

本章将用谓词逻辑表达集合论中的基本概念及其运算,并根据命题演算与集合运算之间的联系,构成一种集合代数。它类似于命题代数,同时还将给出数学中常用的重要证明方法——数学归纳法。最后讨论多重序元与笛卡儿乘积等重要概念,以便为学习后续理论知识打下基础。

### 3.1 集合的基本概念

集合是不能严格定义的原始概念,对它只能给予直观的描述。一般来说,把具有共同性质的一些东西或客体汇成一个整体,就形成了一个集合(set)。

举例如下。

- (1) 全体中国人的集合。
- (2) 全体素数的集合。
- (3) 方程  $x^2+x+1=0$  的实根的集合。
- (4) 直线  $y=2x-5$  上的点的集合。

上述4种集合中的客体(或称为元素)均具有共同的“性质”。但是,一支钢笔、一只老鼠汇成一个整体也可以看成一个集合,而这种集合中的客体就不具有共同“性质”了。一般来说,研究这种集合没有实际意义。

属于集合的任何客体称为该集合的**成员**(member)或**元素**(element)。

通常用大写英文字母表示一个集合,用小写英文字母表示集合中的客体或元素。若元素  $a$  属于集合  $A$ ,记作  $a \in A$ ,读为“ $a$  属于  $A$ ”;反之,若元素  $a$  不属于集合  $A$ ,记作  $a \notin A$ ,读为“ $a$  不属于  $A$ ”。

例如,令  $A = \{a, b, d\}$ ,则  $a \in A, b \in A, d \in A$ ,常简记为  $a, b, d \in A$ ,但  $c \notin A, e \notin A$  或  $c, e \notin A$ 。

为叙述方便,给出几种常见的集合,以后遇到此类集合不再重述。

**Q**——有理数(rational number)集合;

**N**——自然数(natural number)集合(包括0);

**I**——整数(integer)集合;

**R**——实数(real number)集合;

**N<sub>m</sub>**——小于  $m$  的自然数集合;

**I<sub>+</sub>**——正整数集合;

**I<sub>-</sub>**——负整数集合。

**定义 3.1.1** 设  $A$  为任意集合。

- (i) 集合  $A$  含有的元素个数,称为**基数**(cardinality),记为  $\text{card}(A)$ 或  $|A|$ 。
- (ii) 若  $|A|=0$ ,即  $A$  中不包含任何元素,则称  $A$  为**空集**(empty set),记为  $\emptyset$ 。
- (iii) 若  $|A|$  为某个自然数,则称  $A$  为**有限集**(finite set)。
- (iv) 若  $|A|$  为无穷大,则称  $A$  为**无限集**(infinite set)。
- (v) 若  $|A| \neq 0$ ,则称  $A$  为**非空集**(nonempty set)。

集合与元素的关系是从属关系,即一个元素属于或不属于某集合。为此,对集合中所含元素必须给予直观、确切的描述,其常用方法有下列 3 种。

### 1. 枚举法(或称列举法, list notation)

依照任意一种次序,不重复地列举出集合中的全部元素,并用一对花括号括起来,元素间用逗号分开。

例如,  $A=\{1,3,5,7\}$ ,  $B=\{a,a^2,a^3,a^4\}$ ,这种方法比较直观。

### 2. 部分列举法(partially list notation)

依照任意一种次序,不重复列出集合中的部分元素,元素间用逗号分开。但这部分元素充分体现出该集合的元素在上述次序下的构造规律,从而能够容易地得出该集合中的任意一个未列出的元素。未列举出的元素用“…”表示,然后用一对花括号  $\{\}$  括起来。例如,

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

$$\mathbf{I}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$$

### 3. 构造法(或称谓词公式法, set builder notation)

如果  $P(x)$  是表示元素  $x$  具有某种性质  $P$  的谓词,则所有具有性质  $P$  的元素就构成一个集合,记为  $A=\{x|P(x)\}$ 。显然,元素  $a \in A \Leftrightarrow P(a)$  为真。例如:

$$A=\{x|x \in \mathbf{R} \wedge x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$$

$$B=\{x|(x=1) \vee (x=3) \vee (x=a)\}=\{1,3,a\}$$

$$C=\{x|x \text{ 是正偶数}\}=\{2,4,6,\cdots\}$$

对集合必须注意以下几点。

(1) 集合中的元素必须是确定的,即对集合  $A$ ,任一元素  $a$  或者属于  $A$  或者不属于  $A$ ,两者必具其一,且仅具其一。

(2) 集合中的每个元素均不相同,如  $\{a,b,b,c,c,d\}$  与  $\{a,b,c,d\}$  表示同一个集合。

(3) 对集合中的元素不做任何限制,甚至一个集合可作为另一个集合的元素。例如,  $A=\{1,2,\{a,b\}\}$ ,其中集合  $\{a,b\}$  是集合  $A$  的一个元素。显然,有  $\{a,b\} \in A$ ,但  $a,b \notin A$ 。

**公理 3.1.1** 给定两个集合  $A$  和  $B$ ,当且仅当  $A$  和  $B$  具有同样的成员或元素, $A$  和  $B$  是**相等的**(equal),记为  $A=B$ ; 否则,称为  $A$  和  $B$  不相等,记为  $A \neq B$ 。

集合  $A$  和  $B$  相等这个公理可用谓词公式描述如下。

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

或

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$$

举例如下。

- (1)  $\{a,b,c\}=\{c,a,b\}=\{a,a,b,c\}$ 。

- (2) 设  $P = \{\{a, b\}, c\}$ ,  $Q = \{a, b, c\}$ , 则  $P \neq Q$ 。
- (3) 设  $A = \{x | x(x-1)=0\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ , 则  $A = B$ 。
- (4)  $\{1, 3, 5, \dots\} = \{x | x \text{ 是正奇数}\}$ 。
- (5)  $\{a\} \neq \{\{a\}\}$ 。

**定义 3.1.2** 设  $A$  和  $B$  是两个任意集合。如果  $A$  的每个元素均属于  $B$ , 则称  $A$  是  $B$  的子集(subset), 或  $A$  包含于  $B$ , 或  $B$  包含  $A$ , 记为  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$ 。

$A$  是  $B$  的子集的定义也可用谓词公式描述为  $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ 。

例如, 令  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,  $C = \{1, 2, 4\}$ , 则  $B \subseteq A$  但  $C \not\subseteq A$ 。

根据子集的定义立即可以得出下面两个性质。

- ① 自反性:  $A \subseteq A$ 。
- ② 传递性:  $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ 。

**定理 3.1.1** 集合  $A$  和  $B$  相等的充要条件是它们互为子集, 即  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 。

**证** (充分性) 若  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq A$ , 证明  $A = B$ 。现假设  $A \neq B$ , 则  $A$  和  $B$  的元素不完全相同, 至少有一个元素  $x \in A$ , 但  $x \notin B$ , 这与  $A \subseteq B$  矛盾; 或至少有一个元素  $x \in B$ , 但  $x \notin A$ , 这又与  $B \subseteq A$  相矛盾。故  $A$  和  $B$  必然相等。

(必要性) 若  $A = B$ , 证明  $A \subseteq B$ , 且  $B \subseteq A$ 。因为  $A$  和  $B$  相等, 所以它们的元素相同, 即  $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$  为真, 且  $(\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$  也为真, 故  $A \subseteq B$ , 且  $B \subseteq A$  成立。■

