第3章 三角函数

鲲哥小课堂

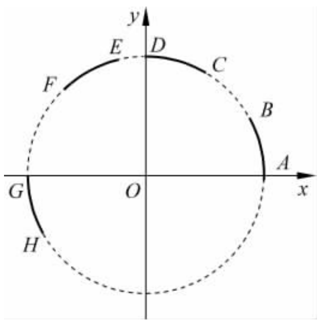
基础的考法在《基础2000》每章的“鲲哥小课堂”已经总结过，大家去翻《基础2000》就好，这里说说难题的考法。

三角函数难题的考法有：(1)恒等变化；(2)f型；(3)综合。难点在于可能出现 ～ 的小题。虽然没函数、导数考的概率那么高，但依然存在可能。数学考高分难，难就难在你要为10%概率的事情，付出100%的努力。总的来说，三角函数的难题是比较好掌握的，等走到本书后面的坎坷章节，你会无比怀念三角函数无忧无虑的时光。

以上划好的重点对应的题在《决胜800》中都有，“鲲哥带你学数学”也做了很多配套解说视频，赶紧去练吧。

【206】（2018·北京·7·）

在平面直角坐标系中，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{GH}$是圆$x^2+y^2=1$上的四段弧（如图），点P在其中一段上，角α以Ox为始边，OP为终边。若$\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$，则$P$所在的圆弧是（　　）



A. $\overset{\frown}{AB}$　　B. $\overset{\frown}{CD}$　　C. $\overset{\frown}{EF}$　　D. $\overset{\frown}{GH}$

【207】（2018·新课标全国二·15·）

已知$\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则$\sin(\alpha+\beta)=$________。

【208】（2005·重庆·13·）

已知α，β均为锐角，且$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，则$\tan\alpha=$________。

【209】（2007·江苏·11·）

若$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，则$\tan\alpha\cdot\tan\beta=$________。

【210】（2014·课程标准一·8·）

设$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）。

A. $3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

C. $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

【211】（2006·江苏·14·）

$\frac{\cos10^\circ}{\tan20^\circ}+\sqrt{3}\sin10^\circ\tan70^\circ-2\cos40^\circ=$________。

【212】（2015 · 重庆 · 9 · ）

若 $\tan\alpha = 2\tan\dfrac{\pi}{5}$，则 $\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{5}\right)}=$（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【213】（2013 · 重庆 · 9 · ）

$4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$（　　）。

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}-1$

【214】（2004 · 全国三 · 18 · ）

已知 α 为锐角，且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\dfrac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$ 的值。

【215】（2016 · 新课标全国二 · 11 · ）

函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为（　　）。

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【216】（2017 · 新课标全国二 · 14 · ）

函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是________。

【217】（2014 · 全国 · 16 · ）

若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是减函数，则 a 的取值范围是________________。

希望自己受欢迎的人，都是越来越被人讨厌的。因为真正受欢迎的人，都不是迎合别人的。（by：刘同，推荐：云南读者@阿晚）

【218】(2005·全国一·7·)

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\frac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$的最小值为(　　)。

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

【219】(2008·辽宁·16·)

设$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则函数$y=\frac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}$的最小值为________。

【220】(2008·四川·17·)

求函数$y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$的最大值与最小值。

【221】(1990·全国·19·)

函数$y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$的最大值是____________。

【222】(2009·全国一·16·)

若$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，则函数$y=\tan 2x\tan^3 x$的最大值为________。

【223】(2008·重庆·10·)

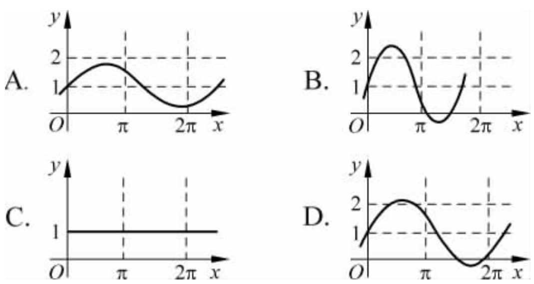
函数$f(x)=\frac{\sin x-1}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的值域是(　　)。

A. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-\sqrt{2},0]$　　D. $[-\sqrt{3},0]$

