第3章 连续系统时域分析

3.1 常用的控制信号及其运算

常用的控制信号，主要有指数信号、正弦信号与采样信号等。这些信号都属于基本信号。复杂信号可以分解为这些基本信号的加权和或积分的形式。学习这些典型的基本信号知识是控制系统分析的基础。

3.1.1 常用控制系统信号的表示

下面给出一些常用控制信号的表达式和波形。

1. 直流信号

直流信号定义为

$$f(t)=A \quad -\infty<t<\infty \tag{3-1}$$

A 是常数，它是在全时间域上等于恒值的非因果信号。

2. 正弦信号

图 3-1 所示为大家所熟悉的正弦信号，可以表示为

$$f(t)=K\sin(\omega t+\theta) \tag{3-2}$$

正弦信号的变化频率是周期 T 的倒数(单位为 Hz)，即

$$f=\frac{1}{T}$$

其角频率 ω(单位为 rad/s)为

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

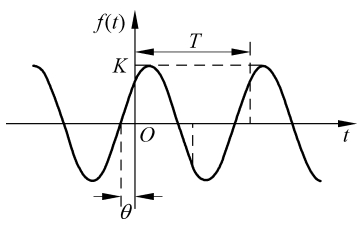


图 3-1 正弦信号

3. 单位阶跃信号

单位阶跃信号用 $\varepsilon(t)$ 表示，其定义为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{3-3}$$

该函数在 $t=0$ 处发生跃变，数值 1 为阶跃的幅度，若阶跃幅度为 A，则可以记为 $A\varepsilon(t)$。$\varepsilon(t)$在跃变点 $t=0$ 处的函数值未定。

延迟 t_0 后发生跃变的单位阶跃信号可表示为

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases} \tag{3-4}$$

在负时间域幅值恒定为 1，而在 $t=0$ 处发生跃变到零的阶跃信号可表示为

$$\varepsilon(-t)=\begin{cases}1, & t<0\\ 0, & t>0\end{cases} \tag{3-5}$$

$\varepsilon(t)$、$\varepsilon(t-t_0)$、$\varepsilon(-t)$的波形如图 3-2 所示。

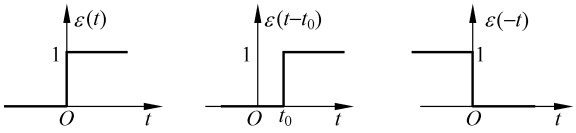


图 3-2　三种阶跃信号的表示

4. 矩形脉冲信号

幅度为 1，脉冲宽度为 τ 的矩形脉冲常用 $g_\tau(t)$表示，其定义为

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases} \tag{3-6}$$

其时间波形如图 3-3 所示。由于其形状像一扇门，故称为门函数。借助于阶跃信号，$g_\tau(t)$又可表示为阶跃信号的组合，如图 3-4 所示。

$$g_\tau(t)=f_1(t)-f_2(t)=\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

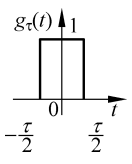


图 3-3　矩形脉冲信号

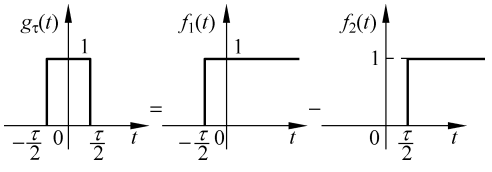


图 3-4　矩形脉冲信号可以表示为阶跃信号组合

例 3-1　试用阶跃信号的组合表示图 3-5 所示的图形。

解　在图 3-5 中，(0,1)区间函数可以表示为如下的阶跃信号组合

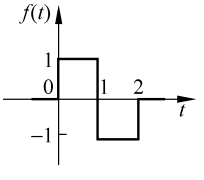
$$\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$$

(1,2)区间函数可以表示为如下的阶跃信号组合

$$-[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$$

则图 3-5 所示的图形可以表示为

$$\begin{aligned}f(t)&=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)-[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]\\&=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)\end{aligned}$$



■　图 3-5　例 3-1 的图

5. 斜坡信号

斜坡信号指的是从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。常用 $r(t)$ 表示，其定义为

$$r(t)=\begin{cases}t, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{3-7}$$