此定理建立了集合间的相等与包含关系, 当证明两个集合是否相等时, 常常使用这个定理, 即不直接证明  $A = B$ , 而是证明  $A \subseteq B$ , 且  $B \subseteq A$ 。

在证明此定理的充分性时, 使用了反证法(proof by contradiction), 这是数学中经常使用的重要证明方法。有些证明直接求证困难较大, 这时可考虑使用反证法, 甚至有些问题不使用反证法便不能得到证明。

**定义 3.1.3** 如果集合  $A$  的每个元素均属于  $B$ , 但集合  $B$  中至少有一个元素不属于  $A$ , 则称  $A$  为  $B$  的真子集(proper subset), 记为  $A \subset B$ 。

$A$  是  $B$  的真子集的定义可用谓词逻辑描述如下。

- ①  $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$ 。
- ②  $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ 。

例如, 自然数集合  $\mathbf{N}$  是整数集合  $\mathbf{I}$  的真子集。

**定理 3.1.2** 对任意集合  $A$ , 有  $\emptyset \subseteq A$ , 即空集是任意集合的子集。

**证明** (方法 1) 使用反证法。假设  $\emptyset \not\subseteq A$  是假, 则至少有一个元素  $x \in \emptyset$ , 且  $x \notin A$ , 而空集  $\emptyset$  不包含任何元素, 所以这种假设不成立。因此, 必有  $\emptyset \subseteq A$ 。

(方法 2) 设  $x$  是集合  $A$  中的任意元素, 由空集的定义可知,  $x \in \emptyset$  为假, 由逻辑联结词“ $\rightarrow$ ”的定义可知,  $x \in \emptyset \rightarrow x \in A$  为真。由  $x$  的任意性, 根据全称推广规则有  $(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$  为真, 故  $\emptyset \subseteq A$ 。■

**定理 3.1.3** 空集  $\emptyset$  是唯一的。

**证** 利用反证法。假设有两个不同的空集  $\emptyset_1$  和  $\emptyset_2$ , 因为  $\emptyset_1$  是空集, 所以必有  $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ ;

又因为 $\emptyset_2$ 是空集,所以又必有 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ 。即 $\emptyset_1$ 和 $\emptyset_2$ 互为子集,由定理3.1.1可知, $\emptyset_1 = \emptyset_2$ 。因此假设不成立,即空集 $\emptyset$ 是唯一的。■

**定义 3.1.4** 如果有一个集合包含所要讨论的全部元素,则把该集合称为**全集**(universal set),记为 $U$ 或 $E$ 。

全集是一个相对的概念,它随所要研究的范围不同而不同。如统计全国人口,则可以把全国的人的集合看作全集,而各省、市范围内的人的集合都是 $E$ 的子集。但是,若统计全省人口,则可以把该省的人的集合看作全集。在任何一个集合论的应用中,所研究集合的元素总是属于某个大集合,它就被称为全集或论域。

有了全集的概念,元素与集合间关系的意义就更明显了,如对于元素 $a$ ,可能有 $a \in A$ 或 $a \notin A$ ,但必有 $a \in E$ 。

显然,空集和全集可分别用谓词公式描述为

$$\emptyset = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\}, E = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$$

**定义 3.1.5** 完全以集合为元素的集合,称为**集类**或**集合族**(family of sets)。

例如,设 $A = \{a, b, c, d\}$ ,令 $A^*$ 是 $A$ 的含3个元素的那些子集构成的集类,则

$$A^* = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

根据定理3.1.2,空集是任意集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$ ;对任意集合 $A, A \subseteq A$ 。一般来说,任意非空集合 $A$ 至少有两个子集,一个是空集 $\emptyset$ ,另一个是它本身 $A$ 。

**【例 3.1.1】** 设 $A = \{a, b, c\}$ ,试求集合 $A$ 的所有子集。

**解** 共有8个子集: $A_0 = \emptyset, A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_3 = \{c\}, A_4 = \{a, b\}, A_5 = \{a, c\}, A_6 = \{b, c\}, A_7 = A = \{a, b, c\}$ 。

**定义 3.1.6** 由集合 $A$ 的全部子集所组成的集类,称为 $A$ 的**幂集**(power set),记为 $\rho(A)$ ,即 $\rho(A) = \{A_i \mid A_i \subseteq A\}$ 。

例如,设 $A = \{a, b, c\}$ ,则 $\rho(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ 。

**定理 3.1.4** 如果有限集 $A$ 有 $n$ 个元素,则其幂集 $\rho(A)$ 有 $2^n$ 个元素,即 $|\rho(A)| = 2^n$ 。

**证** 在 $A$ 中任取一个元素构成的子集共有 $C_n^1$ 个,任取两个元素构成的子集共有 $C_n^2$ 个,以此类推,直至从 $A$ 中取 $n$ 个元素构成的子集共有 $C_n^n$ 个。此外,空集 $\emptyset$ 也是 $A$ 的一个子集,因此,全部子集的数目为

$$|\rho(A)| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$

由二项式定理,有

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^n y^n$$

令 $x = y = 1$ ,得 $2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$ ,故 $|\rho(A)| = 2^n$ 成立。■

下面引进一种编码用来唯一地表示一个有限集合幂集的元素,这种方法称为子集的编码表示法,它将为求一个有限集的幂集带来极大方便。众所周知,一个集合中的元素的排列次序是无关紧要的,但是为了便于在计算机上表示集合,可以给元素编定次序,从而可以用二进制数为下标来确定集合中每一元素的位置。显然,对一个含有 $n$ 个元素的集合 $A$ ,则需要 $n$ 位二进制数作为下标,对 $A$ 的每个子集 $B$ ,若第 $i$ 位上记入1,则该位置对应的元素属

于该子集；否则，该元素不属于该子集。设集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ，再令

$$J = \left\{ i \mid \underbrace{00\dots 0}_{n\text{个}} \leq i \leq \underbrace{11\dots 1}_{n\text{个}} \right\}$$

则  $\rho(A) = \{A_i \mid i \in J\}$ 。例如， $A = \{a, b, c\}$ ，则  $J = \{i \mid 000 \leq i \leq 111\}$ ， $\rho(A) = \{A_i \mid i \in J\}$ ，其中

$$\begin{aligned} A_0 = A_{000} &= \emptyset, & A_1 = A_{001} &= \{c\}, & A_2 = A_{010} &= \{b\}, & A_3 = A_{011} &= \{b, c\}, \\ A_4 = A_{100} &= \{a\}, & A_5 = A_{101} &= \{a, c\}, & A_6 = A_{110} &= \{a, b\}, & A_7 = A_{111} &= \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

把集合  $J$  叫作**加标集合**(indexed set)。显然，可用这种编码方法确定具有  $n$  个元素的集合的各子集。实际上，这种方法与 1.8 节中介绍的求极大项和极小项的方法很相似。

### 习题 3.1

(1) 列出下列集合的全部元素。

- ①  $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 3 < x < 12\}$ 。
- ②  $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \text{ 是偶数}, x < 15\}$ 。
- ③  $C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 4 + x = 3\}$ 。
- ④  $D = \{x \mid x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}, x + y = 10\}$ 。

(2) 用谓词公式法表示下列集合。

- ①  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 。
- ②  $\{\text{能被 } 5 \text{ 整除的整数}\}$ 。
- ③  $\{100, 101, 102, \dots, 200\}$ 。
- ④  $\{a, a^2, a^3, \dots, a^{10}\}$ 。

(3) 判别下列命题是真的还是假的，并简单说明理由。

- ①  $\emptyset \subseteq \emptyset$ 。
- ②  $\emptyset \in \emptyset$ 。
- ③  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 。
- ④  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ 。
- ⑤  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ 。
- ⑥  $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ 。
- ⑦  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ 。
- ⑧  $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ 。

(4) 举出 3 个集合  $A, B, C$ ，使  $A \in B, B \in C$ ，但  $A \notin C$ 。

(5) 对任意集合  $A, B, C$ ，判断下述每个论断是否正确，并论证你的答案。

- ① 若  $A \in B, B \subseteq C$ ，则  $A \in C$ 。
- ② 若  $A \in B, B \subseteq C$ ，则  $A \subseteq C$ 。
- ③ 若  $A \subseteq B, B \in C$ ，则  $A \in C$ 。
- ④ 若  $A \subseteq B, B \in C$ ，则  $A \subseteq C$ 。

(6) 求下列集合的幂集。

- ①  $\{a\}$ 。
- ②  $\{\{a\}\}$ 。

③  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 。

(7) 设  $A = \{a, \{a\}\}$ , 下列各式成立吗?