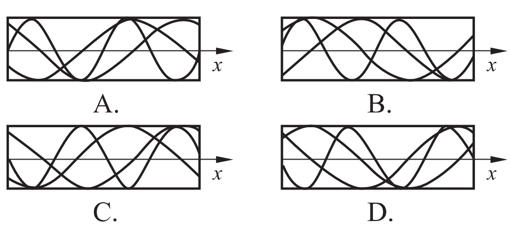
【224】(2009·浙江·10·)

已知 a 是实数,则函数 $f(x)=1+a\sin ax$ 的图像不可能是(　　)。



【225】(2010·江西·12·)

四位同学在同一个坐标系中分别选定了一个适当的区间,各自作出三个函数 $y=\sin 2x$,$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像如下。结果发现恰有一位同学作出的图像有错误,那么有错误的图像是(　　)。



【226】(2014·重庆·13·)

将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 图像上每一点的横坐标缩短为原来的一半,纵坐标不变,再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 的单位长度得到 $y=\sin x$ 的图像,则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________。

【227】(2010·福建·10·)

将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位,若所得图像与原图像重合,则 ω 的值不可能等于(　　)。

A. 4　　　　B. 6

C. 8　　　　D. 12

【228】(2010·辽宁·6·)

设 $\omega>0$,函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+2$ 的图像向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图像重合,则 ω 的最小值是(　　)。

A. $\frac{2}{3}$　　　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{2}$　　　　D. 3

【229】（2011·全国·7·）
设函数 $f(x)=\cos\omega x(\omega>0)$，将 $y=f(x)$ 的图像向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，所得的图像与原图像重合，则 ω 的最小值等于（　　）。
A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. 6　　D. 9

【230】（2009·全国二·9·）
若将函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，与函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像重合，则 ω 的最小值为（　　）。
A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

【231】（2013·课程标准二·16·）
函数 $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 的图像向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位后，与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像重合，则 $\varphi=$________。

【232】（2013·新课标全国一·16·）
设当$x=\theta$时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$________。

【233】（2016·上海·13·）
设 $a,b\in\mathbf{R},c\in[0,2\pi)$。若对任意实数 x 都有 $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=a\sin(bx+c)$，则满足条件的有序实数组$(a,b,c)$的组数为________。

【234】（2016·浙江·5·）
设函数 $f(x)=\sin^2x+b\sin x+c$，则 $f(x)$ 的最小正周期（　　）。
A. 与 b 有关，且与 c 有关
B. 与 b 有关，但与 c 无关
C. 与 b 无关，且与 c 无关
D. 与 b 无关，但与 c 有关

【235】（2015·湖南·9·）

将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像。若对满足 $|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 的 x_1,x_2，有 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{3}$，则 $\varphi=$（　　）。

A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

【236】（2014·天津·8·）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x\ (\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$。在曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的交点中，若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)$ 的最小正周期为（　　）。

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. π　　D. 2π

【237】（2015·湖南·15·）

已知 $\omega>0$，在函数 $y=2\sin\omega x$ 与 $y=2\cos\omega x$ 的图像的交点中，距离最短的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$，则 $\omega=$________。

【238】（2011·安徽·9·）

已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，其中 φ 为实数，若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（　　）。

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

【239】（2014·北京·14·）

设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，$A>0$，$\omega>0$，若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f(x)$ 的最小正周期为________。

【240】（2006·福建·16·）

已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\ (\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2，则 ω 的最小值是________。

【241】（2005·全国二·4·）

已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数，则（　　）。

A. $0<\omega\leqslant1$　　B. $-1\leqslant\omega<0$

C. $\omega\geqslant1$　　D. $\omega\leqslant-1$

【242】（2012·新课标·9·）

已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内单调递减，则 ω 的取值范围是（　　）。

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $(0,2]$

【243】（2015·天津·14·）

已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增，且函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\omega$ 对称，则 ω 的值为________。

【244】（2012·重庆·18·）

设 $f(x)=4\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos(2\omega x+\pi)$，其中 $\omega>0$。

（1）求函数 $y=f(x)$ 的值域；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数，求 ω 的最大值。

