号的式子
  - 两个实数的大小比较
    - 作差法
      - $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$
      - $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$
      - $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$
    - 作商法
      - $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b(a,b\in \mathbf{R}^{+})$
      - $\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b(a,b\in \mathbf{R}^{+})$
      - $\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b(a,b\in \mathbf{R}^{+})$
  - 不等式的性质
    - 性质 1　如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$
    - 性质 2　如果 $a>b$，且 $b>c$，则 $a>c$
    - 性质 3　如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$
      - 推论 1　移项法则
      - 推论 2　如果 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$
    - 性质 4　如果 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$
      - 推论 1　如果 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$
      - 推论 2　如果 $a>b>0$，则 $a^n>b^n$ $(n\in \mathbf{N}_{+},n>1)$
      - 推论 3　如果 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\in \mathbf{N}_{+},n>1)$

题型精准分类

题型一　不等式的性质应用

真题实例

【2001 年 10 月】 若 $a>b>0$，$k>0$，则下列不等式中能够成立的是（　　）.

（A）$-\frac{b}{a}<-\frac{b+k}{a+k}$　（B）$\frac{a}{b}>\frac{a-k}{b-k}$　（C）$-\frac{b}{a}>-\frac{b+k}{a+k}$　（D）$\frac{a}{b}<\frac{a-k}{b-k}$

【答案】（C）

【解析】 由于 $a>b>0$，$k>0$，所以 $a+k>b+k$ 且 $b-a<0$.

所以$\frac{1}{a}>\frac{1}{a+k}$，故$\frac{b-a}{a}<\frac{b-a}{a+k}$，两边加1，即$\frac{b}{a}<\frac{b+k}{a+k}$，从而$-\frac{b}{a}>-\frac{b+k}{a+k}$，由于不知道$b$与$k$的大小关系，所以$b-k$无法确定正负情况，因此(B)、(D)无法判断，故选(C).

【技巧】 取特值分析，当$a=2,b=1,k=0.5$时排除(A)、(B)；当$a=2,b=1,k=1.5$时排除(D)，选(C).

【难度指数】 ★★★★

举一反三

【例 3.7】 $\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$.

(1) $0<c<a<b$. (2) $0<a<b<c$.

【答案】 (A)

【解析】 条件(1)，法 1：$0<c<a<b\Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<\frac{1}{c}\Rightarrow 0<\frac{a+b+c}{b}<\frac{a+b+c}{a}<\frac{a+b+c}{c}$

$\Rightarrow 0<\frac{a+c}{b}<\frac{b+c}{a}<\frac{a+b}{c}\Rightarrow\frac{b}{a+c}>\frac{a}{b+c}>\frac{c}{a+b}>0$

法 2：$a+b>c+b>0\Rightarrow 0<\frac{1}{a+b}<\frac{1}{c+b}\Rightarrow\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}$

同理可证$\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$.

条件(2)，举反例$a=1,b=2,c=3$，不充分.

【例 3.8】 $ab^2<cb^2$.

(1) 实数a,b,c满足$a+b+c=0$. (2) 实数a,b,c满足$a<b<c$.

【答案】 (E)

【解析】 举反例$b=0$，满足条件(1)、(2)，但不满足题干.

联合条件(1)、(2)$\Rightarrow a<0,c>0$，b不能确定，选(E).

一练再练

已知$a+b>0$，则$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$与$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的大小关系是________.

答案与解析

【答案】 $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

【解析】 $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a-b}{b^2}+\frac{b-a}{a^2}=(a-b)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}$.

$\because a+b>0,(a-b)^2\geqslant 0,\therefore\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}\geqslant 0,\therefore\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

题型二　不等式的易错题型

真题实例

无直接命题

举一反三

【例 3.9】 若 $0<x<3$，$-1<y<1$，则 $x-y$ 的范围是________.

【答案】 $(-1,4)$

【解析】 $\because -1<y<1$，$\therefore -1<-y<1$.

$\therefore -1<x-y<4$.

【归纳】 本题易犯的错误是直接用已知不等式相减求 $x-y$ 的范围为$(1,2)$，原因在于对不等式性质成立的条件注意不够.

【例 3.10】 设 $f(x)=px^2+qx$，且 $2\leqslant f(-1)\leqslant 4$，$4\leqslant f(1)\leqslant 6$. 求 $f(-2)$的取值范围.

【答案】 $10\leqslant f(-2)\leqslant 18$

【解析】 由 $\begin{cases} f(-1)=p-q \\ f(1)=p+q \end{cases}$，得 $\begin{cases} p=\dfrac{1}{2}[f(-1)+f(1)] \\ q=\dfrac{1}{2}[-f(-1)+f(1)] \end{cases}$.

$\therefore f(-2)=4p-2p$

$=2f(-1)+2f(1)+f(-1)-f(1)$

$=f(1)+3f(-1)$.

$\because 2\leqslant f(-1)\leqslant 4$，$4\leqslant f(1)\leqslant 6$，$\therefore 10\leqslant f(-2)\leqslant 18$.

【归纳】 本题易犯的错误是直接利用 $f(1)$，$f(-1)$的范围，求出 p，q 的范围，代入 $f(-2)$的表达式，得到 $f(-2)$的错误范围，原因在于多次应用不等式时，忽视不等号成立的条件.

第三节　一元一次函数、一元一次方程(组)及不等式(组)

考试大纲解读

(1) 了解一元一次函数、一元一次方程(组)及不等式(组)的基本形式.

(2) 会对一元一次方程组和不等式组进行求解.

考向指南

(1) 单纯考查一元一次函数的很少，经常出现二元一次方程组、三元一次方程组的

求解.

（2）二元一次不等式组的求解.

重、难考点突破

一、方程

定义：含有未知数的等式叫作方程，使方程（组）成立的未知数叫作方程（组）的解.

二、不等式求解及解集

对于含有未知数的不等式，能使其成立的未知数的值的集合，叫作这个不等式的解集.

由若干个含有同一个未知数的不等式组成的不等式组的解集，就是组成不等式组的所有不等式解集的公共部分（交集）.

求不等式（组）的解集的过程，叫作解不等式（组）.

解不等式的过程，应该是不等式的同解变形的过程. 不等式的同解变形有以下几种.

（1）移项：不等式中的任意一项，都可以改变符号后从不等式的一边移到另一边.

（2）系数变形：不等式的两边同乘（或除）以一个正数，不改变不等号的方向；不等式的两边同乘（或除）以一个负数，必须改变不等号的方向.

（3）在不改变原不等式中未知数取值范围的前提下的其他变形.

三、一元一次不等式的解法

一元一次不等式 $ax>b$ 的解集有以下几种.

（1）当 $a>0$ 时，解集为 $\left\{x\mid x>\frac{b}{a}\right\}$.

（2）当 $a<0$ 时，解集为 $\left\{x\mid x<\frac{b}{a}\right\}$.

（3）当 $a=0$ 时，若 $b\geqslant 0$，则 $x\in\varnothing$；若 $b<0$，则 $x\in\mathbf{R}$.

题型精准分类

题型一　一元一次方程

真题实例

【2014 年 10 月】 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=-1$，则 $x=$（　　）.

（A）-2　　（B）-1　　（C）0　　（D）1　　（E）2

【答案】 （B）

【解析】 原式 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=-1$ 同乘以公分母 6，整理得 $3x+2x+x=-6$，解得 $x=-1$.