①  $\{a\} \in \rho(A)$ 。

②  $\{a\} \subseteq \rho(A)$ 。

③  $\{\{a\}\} \in \rho(A)$ 。

④  $\{\{a\}\} \subseteq \rho(A)$ 。

(8) 设  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ , 在子集的编码表示法中, 由  $A_6, A_{21}$  所表示的  $A$  的子集是什么? 子集  $\{a_2, a_3\}$  和  $\{a_1, a_4, a_5\}$  应如何表示?

## 3.2 集合的运算

本节将介绍集合的几种基本运算。集合运算是指按照一定的规则对一个或多个集合进行运算而产生一个新的集合。这几种基本运算是: 交运算  $A \cap B$ ; 并运算  $A \cup B$ ; 差运算  $A - B$ ; 补运算  $\sim A$ ; 对称差运算  $A \oplus B$ 。下面将给出集合的 5 种基本运算规则, 并用一种称为文氏图或文恩图(Venn diagram)的方法来直观地表示这 5 种基本运算的运算结果。值得注意的是, 我们总是在一定的“范围”内讨论问题, 这个“范围”指的就是前面介绍的全集, 它包含了所要讨论的全部元素, 至于全集究竟是什么并不重要。

**定义 3.2.1** 设  $A$  和  $B$  是两个任意集合, 全集为  $E$ , 则:

(i)  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ , 叫作  $A$  和  $B$  的交集(intersection);

(ii)  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ , 叫作  $A$  和  $B$  的并集(union);

(iii)  $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ , 叫作  $A$  和  $B$  的差集(difference), 又称  $B$  对  $A$  的相对补集(the relative complement);

(iv)  $\sim A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$ , 叫作  $A$  的绝对补集(complement), 简称补集;

(v)  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ , 叫作  $A$  和  $B$  的对称差集(symmetric difference)或环和(cycle sum)。

全集的引入使我们得以利用图示的方法来研究问题, 所用的图称为文氏图。文氏图是一种利用平面上点的集合构成的对集合的图示。全集  $E$  用一个矩形的内部表示, 其他的集合( $E$  的子集)则用矩形内的圆面来表示。下面给出上述 5 种基本运算结果的文氏图表示, 其阴影部分表示运算结果, 如图 3.2.1 所示。

**【例 3.2.1】** 设  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 5\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ , 则

$$A \cap B = \{2\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 4, 5\},$$

$$A - B = \{1, 5\}, \quad B - A = \{4\},$$

$$\sim A = \{0, 3, 4\}, \quad \sim B = \{0, 1, 3, 5\}, \quad A \oplus B = \{1, 4, 5\}.$$

**定理 3.2.1** 设  $A, B$  和  $C$  是任意集合, 则有:

(i)  $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ ;

(ii)  $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ ;

(iii)  $A - B = A \cap (\sim B)$ ;

(iv)  $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$ ;

(v)  $A \subseteq B, A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$ 。

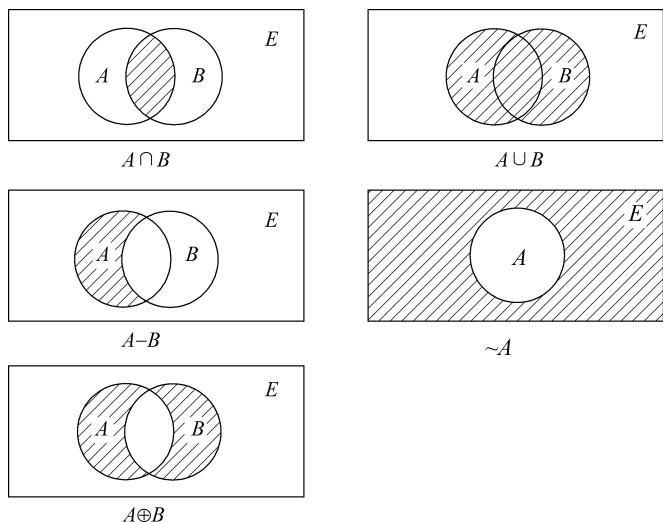


图 3.2.1 5 种运算的文氏图表示

这个定理的证明很容易,下面仅给出(iii)式的证明,其他留给读者练习。

**证** 要证明  $A - B = A \cap \sim B$ , 即证明  $A - B \subseteq A \cap (\sim B)$ , 且  $A \cap (\sim B) \subseteq A - B$ 。

先证明  $A - B \subseteq A \cap (\sim B)$ 。对任意的  $x \in A - B$ , 有

$$x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \in \sim B \Rightarrow x \in A \cap (\sim B)$$

即

$$A - B \subseteq A \cap (\sim B)$$

再证明  $A \cap (\sim B) \subseteq A - B$ 。对任意的  $x \in A \cap (\sim B)$ , 有

$$x \in A \wedge x \in (\sim B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B$$

故

$$A \cap (\sim B) \subseteq A - B$$

所以,  $A - B = A \cap (\sim B)$ 。 ■

$A - B = A \cap (\sim B)$  是一个重要的公式,在集合的运算中经常用到,它的意义在于将相对补运算转换为绝对补和交运算。为书写方便,将  $A \cap (\sim B)$  简写为  $A \cap \sim B$ 。

下面给出各运算的性质。

(1) 交运算的性质。

- |                                             |       |
|---------------------------------------------|-------|
| ① $A \cap A = A$ 。                          | (等幂律) |
| ② $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。          | (零律)  |
| ③ $A \cap E = A$ 。                          | (同一律) |
| ④ $A \cap B = B \cap A$ 。                   | (交换律) |
| ⑤ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。 | (结合律) |

若  $A$  和  $B$  没有共同的元素,则称  $A$  和  $B$  不相交(disjoint),即  $A \cap B = \emptyset$ 。

(2) 并运算的性质。

- |                            |       |
|----------------------------|-------|
| ① $A \cup A = A$ 。         | (等幂律) |
| ② $A \cup \emptyset = A$ 。 | (同一律) |
| ③ $A \cup E = E$ 。         | (零律)  |
| ④ $A \cup B = B \cup A$ 。  | (交换律) |

⑤  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ . (结合律)

**定理 3.2.2** 设  $A, B$  和  $C$  是任意集合, 则有:

(i)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;

(ii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . (分配律)

**证** (ii) 对任意的  $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in \{x | x \in A \vee x \in (B \cap C)\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C\}$   
 $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

再由  $x$  的任意性可知,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  成立。

(i) 式的证明与此类似, 请读者自己完成。 ■

**定理 3.2.3** 设  $A$  和  $B$  是任意集合, 则有:

(i)  $A \cup (A \cap B) = A$ ;