【245】（2016·新课标全国一·12·）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图像的对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 ω 的最大值为（　　）。

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5

【246】（2008·辽宁·16·）

已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 内有最小值，无最大值，则 $\omega=$________。

我不想抱怨不公，也不想找什么理由，我要有勇气做自己最怕的事情。（推荐：北京读者@恭亲王）

【247】（2016・天津・8・）

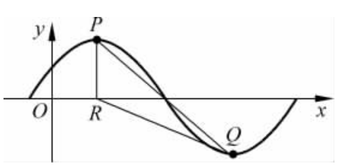
已知函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$。若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是（　　）。

A. $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5}{8},1\right]$

C. $\left(0,\dfrac{5}{8}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right]$

【248】（2011・浙江・18・）

已知函数 $f(x)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\varphi\right)$，$x\in\mathbf{R}$，$A>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$y=f(x)$ 的部分图像如图所示，P，Q 分别为该图像的最高点和最低点，点 P 的坐标为 $(1,A)$。

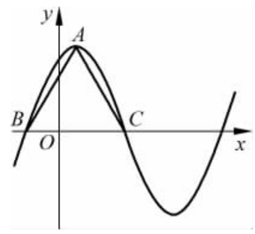


(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及 φ 的值；

(2) 若点 R 的坐标为 $(1,0)$，$\angle PRQ=\dfrac{2\pi}{3}$，求 A 的值。

【249】（2012・四川・18.1・）

函数 $f(x)=6\cos^2\dfrac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-3(\omega>0)$ 在一个周期内的图像如图所示，A 为图像的最高点，B，C 为图像与 x 轴的交点，且 $\triangle ABC$ 为正三角形。



求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域。

【250】（2006・山东・18・）

已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $y=f(x)$ 的最大值为 2，其图像相邻两对称轴间的距离为 2，并过点 $(1,2)$。

(1) 求 φ；

(2) 计算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2008)$。

【251】（2008・全国二・8・）

若动直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的图像分别交于 M，N 两点，则 $|MN|$ 的最大值为（　　）。

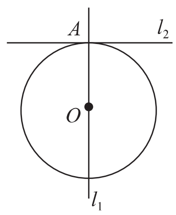
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

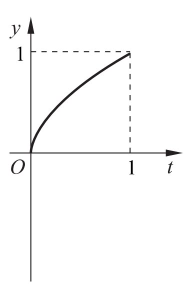
【252】（2010·江苏·10·）

定义在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的函数$y=6\cos x$的图像与$y=5\tan x$的图像的交点为$P$，过点$P$作$x$轴的垂线，垂足为$P_1$，直线$PP_1$与$y=\sin x$的图像交于点$P_2$，则线段$P_1P_2$的长为________。

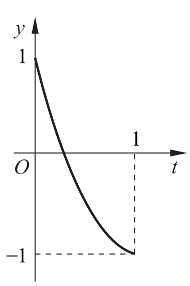
【253】（2013·江西·10·）

如图，已知$l_1\perp l_2$，圆心在l_1上、半径为1m的圆O在$t=0$时与l_2相切于点A，圆O沿l_1以1m/s的速度匀速向上移动，圆被直线l_2所截上方圆弧长记为x，令$y=\cos x$，则y与时间t（$0\leqslant t\leqslant 1$，单位：s）的函数$y=f(t)$的图像大致为（　　）。

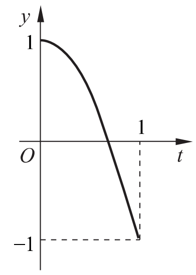




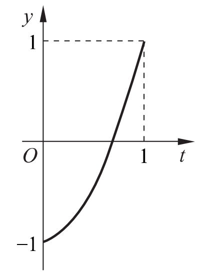
A.



B.



C.



D.

【254】（2013·全国·12·）

已知函数$f(x)=\cos x\sin 2x$，下列结论中错误的是（　　）。

A. $y=f(x)$的图像关于点$(\pi,0)$中心对称

B. $y=f(x)$的图像关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

C. $f(x)$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $f(x)$既是奇函数，又是周期函数

一直记得鲲哥说的：“女生要可爱，男生要可靠。”（by：江西读者@叶佳丽）