也可借助阶跃信号简洁地表示为

$$r(t)=t\varepsilon(t) \tag{3-8}$$

斜坡信号的波形如图 3-6 所示。

6. 符号函数

定义

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases} \tag{3-9}$$

符号函数的波形如图 3-7 所示。

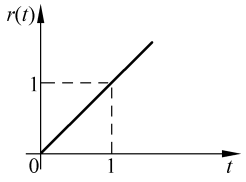


图 3-6　斜坡信号

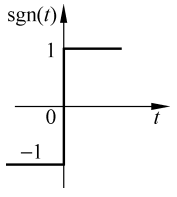


图 3-7　符号函数

阶跃信号也可以由符号函数来表示：

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(t)+1] \tag{3-10}$$

7. 实指数信号

实指数信号定义为

$$f(t)=K\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{3-11}$$

在实指数信号中，$\alpha=0$，$f(t)$ 为直流信号；$\alpha<0$，$f(t)$ 为指数增长信号；$\alpha>0$，$f(t)$ 为指数衰减信号，如图 3-8 所示。

在工程中，常用的实指数信号是单边的，其定义为

$$f(t)=K\mathrm{e}^{-\alpha t}\quad \alpha>0, t>0 \tag{3-12}$$

它是一个因果信号。

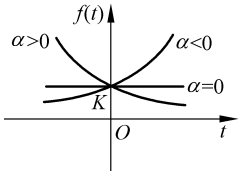


图 3-8　指数信号

8. 复指数信号

设 α 为任意实数，则复指数信号可表示为

$$f(t)=K\mathrm{e}^{st}\quad s=\alpha+\mathrm{j}\omega \tag{3-13}$$

根据欧拉公式，虚指数信号为

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$
$$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$$

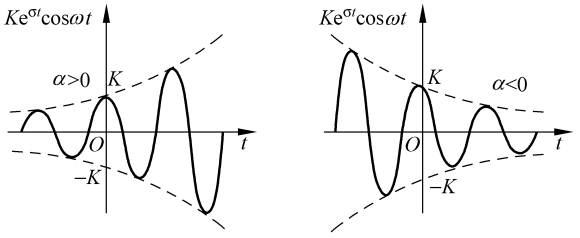
从而有

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$$
$$\cos\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$$

所以,复指数信号可表示为

$$f(t)=Ke^{at}(\cos\omega t+j\sin\omega t) \tag{3-14}$$

由于复指数信号能概括多种情况,所以可利用它来描述多种基本信号,如直流信号($\alpha=0,\omega=0$)、指数信号($\omega=0$,$f(t)$为实指数信号)、等幅($\alpha=0,\omega\neq0$)、增幅($\alpha>0,\omega\neq0$)正弦或余弦信号和减幅($\alpha<0,\omega\neq0$)正弦或余弦信号,如图 3-9 所示。因此,它在控制系统分析中经常用到。



(a) 幅度增长的余弦信号　　(b) 幅度衰减的余弦信号

图 3-9　增幅余弦信号和减幅余弦信号

9. 采样函数

采样函数(sampling function)定义为

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t} \tag{3-15}$$

该函数曲线如图 3-10 所示。

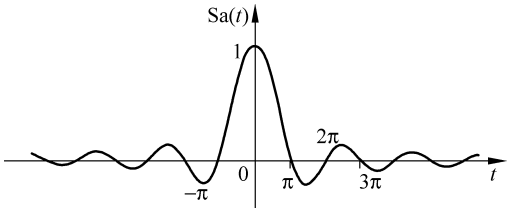


图 3-10　采样函数

观察可知,该函数有下列特点:

(1) $\mathrm{Sa}(t)$为偶函数,因为它是$\frac{1}{t}$和 $\sin t$ 两奇函数的乘积;

(2) 当 $t=0$ 时,$\mathrm{Sa}(0)=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$,且为最大值;

(3) 曲线呈衰减振荡,从$-\pi$到 π 的“主瓣”宽度为 2π,当 $t=\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$时 $\mathrm{Sa}(t)=0$;

(4) $\int_0^{\infty} \mathrm{Sa}(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$，$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t)\mathrm{d}t = \pi$。

有时会用到函数 $\mathrm{sinc}(t)$，其定义为 $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \mathrm{Sa}(\pi t)$。