(ii)  $A \cap (A \cup B) = A$ . (吸收律)

**证** (i)  $A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B) = A \cap (E \cup B) = A \cap E = A$ .

(ii) 式的证明与此类似, 请读者自己完成。 ■

(3) 补运算的性质。

①  $\sim(\sim A) = A$ 。

②  $\sim E = \emptyset$ 。

③  $A \cup \sim A = E$ 。

④  $A \cap \sim A = \emptyset$ 。

**定理 3.2.4** (i)  $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ ;

(ii)  $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$ . (德·摩根律)

**证** (i) 对任意的  $x \in \sim(A \cup B) \Leftrightarrow x \in \{x | x \in \sim(A \cup B)\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | x \in E \wedge x \notin (A \cup B)\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | x \in E \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | (x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \notin B)\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | x \in \sim A \wedge x \in \sim B\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \{x | x \in \sim A \cap \sim B\}$   
 $\Leftrightarrow x \in \sim A \cap \sim B$

再由  $x$  的任意性可知,  $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ 。

(ii) 同理可证, 请读者自己完成。 ■

**定理 3.2.5** 设  $A, B$  和  $C$  是任意集合, 则有  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ 。

**证** 左  $= A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \sim C) = A \cap B \cap \sim C$

右  $= (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap \sim(A \cap C)$

$= (A \cap B) \cap (\sim A \cup \sim C) = (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C)$

$= \emptyset \cup (A \cap B \cap \sim C) = A \cap B \cap \sim C$

所以,原式成立。 ■

**定理 3.2.6** 设任意两个集合  $A, B$ , 若  $A \subseteq B$ , 则:

(i)  $\sim B \subseteq \sim A$ ;

(ii)  $(B - A) \cup A = B$ 。

**证** (ii)  $(B - A) \cup A = (B \cap \sim A) \cup A$

$$= (B \cup A) \cap (\sim A \cup A) = (B \cup A) \cap E$$

$$= B \cup A$$

$$= B$$

(条件  $A \subseteq B$ )

(i) 式的证明请读者自己完成。 ■

(4) 对称差的性质。

$$\textcircled{1} A \oplus B = B \oplus A.$$

(交换律)

$$\textcircled{2} (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

(结合律)

$$\textcircled{3} A \oplus \emptyset = A.$$

$$\textcircled{4} A \oplus A = \emptyset.$$

**【例 3.2.2】** 证明:  $A \subseteq B$  当且仅当  $A \cup B = B$ , 或  $A \cap B = A$ 。

**证** 在此只证明  $A \subseteq B$  当且仅当  $A \cup B = B$ 。

(必要性) 已知  $A \subseteq B$ , 证明  $A \cup B = B$ 。先证  $A \cup B \subseteq B$ 。对任意的  $x \in A \cup B$ , 有

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\Rightarrow x \in B \vee x \in B$$

(条件  $A \subseteq B$ )

$$\Leftrightarrow x \in B$$

即  $A \cup B \subseteq B$ 。

再证  $B \subseteq A \cup B$ 。这是显然的。

综上, 知  $A \cup B = B$ 。

(充分性) 已知  $A \cup B = B$ , 证明  $A \subseteq B$ 。对任意的  $x \in A$ , 有

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow x \in B$$

(条件  $A \cup B = B$ )

所以,  $A \subseteq B$ 。

综上, 知  $A \subseteq B$  当且仅当  $A \cup B = B$ 。 ■

为了引用时方便起见, 下面列出一些常用的集合基本恒等式, 并附加上命题演算中与其相对应的等价式, 从中会看到命题演算与集合代数之间的联系与相似之处。由于这些基本恒等式描述了它所包含的运算的某些性质, 因此也称为集合定律。

$C_1$ : 等幂律

$$A \cup A = A$$

$$(P \vee P \Leftrightarrow P)$$

$$A \cap A = A$$

$$(P \wedge P \Leftrightarrow P)$$

$C_2$ : 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$((P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R))$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$((P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R))$$

$C_3$ : 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$C_4$ : 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$C_5$ : 同一律

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap E = A$$

$C_6$ : 零律

$$A \cup E = E$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$C_7$ : 补余律

$$A \cup \sim A = E$$

$$A \cap \sim A = \emptyset$$

$C_8$ : 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$C_9$ : 德·摩根律

$$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$$

$$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

$C_{10}$ : 双重否定律

$$\sim (\sim A) = A$$

$C_{11}$ :  $\sim \emptyset = E$

$$\sim E = \emptyset$$

此外,还有一些常用的恒等式和关系式。

$$C_{12}: A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

$$C_{13}: A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

$$C_{14}: A - B \subseteq A$$

$$C_{15}: A \oplus B \subseteq A \cup B$$

$$C_{16}: A - B = A \cap \sim B$$

$$C_{17}: A - B = A - (A \cap B)$$

$$C_{18}: A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$$

$$C_{19}: (A \cup B \neq \emptyset) \Rightarrow (A \neq \emptyset) \vee (B \neq \emptyset)$$

$$C_{20}: (A \cap B \neq \emptyset) \Rightarrow (A \neq \emptyset) \wedge (B \neq \emptyset)$$

$$C_{21}: A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$$C_{22}: A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

} 传递性

传递性定律的证明并不困难,下面只以  $C_{17}$  和  $C_{21}$  式为例来说明一般的证明方法。

证  $C_{17}: A - B = A - (A \cap B)$

(方法 1) 对任意的  $x \in A - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A \wedge x \notin (A \cap B)\}$

$$(P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

$$(P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

$$(P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P)$$

$$(P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P)$$

$$(P \vee F \Leftrightarrow P)$$

$$(P \wedge T \Leftrightarrow P)$$

$$(P \vee T \Leftrightarrow T)$$

$$(P \wedge F \Leftrightarrow F)$$

$$(P \vee \neg P \Leftrightarrow T)$$

$$(P \wedge \neg P \Leftrightarrow F)$$

$$(P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P)$$

$$(P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P)$$

$$(\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q)$$

$$(\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q)$$

$$(\neg \neg P \Leftrightarrow P)$$

$$(\neg F \Leftrightarrow T)$$

$$(\neg T \Leftrightarrow F)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\} \\
&\Leftrightarrow x \in \{x \mid (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\} \\
&\Leftrightarrow x \in \{x \mid F \vee (x \in A \wedge x \notin B)\} \\
&\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \\
&\Leftrightarrow x \in A - B
\end{aligned}$$

再由  $x$  的任意性可知,  $A - B = A - (A \cap B)$  成立。

$$\begin{aligned}
(\text{方法 2}) \quad A - (A \cap B) &= A \cap \sim(A \cap B) \\
&= A \cap (\sim A \cup \sim B) \\
&= (A \cap \sim A) \cup (A \cap \sim B) = \emptyset \cup (A \cap \sim B) \\
&= A \cap \sim B = A - B
\end{aligned}$$

证  $C_{21}: A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

(方法 1) 任意  $x \in A$ , 因为  $A \subseteq B$ , 所以  $x \in B$ ; 又因为  $B \subseteq C$ , 所以由  $x \in B$  可知, 必有  $x \in C$ 。由此可得, 任意  $x \in A$ , 均有  $x \in C$ , 故  $A \subseteq C$  成立。

(方法 2) 先将  $C_{21}$  式符号化, 可得谓词逻辑的推理形式, 即

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B), (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in C) \Rightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in C)$$

|                                                |                    |
|------------------------------------------------|--------------------|
| (1) $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ | P                  |
| (2) $y \in A \rightarrow y \in B$              | US, (1)            |
| (3) $(\forall x)(x \in B \rightarrow x \in C)$ | P                  |
| (4) $y \in B \rightarrow y \in C$              | US, (3)            |
| (5) $y \in A \rightarrow y \in C$              | T, (2), (4), 假言三段论 |
| (6) $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in C)$ | UG, (5)            |

故  $C_{21}$  结论成立。

上面已经定义过集合的运算, 借助这些运算, 可以由已知集合构造新的集合。大写字母被用来表示确定的集合, 也用这些字母作为集合变量, 这种习惯类似于命题演算中的用法。例如, 大写字母  $A, B, C, \dots$  用作集合变量, 它们未必是集合, 而可以是集合公式。集合运算还能够扩充到集合公式, 因而  $A \cup B, A \cap B, \sim A$  等全是集合公式, 任何包含有集合变量, 运算符  $\cap, \cup, \sim$  和括号的合式字符串都是一集合公式, 为了简单起见把它们也叫集合。

事实上, 以确定的集合去代替变量, 就从一个集合公式得到一个集合。当出现于两个集合公式中的集合变量一旦用任意一个集合去代替后, 如果它们作为集合是相等的, 则说这两个集合公式是相等的。由于集合公式的相等不依赖于去代替那些变量的集合, 因此这些等式就称为集合恒等式。某些基本恒等式描述所含运算的一定性质并给予专门名称。这些性质描述一种代数, 称为**集合代数**(sets algebra)。

与命题代数一样, 上面所列出的恒等式不全是独立的, 某些恒等式可以由假定一些别的恒等式而推导出来。然而, 我们已经列出了这些能显示某些基本和有用性质的全部恒等式。

另外, 由上面列出的恒等式可以看到, 除  $C_{10}$  外都是成对出现的。这种成对出现的原因类似于命题代数中给出的对偶原理, 在集合代数的情形下也成立。事实上, 命题代数和集合代数都是一种称为**布尔代数**(Boolean algebra)的抽象代数的特殊情形。这个事实也说明了为什么在命题演算中的运算符和集合论中的运算符间能看到相似性。

## 习题 3.2

(1) 设  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 5\}$ ,  $C = \{2, 4\}$ , 求下列集合。

①  $A \cap \sim B$ 。

②  $A \cup \sim B$ 。

③  $A - B$ 。

④  $B \oplus C$ 。

⑤  $\sim A \cup \sim C$ 。

(2) ① 若  $A \cup B = A \cup C$ , 一定有  $B = C$  吗?

② 若  $A \cap B = A \cap C$ , 一定有  $B = C$  吗?

③ 若  $A \oplus B = A \oplus C$ , 一定有  $B = C$  吗? 论证你的答案。

(3) 设  $A, B, C$  是任意 3 个集合, 证明:

①  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ 。

②  $(A - B) - C = (A - C) - B$ 。

③  $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ 。

(4) 设  $A, B, C$  是任意 3 个集合, 下述 4 个式子在什么条件下成立?

①  $(A - B) \cup (A - C) = A$ 。

②  $(A - B) \cup (A - C) = \emptyset$ 。

③  $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$ 。

④  $(A - B) \oplus (A - C) = \emptyset$ 。

(5) 若  $A \cap C \subseteq B \cap C$ , 且  $A \cap \sim C \subseteq B \cap \sim C$ , 则  $A \subseteq B$ 。请证明之。

(6) 证明:  $C \subseteq A$  当且仅当  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ 。

(7) 设  $A = \{a, b, \{a, b\}, \emptyset\}$ , 求出下列各式:

①  $A - \{a, b\}$ 。

②  $A - \emptyset$ 。

③  $A - \{\emptyset\}$ 。

④  $\{\{a, b\}\} - A$ 。

(8) 设  $A, B, C, D$  是任意 4 个集合, 试证明:

①  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ 。

②  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ 。

③  $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$ 。

④  $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$ 。

## 3.3 包含排斥原理

本节主要讨论有限集的元素计数问题。首先给出集合计数问题的基本关系式, 然后给出包含排斥原理以及它在实际中的应用。

根据集合运算的定义, 显然以下各式成立。

- (1)  $|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$ 。
- (2)  $|A_1 \cap A_2| \leq \min\{|A_1|, |A_2|\}$ 。
- (3)  $|A_1 - A_2| \geq |A_1| - |A_2|$ 。
- (4)  $|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$ 。

其中,等式(不等式)左边出现的运算符都是集合中的运算符,右边出现的运算符“+”或“-”都是普遍意义上的加法和减法。

**定理 3.3.1** 设  $A, B$  为有限集,其元素个数分别为  $|A|$  和  $|B|$ ,则有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

**证** 当  $|A \cap B| = \emptyset$  时,显然有  $|A \cup B| = |A| + |B|$ ,此时结论成立。

当  $|A \cap B| \neq \emptyset$  时,  $|A| = |A \cap \sim B| + |A \cap B|$ ,  $|B| = |\sim A \cap B| + |A \cap B|$ ,

$$|A| + |B| = |A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + 2|A \cap B|, \quad (1)$$

$$|A \cup B| = |A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + |A \cap B| \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可得

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \blacksquare$$

此定理被称为**包含排斥原理**(inclusion-exclusion principle)。此原理在实际中具有广泛的应用。

**【例 3.3.1】** 某班 30 名学生中选学英语的有 7 人,选学日语的有 5 人,两科都选的有 3 人。问两科都不选的有多少人?

**解** 用  $A$  表示选学英语的学生集合,  $B$  表示选学日语的学生集合。显然,  $|A| = 7$  (人),  $|B| = 5$  (人),  $|A \cap B| = 3$  (人), 则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 7 + 5 - 3 = 9 \text{ (人)}$$

即至少选学一门外语的人数为 9 人,两科都不选的人数为

$$|\sim(A \cup B)| = |E| - |A \cup B| = 30 - 9 = 21 \text{ (人)}$$

**推论 1** 设  $A, B, C$  是任意有限集,则有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**【例 3.3.2】** 某校举行数学、物理、英语 3 科竞赛,某班 30 名学生中有 15 人参加了数学竞赛,8 人参加了物理竞赛,6 人参加了英语竞赛,并且有 3 人同时参加了这 3 种竞赛,问最少有多少人一科竞赛都没有参加?