10. 单位冲激信号 $\delta(t)$

单位冲激信号 $\delta(t)$是一个特殊信号，它不是用普通的函数来定义的。这些将在 3.5 节详细介绍。

3.1.2 信号的基本运算

1. 相加与相乘

相加与相乘是信号处理的基本运算。两个信号相加(相乘)可得到一个新的信号，它在任意时刻的值等于两个信号在该时刻的值之和(积)。信号相加与相乘运算可以通过信号的波形或信号的表达式进行。

设有如图 3-11 所示的信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$，则信号 $f_1(t)+f_2(t)$的波形如图 3-12 所示；信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$相乘的波形如图 3-13 所示。

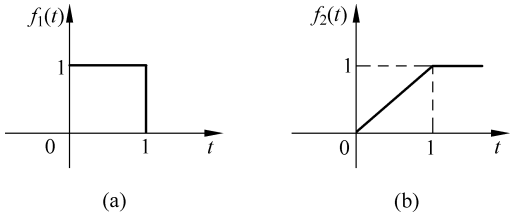


图 3-11　信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$

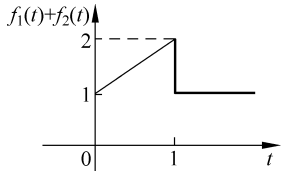


图 3-12　两个信号相加示意图

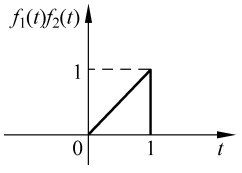


图 3-13　两个信号相乘示意图

2. 反转(褶)与延时

信号的反转(或反褶)是将信号 $f(t)$的自变量 t 换为 $-t$，可得到另一个信号 $f(-t)$。从图形上看，将 $f(t)$的波形以纵坐标为轴反转 180°，即成为 $f(-t)$。

将信号 $f(t)$的自变量 t 换为 $t \pm t_0$，t_0 为正实常数，则可得到另一个信号 $f(t \pm t_0)$。从图形上看，即把 $f(t)$的波形沿时间轴整体平移(延时)t_0 个单位。$f(t-t_0)$表示向右平移 t_0，$f(t+t_0)$表示向左平移 t_0。

例 3-2　信号 $f(t)$如图 3-14 所示，试画出下列信号的波形：

(1) $f(-t)$；

(2) $f(t+1)$。

解

(1) 信号 $f(-t)$为信号 $f(t)$的反转，所以 $f(-t)$的波形如图 3-15 所示。

(2) 信号 $f(t+1)$可由信号 $f(t)$向左平移 1 得到，波形如图 3-16 所示。 ■

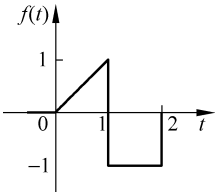


图 3-14 例 3-2 图

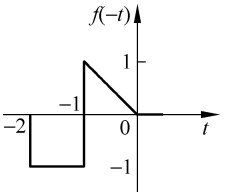


图 3-15 信号的反转

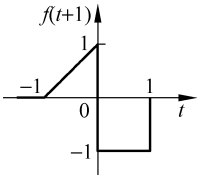


图 3-16 信号的移位

3. 尺度变换

将信号 $f(t)$的自变量 t 换为 αt，α 为正实常数，则信号 $f(\alpha t)$将在时间尺度上压缩或扩展，这称为信号的尺度变换。

若 $0<\alpha<1$，意味着原信号从原点沿 t 轴扩展；

若 $1<\alpha$，意味着原信号从原点沿 t 轴压缩(幅值不变)。

例 3-3 信号 $f(t)$如图 3-14，试画出 $f\left(\frac{t}{2}\right)$的图形。

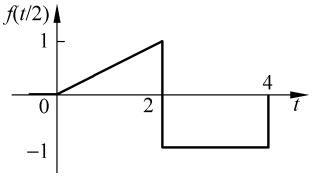


图 3-17 信号的尺度变换

解 在信号 $f\left(\frac{t}{2}\right)$中，$\alpha=\frac{1}{2}$，意味着可由信号 $f(t)$从原点沿 t 轴扩展得到。$f\left(\frac{t}{2}\right)$的波形如图 3-17 所示。 ■

信号的尺度展缩在信息的存储、压缩和解压缩技术方面应用很广。如 $f(t)$是已录制好的音乐信号磁带，则 $f(2t)$是以原声的 2 倍速度播放；$f\left(\frac{t}{2}\right)$以原声的一半速度播放。