**解** 用  $A_1$  表示参加数学竞赛的学生集合;  $A_2$  表示参加物理竞赛的学生集合;  $A_3$  表示参加英语竞赛的学生集合。显然,有  $|A_1| = 15$  (人),  $|A_2| = 8$  (人),  $|A_3| = 6$  (人),  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$  (人)。由推论 1 可知

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\ &\quad - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

因为

$$|A_1 \cap A_2| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

$$|A_1 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

$$|A_2 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

所以

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \leq 15 + 8 + 6 - 3 \times 3 + 3 = 23 (\text{人})$$

即全班 30 人中最多有 23 人参加了竞赛活动,因此最少有 7 人没有参加任何一科的竞赛。

**推论 2** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为有限集合,其元素个数分别为  $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ ,则有

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ & \quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

**【例 3.3.3】** 试求出 1~250 之间能被 2、3、5、7 任何一数整除的整数个数。

**解** 用  $A_1, A_2, A_3$  和  $A_4$  分别表示 1~250 间能被 2、3、5 和 7 整除的整数集合,于是  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$  表示 1~250 间至少能被 2、3、5 和 7 之一整除的整数集合,其个数  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$  即为所求。按包含排斥原理的推论 2 展开,得

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= \sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ & \quad (-1)^{4-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - \\ & \quad |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \\ & \quad |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

显然,  $A_1 \cap A_2$  表示能同时被 2 和 3 整除的整数集合;  $A_1 \cap A_3$  表示能同时被 2 和 5 整除的整数集合; 其余类推。于是

$$\begin{aligned} |A_1| &= \left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor = 125, & |A_2| &= \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor = 83, & |A_3| &= \left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor = 50, & |A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor = 35 \\ |A_1 \cap A_2| &= \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3} \right\rfloor = 41, & |A_1 \cap A_3| &= \left\lfloor \frac{250}{2 \times 5} \right\rfloor = 25, & |A_1 \cap A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{2 \times 7} \right\rfloor = 17 \\ |A_2 \cap A_3| &= \left\lfloor \frac{250}{3 \times 5} \right\rfloor = 16, & |A_2 \cap A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{3 \times 7} \right\rfloor = 11, & |A_3 \cap A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{5 \times 7} \right\rfloor = 7 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 8, & |A_1 \cap A_2 \cap A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 5 \\ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 3, & |A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 2 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1 \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25 - 17 \\ & \quad - 16 - 11 - 7 + 8 + 5 + 3 + 2 - 1 = 193 \end{aligned}$$

即 1~250 间能被 2、3、5、7 中任何一个整除的整数有 193 个。

**注:** 这里的  $\lfloor x \rfloor$  表示小于或等于  $x$  的最大整数。

### 习题 3.3

(1) 在  $1 \sim 300$  的整数中,有多少个数同时不能被  $3, 5, 7$  整除? 有多少个数能被  $3$  整除,但不能被  $5$  和  $7$  整除?

(2) 某足球队有运动服  $38$  件,篮球队有运动服  $15$  件,棒球队有运动服  $20$  件,3 个队队员总数  $58$  人,且其中只有  $3$  人同时参加 3 个队,试求同时参加两个队的队员共有几个人?

(3) 根据调查,某高校在读学生阅读书籍的情况如下:  $60\%$  读甲类书籍,  $50\%$  读乙类书籍,  $50\%$  读丙类书籍,  $30\%$  读甲与乙类书籍,  $30\%$  读乙与丙类书籍,  $30\%$  读甲与丙类书籍,  $10\%$  读 3 类书籍。问:

① 阅读两类书籍学生的百分比?

② 不读任何书籍学生的百分比?

(4) ① 一个班里有  $50$  名学生,在第一次考试中有  $26$  人得到成绩  $A$ ,在第二次考试中有  $21$  人得到成绩  $A$ 。如果两次考试中都没有得到成绩  $A$  的学生是  $17$  人,那么,有多少学生在两次考试中都得到成绩  $A$ ?

② 如果在两次考试中,成绩是  $A$  的学生数相等。在两次考试中,恰好得到一次  $A$  的学生数为  $40$ ,而两次考试中都没有得到成绩  $A$  的学生数为  $4$ ,那么,仅在第一次考试中得到成绩  $A$  的学生数是多少? 仅在第二次考试中得到成绩  $A$  的学生数是多少? 两次考试中都得到成绩  $A$  的学生数是多少?

### 3.4 自然数与数学归纳法

众所周知,最古老而又最基本的数学系统就是自然数系统。本节中先给出所谓后继集合的概念,并从空集与后继集合的概念着手,把自然数一个一个地具体构造出来,然后研究自然数集合的某些重要性质(公理)。这些公理之一使我们能构成数学归纳法原理。

**定义 3.4.1** 设  $A$  为任意集合,则称  $A \cup \{A\}$  为  $A$  的后继集合(successor of a set),并记为  $A^+$ ,即  $A^+ = A \cup \{A\}$ 。

**【例 3.4.1】**  $\{a, b\}^+ = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\},$

$$\emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\},$$

$$(\emptyset^+)^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$((\emptyset^+)^+)^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

构造自然数的方法很多,常采用的方法是冯·诺依曼(John von Neumann)给出的方案:

$$0 = \emptyset,$$

$$1 = 0^+ = \{\emptyset\},$$

$$2 = 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$

$\vdots$

这样就得到了集合 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , 其中每个元素都是前一个元素的后继集合, 除了元素 0 被假定存在外。

这样的讨论可以概括为: 自然数集合能从下列公理, 即所谓皮亚诺(Peano)公理而得到。

- (1)  $0 \in \mathbf{N}$  (其中  $0 = \emptyset$ )。
- (2) 如果  $n \in \mathbf{N}$ , 则  $n^+ \in \mathbf{N}$ , 其中  $n^+ = n \cup \{n\}$ 。
- (3) 如果一个子集  $S \subseteq \mathbf{N}$  具有性质:
  - ①  $0 \in S$ 。
  - ② 如果  $n \in S$ , 则  $n^+ \in S$ , 则  $S = \mathbf{N}$ 。

性质(3)通称为极小性质, 它断言满足①和②的极小集合是自然数集合。把  $n^+$  写成  $n+1$  是方便的, 但是不一定要把“+”作为  $\mathbf{N}$  上的一个运算。

通常称皮亚诺公理的性质(3)为归纳原理, 因为它是归纳法的基础。数学归纳法(mathematical induction), 简称归纳法, 是数学中常用的重要证明方法之一。它有两种基本形式——第一数学归纳法和第二数学归纳法。下面就来讨论这两种基本形式及其具体使用方法。

**定理 3.4.1** (第一数学归纳法, incomplete induction) 设  $P(n)$  是遍及自然数集合  $\mathbf{N}$  的任何性质的谓词, 如果能证明:

- (1) 基础步(basis step), 即  $P(0)$  为真;
- (2) 归纳步(inductive step), 即如果  $P(n)$  为真, 则  $P(n+1)$  也为真。

那么对一切  $n \in \mathbf{N}$ ,  $P(n)$  皆为真。

第一数学归纳法的应用可有两种形式, 用谓词形式表示如下。

- (1)  $P(0) \wedge (\forall n)(P(n) \rightarrow P(n+1)) \Rightarrow (\forall n)P(n)$ 。
- (2)  $P(n_0) \wedge (\forall n)(P(n) \rightarrow P(n+1)) \Rightarrow (\forall n)(n \geq n_0 \rightarrow P(n))$ 。

这里的  $n_0$  是某一正整数,  $P(n_0)$  为归纳基础。

**【例 3.4.2】** 证明:  $n^3 + 2n (n \in \mathbf{N})$  可被 3 整除。

**证** 设谓词  $P(n): n^3 + 2n = 3k (k \text{ 为某一整数})$ 。

基础步:  $P(0)$  为  $0^3 + 2 \times 0 = 3 \times 0 (k \text{ 取 } 0)$ , 显然,  $P(0)$  为真, 即当  $n=0$  时,  $n^3 + 2n$  可被 3 整除。

归纳步: 设任意  $m \in \mathbf{N}$ , 假设  $P(m)$  为真, 即  $m^3 + 2m = 3k$  成立, 则

$$\begin{aligned} (m+1)^3 + 2(m+1) &= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 2m + 2 \\ &= m^3 + 2m + 3m^2 + 3m + 3 = 3k + 3(m^2 + m + 1) \\ &= 3(k + m^2 + m + 1) = 3k' \end{aligned}$$