4. 微分与积分

信号 $f(t)$的微分表示为

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=f'(t)=f^{(1)}(t)$$

$f(t)$的积分表示为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f^{(-1)}(t)$$

式中，τ 为积分变量。

例如，对于斜坡函数，其导数为阶跃函数，即

$$r'(t)=\varepsilon(t) \tag{3-16}$$

反之，单位阶跃函数的积分为斜坡函数，即

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau=t\varepsilon(t) \tag{3-17}$$

再如，对于图 3-18(a)所示的信号，可表示为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t+1, & -2\leqslant t\leqslant 0\\ -\frac{1}{2}t+1, & 0\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$$

则其微分如图 3-18(b)所示。

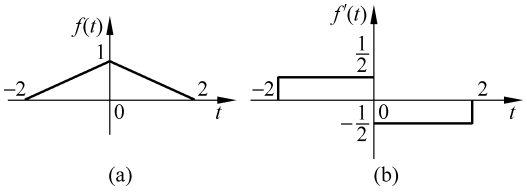


图 3-18　信号的微分

对于图 3-19(a)所示的信号,可表示为

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0, & t>1\end{cases}$$

则其积分

$$y(t)=\int_0^t 1\mathrm{d}\tau=t \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

当 $t>1$ 时,有

$$y(t)=y(1)+\int_1^t f(\tau)\mathrm{d}\tau=1+0=1$$

积分结果如图 3-19(b)所示。

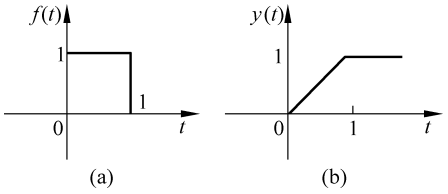


图 3-19　信号的积分

例 3-4　已知 $f(t)$的波形如图 3-20,画出 $f'(t)$的波形。

解　对于图 3-20 所示的信号,可表示为

$$f(t)=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t<1\\ 2, & 1\leqslant t<4\\ -2t+10, & 4\leqslant t\leqslant 5\end{cases}$$

则其微分如图 3-21 所示。 ■

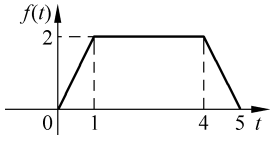


图 3-20　例 3-4 的图

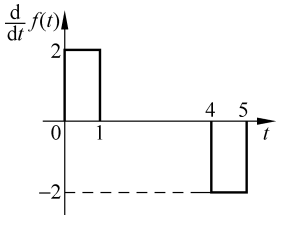


图 3-21　例 3-4 的结果

3.2 时域数学模型——微分方程

在控制系统中,要研究各种物理量的变化,必须把它们彼此之间相互作用的关系和各自的变化规律用数学的形式描述出来,这就是为某一系统建立数学模型。建立控制系统的数学模型,是控制理论的基础。

对于线性时不变(LTI)控制系统来说,描述这类系统输入输出特性,常用的数学模型是常系数线性微分方程。对线性时不变控制系统,假设其激励信号为 $f(t)$,响应信号是 $y(t)$,如图 3-22 所示,那么它们之间的关系可以用下列形式的 n 阶微分方程式来描述

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)\\ &=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f'(t)+b_0 f(t) \end{aligned} \tag{3-18}$$

这种 n 阶常系数线性微分方程是控制系统时域分析的基础。

从系统的模型(微分方程)出发,在时域中研究输入信号进入系统后其输出响应的变化规律,是研究时域特性的重要方法,这种方法就是时域分析法。由于时域分析法不涉及任何变换,直接求解系统的微分方程式,所以这种方法比较直观,物理概念比较清楚,是学习各种变换域方法的基础。

图 3-22 线性时不变系统输入输出关系

线性时不变系统微分方程的建立要根据实际系统的物理特性列写。对于电路系统,主要是根据元件特性约束和网络拓扑约束列写系统的微分方程。元件特性约束就是表征元件特性的关系式,例如二端元件电阻、电容、电感各自的电压与电流的关系(伏安关系)等;网络拓扑约束就是由网络结构决定的电压电流约束关系。

对任一节点,有

$$\text{KCL}:\ \sum i(t)=0 \tag{3-19}$$

对任一回路,有

$$\text{KVL}:\ \sum u(t)=0 \tag{3-20}$$

这里先简单回顾元件端口的电压与电流约束关系。

电阻(见图 3-23)电压与电流之间的关系:

$$i_{\text{R}}(t)=\frac{u_{\text{R}}(t)}{R} \tag{3-21}$$

电容(见图 3-24)电压与电流之间的关系:

$$u_{\text{C}}(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_{\text{C}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3-22}$$

$$i_{\text{C}}(t)=C\,\frac{\mathrm{d}u_{\text{C}}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3-23}$$