其中  $k' = k + m^2 + m + 1$ , 故  $P(m+1)$  也为真。

由归纳假设原理可知, 对任意的  $n \in \mathbf{N}$ ,  $P(n)$  为真, 得证。

**【例 3.4.3】** 证明:  $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ 。

**证** 设  $P(n): 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ 。

基础步: 对于  $P(1)$ ,  $1=1^2$  为真, 即  $n=1$  时结论成立。

归纳步: 对任意的  $m \in \mathbf{N}$ , 假设  $P(m)$  为真, 即  $1+3+5+\dots+(2m-1)=m^2$  成立, 则

$$\begin{aligned}
 1+3+5+\cdots+(2m-1)+(2(m+1)-1) &= 1+3+5+\cdots+(2m+1) \\
 &= 1+3+5+\cdots+(2m-1)+(2m+1) \\
 &= m^2+2m+1=(m+1)^2
 \end{aligned}$$

故  $P(m+1)$  也为真。

由归纳假设原理可知,对一切  $n \in \mathbf{N}$  且  $n \geq 1$ ,  $P(n)$  为真,得证。

**定理 3.4.2** (第二数学归纳法, complete induction) 设  $P(n)$  为遍及自然数集合  $\mathbf{N}$  的任何性质的谓词。如果能证明:

(1) 基础步, 即  $n_0 \in \mathbf{N}$ ,  $P(n_0)$  为真;

(2) 归纳步, 即对任意  $m > n_0$ , 若对  $\forall k \in \mathbf{N}$ , 且  $n_0 \leq k < m$ , 有  $P(k)$  为真,  $P(m)$  亦为真。

则对任意的  $n > m$  时,  $P(n)$  为真。

**【例 3.4.4】** 斐波那契(Fibonacci)数列定义为

$$F_0 = 0; F_1 = 1; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \in \mathbf{I}_+$$

证明: 若  $n \in \mathbf{I}_+$ , 则

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \leq F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

证 (用第二数学归纳法)

基础步: 当  $n=1$  时,  $F_1=1$ , 显然有下式成立

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \leq F_1 \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

归纳步: 对任意  $m > 1$ , 假设  $k \in \mathbf{N}$  且  $1 \leq k < m$  时, 有

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2} \leq F_k \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

成立, 证明当  $k=m$  时, 上式也成立。

因为

$$\begin{aligned}
 F_m &= F_{m-1} + F_{m-2} \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-3} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-4} \\
 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-4} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-4} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}\right) \\
 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-4} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \\
 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-4} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-4} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2}
 \end{aligned}$$

另一方面, 有

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-3} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-3} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-3} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-3} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}$$

由上面推导结果可知,  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2} \leq F_m \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}$  成立。

由归纳假设可知, 对一切  $n \in \mathbf{N}$ , 原式成立, 得证。

使用数学归纳法应注意以下几点。

(1) 验证  $P(0)$  成立, 这是使用数学归纳法的前提之一。

(2) 对任意  $n \in \mathbf{N}$ , 假设  $P(n)$  成立去推演出  $P(n+1)$  也成立, 这个推演是必要的, 这是使用数学归纳法的前提之二。

(3) 在证明上述两个前提之后, 就可依据数学归纳法, 得到对一切自然数都有  $P(n)$  成立的结论。

另外, 在实际使用数学归纳法时, 对于初始条件  $P(0)$  可做以下推广, 从而使结论也有所改变, 即

(1) 对某一自然数  $n_0$ , 先验证  $P(n_0)$  成立。

(2) 再证明对任意自然数  $n, n_0 \leq n$ , 假设  $P(n)$  成立, 推演出  $P(n+1)$  成立。

(3) 于是有对一切自然数  $n (n_0 \leq n)$ , 都有  $P(n)$  成立。

### 习题 3.4

(1) 对所有  $n \geq 1$ , 证明  $2^n \times 2^n - 1$  能被 3 整除。

(2) 用归纳法证明:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

(3) 证明:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(4) 证明:

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(5) 证明:

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

(6) 用第二数学归纳法证明: 若  $n \in \mathbf{I}_+$ , 且  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  都是正数, 则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n}$$

且等号仅在  $n=1$  或  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$  时成立。

### 3.5 笛卡儿乘积

众所周知, 集合中元素的次序是无关紧要的, 即  $\{a, b\} = \{b, a\}$ 。常把这种仅由两个元素  $a$  和  $b$  组成的集合  $\{a, b\}$  称为偶集。因为这种偶集与元素  $a$  和  $b$  的次序无关, 所以也称为

无序偶集,简称无序偶。本节将讨论另一种更常用的偶集,它不仅与含有的元素  $a$  和  $b$  有关,而且还与  $a$  和  $b$  出现的次序有关。为了强调次序性,常把这种偶集称为有序对或序偶。

首先给出序偶的定义,然后对序偶的概念加以推广去定义  $n$  重序元或多元有序组。

**定义 3.5.1** 由两个具有给定固定次序的客体组成的序列,称为**序偶**(ordered pair),记为  $\langle x, y \rangle$ 。其中,  $x$  被看作第一个元素,  $y$  被看作第二个元素。

**【例 3.5.1】** 在笛卡儿坐标系中的二维平面上的一个点的坐标  $\langle x, y \rangle$  就是一个序偶,如图 3.5.1 所示。

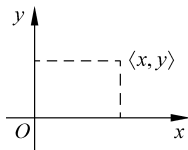


图 3.5.1 序偶表示图

显然,坐标  $\langle 1, 2 \rangle$  和  $\langle 2, 1 \rangle$  表示了平面上两个不同的点,因此  $\langle 1, 2 \rangle \neq \langle 2, 1 \rangle$ 。

**定义 3.5.2** 给定两个序偶  $\langle a, b \rangle$  和  $\langle c, d \rangle$ ,  $\langle a, b \rangle$  与  $\langle c, d \rangle$  是**相等的**(equal),当且仅当  $a = c$  且  $b = d$ ,即

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

有了序偶的概念,下面将用递推的方式去定义  $n$  重序元。

**定义 3.5.3** 按递推方式,  $n$  重序元的定义如下。

(i) **三重序元**(ordered triple)是个序偶,它的第一个元素本身也是个序偶,记为  $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ ,简记为  $\langle x, y, z \rangle$ 。

(ii) **四重序元**(ordered 4-tuples)是个序偶,它的第一个元素本身是个三重序元,记为  $\langle \langle x, y, z \rangle, w \rangle$ ,简记为  $\langle x, y, z, w \rangle$ 。

(iii)  **$n$  重序元**(ordered  $n$ -tuples)是个序偶,它的第一个元素本身是个  $n-1$  重序元,记为  $\langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$ ,简记为  $\langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle$ 。

根据  $n$  重序元的定义可知,下式成立,即

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle &= \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle = \langle \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-2} \rangle, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle \\ &= \dots = \langle \langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle \dots \rangle, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle \end{aligned}$$

同理,两个  $n$  重序元相等,可以描述为

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \Leftrightarrow (x_1 = a_1) \wedge (x_2 = a_2) \wedge \dots \wedge (x_n = a_n)$$

应该指出的是,一个序偶  $\langle a, b \rangle$  的元素可以取自不同的集合。如果第一个元素取自集合  $A$ ,第二个元素取自集合  $B$ ,就可以得到若干个不同的序偶。这些序偶的集合描述了集合  $A$  和  $B$  的一个特征,称为笛卡儿乘积。它在关系与函数两章中有着重要的应用。

**定义 3.5.4** 设  $A, B$  为任意集合,则把所有这样的序偶  $\langle x, y \rangle$  (其中  $x \in A, y \in B$ ) 组成的集合,称为  $A$  和  $B$  的**笛卡儿乘积**(Cartesian product),记为  $A \times B$ ,即

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

**【例 3.5.2】** 设  $A = \{1, 2\}, B = \{\alpha, \beta\}, C = \{a\}, D = \emptyset$ ,求

$$A \times B, B \times A, A \times C, A \times D, A \times A, (A \times B) \cap (B \times A)$$

解  $A \times B = \{\langle 1, \alpha \rangle, \langle 1, \beta \rangle, \langle 2, \alpha \rangle, \langle 2, \beta \rangle\},$

$$B \times A = \{\langle \alpha, 1 \rangle, \langle \alpha, 2 \rangle, \langle \beta, 1 \rangle, \langle \beta, 2 \rangle\},$$

$$A \times C = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle\},$$

$$A \times D = \emptyset,$$

$$A \times A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\},$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset.$$

显然,  $A \times B \neq B \times A$ , 即笛卡儿乘积不满足交换律。

**【例 3.5.3】** 设  $A = \{1, 2\}, B = \{\alpha, \beta\}, C = \{a\}$ , 求  $(A \times B) \times C, A \times (B \times C)$ 。

解 由例 3.5.2 可知

$$(A \times B) \times C = \{\langle \langle 1, \alpha \rangle, a \rangle, \langle \langle 1, \beta \rangle, a \rangle, \langle \langle 2, \alpha \rangle, a \rangle, \langle \langle 2, \beta \rangle, a \rangle\}$$

$$A \times (B \times C) = \{1, 2\} \times \{\langle \alpha, a \rangle, \langle \beta, a \rangle\}$$

$$= \{\langle 1, \langle \alpha, a \rangle \rangle, \langle 1, \langle \beta, a \rangle \rangle, \langle 2, \langle \alpha, a \rangle \rangle, \langle 2, \langle \beta, a \rangle \rangle\}$$

因为  $\langle \langle 1, \alpha \rangle, a \rangle$  是三重序元, 而  $\langle 1, \langle \alpha, a \rangle \rangle$  是二重序元,  $\langle \langle 1, \alpha \rangle, a \rangle \neq \langle 1, \langle \alpha, a \rangle \rangle$ , 故  $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ , 即笛卡儿乘积不满足结合律。

**定理 3.5.1** 设  $A, B, C, D$  为任意非空集合, 则  $A \times B \subseteq C \times D$ , 当且仅当  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ 。

**证** (必要性) 若  $A \times B \subseteq C \times D$ , 证明  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ 。对任意的  $x \in A, y \in B$ , 有  $\langle x, y \rangle \in A \times B$ 。因为  $A \times B \subseteq C \times D$ , 所以  $\langle x, y \rangle \in C \times D$ , 得  $x \in C, y \in D$ 。由  $x, y$  的任意性, 知  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$  成立。

(充分性) 若  $A \subseteq C$  且  $B \subseteq D$ , 证明  $A \times B \subseteq C \times D$ 。对任意的  $\langle x, y \rangle \in A \times B$ , 则  $x \in A, y \in B$ 。因为  $A \subseteq C, B \subseteq D$ , 所以  $x \in C, y \in D$ , 得  $\langle x, y \rangle \in C \times D$ 。由  $\langle x, y \rangle$  的任意性, 知  $A \times B \subseteq C \times D$  成立。 ■

**定理 3.5.2** 设  $A, B, C$  为任意集合, 则:

$$(i) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$

$$(ii) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$(iii) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

$$(iv) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

$$(v) A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C);$$

$$(vi) (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$$

**证** (i)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

(方法 1) 任意  $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in (B \cup C)\}$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)\}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \{\langle x, y \rangle \mid (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)\}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C\}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

由  $\langle x, y \rangle$  的任意性可知, (i) 式成立。

(方法 2) 先证  $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ 。对任意的  $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$ , 则  $x \in$

$A, y \in B \cup C$ , 即  $x \in A$ , 且  $y \in B$  或  $y \in C$ 。由此可知,  $\langle x, y \rangle \in A \times B$  或  $\langle x, y \rangle \in A \times C$ , 故  $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$ 。由  $\langle x, y \rangle$  的任意性可知,  $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$  成立。

再证  $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$ 。因为  $A \subseteq A, B \subseteq B \cup C; A \subseteq A, C \subseteq B \cup C$ , 根据定理 3.5.1 可知, 则有

$$A \times B \subseteq A \times (B \cup C), \quad A \times C \subseteq A \times (B \cup C)$$

所以  $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$  成立。

综上所述,  $(A \times B) \cup (A \times C)$  与  $A \times (B \cup C)$  互为子集, 故(i)式成立。

其余的证明类似, 留作练习, 请读者自行完成。 ■

集合的笛卡儿乘积的概念, 可以推广到任意有限多个集合的情况。下面给出  $n$  个集合的笛卡儿乘积的定义描述及其基数公式。

**定义 3.5.5** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $n$  个任意集合, 则把所有这样的  $n$  重序元  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  (其中  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ ) 构成的集合, 称为集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的笛卡儿乘积, 并记作  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  或  $\prod_{i=1}^n A_i$ , 即  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n \}$ 。

由于  $n$  个集合的笛卡儿乘积是利用  $n$  重序元来定义的, 根据  $n$  重序元的定义, 显然有

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = (((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$$

例如, 当  $n=3$  时, 有

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^3 A_i &= A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3 \\ &= \{ \langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle \mid \langle a_1, a_2 \rangle \in A_1 \times A_2 \wedge a_3 \in A_3 \} \\ &= \{ \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge a_3 \in A_3 \} \end{aligned}$$

$n$  个集合的笛卡儿乘积更具有普遍意义。例如, 当  $n=2$  时就是前面描述的两个集合的笛卡儿乘积的情况, 特别是当  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$  时, 为了方便起见, 引用下述记忆符号:

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A = (A \times A) \times A$$

⋮

$$A^n = A^{n-1} \times A = (A^{n-2} \times A) \times A = \dots = (((A \times A) \times A) \times \dots \times A) \times A$$

根据笛卡儿乘积的定义, 不难得出  $n$  个有限集合的笛卡儿乘积的基数公式为

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| |A_2| \dots |A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

特别地, 当  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$  时, 有

$$|A^n| = |A \times A \times \dots \times A| = |A|^n$$

### 习题 3.5

(1) 设  $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$ , 求下列集合。

①  $A \times \{1\} \times B$ 。

②  $A^2 \times B$ 。

③  $(B \times A)^2$ 。

(2) 设  $A = \{a, b\}$ , 试求  $\rho(A) \times A$ 。

(3) 设  $A, B, C, D$  是任意集合, 试证明:

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

(4) 下列各式中哪些成立? 哪些不成立? 为什么?

①  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ 。

②  $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$ 。

③  $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$ 。

④  $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ 。

⑤  $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$ 。

(5) ① 设  $A \subseteq C, B \subseteq D$ , 证明  $A \times B \subseteq C \times D$ 。

② 给定  $A \times B \subseteq C \times D$ , 那么  $A \subseteq C, B \subseteq D$  一定成立吗?

(6) 在笛卡儿坐标系中, 设  $X = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge -3 \leq x \leq 2\}, Y = \{y \mid y \in \mathbf{R} \wedge -2 \leq y \leq 0\}$ , 试给出笛卡儿乘积  $X \times Y$  的几何解释。