电感(见图 3-25)电压与电流之间的关系:

$$u_{\text{L}}(t)=L\,\frac{\mathrm{d}i_{\text{L}}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3-24}$$

$$i_{\text{L}}(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_{\text{L}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3-25}$$

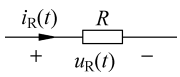


图 3-23　电阻元件

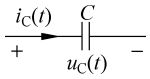


图 3-24　电容元件

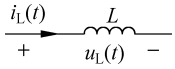


图 3-25　电感元件

下面通过几个例子，说明系统微分方程的建立方法。

对于如图 3-26 所示的 RC 电路，有微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u_s(t)$$

即

$$u'_C(t)+\frac{1}{RC}u_C(t)=\frac{1}{RC}u_s(t) \tag{3-26}$$

对于如图 3-27 所示的 RL 电路，有

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)=i_s(t)$$

即

$$i'_L(t)+\frac{R}{L}i_L(t)=\frac{R}{L}i_s(t) \tag{3-27}$$

式(3-26)和式(3-27)都为一阶微分方程。

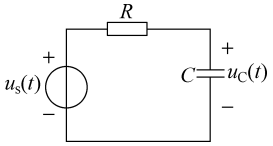


图 3-26　RC 电路

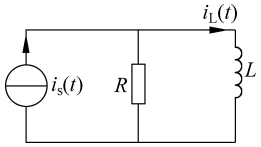


图 3-27　RL 电路

例如，求图 3-28 所示电路的端电压 $u(t)$ 与激励 $i_s(t)$ 间的关系。

电阻关系

$$i_R(t)=\frac{1}{R}u(t)$$

电感关系

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

电容关系

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

根据 KCL，应有

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_s(t)$$

代入上面电阻、电感、电容的伏安特性关系式，并化简有

$$C\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L}u(t)=\frac{\mathrm{d}i_s(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3-28}$$

这是一个二阶微分方程。

再看一个例子。图 3-29 为直流他励电动机示意图。在电磁方面,它的运动服从下列方程

$$U-E_{\mathrm{a}}=L_{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}+R_{\mathrm{a}}I_{\mathrm{a}} \tag{3-29}$$

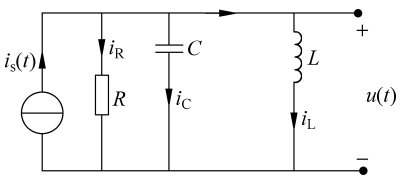


图 3-28 电路图

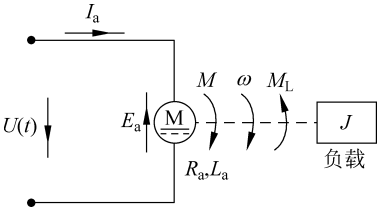


图 3-29 直流他励电动机示意图

U 为外加的电枢电压,E_{a} 是电枢电势,I_{a} 是电枢电流,L_{a}、R_{a} 分别是电枢电路内的总电感和总电阻。在机械方面,其运动服从下列方程

$$M-M_{\mathrm{L}}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{3-30}$$

M 为电磁力矩,M_{L} 是电动机轴上的反向力矩(包括负载、摩擦等),J 是整个旋转部分的总转动惯量,ω 是电动机轴的角速度。

还有两个电量和机械量联系起来的方程

$$E_{\mathrm{a}}=k_{\mathrm{d}}\omega \tag{3-31}$$

$$M=k_{\mathrm{d}}I_{\mathrm{a}} \tag{3-32}$$

其中,k_{d} 为电动机的比例系数。

$$k_{\mathrm{d}}=\frac{pN}{2\pi a}\phi_{\mathrm{d}} \tag{3-33}$$

其中,p 是电动机的极对数,N 是匝数,a 是电枢绕组的支路数,ϕ_{d} 是每磁极下的磁通量。

式(3-29)~式(3-33)是直流他励电动机的数学模型。如果主要注意电动机转速的变化,也就是把 ω 看做输出量,而把 E_{a}、I_{a}、M 看做中间量,则可以从上面的方程中消去 E_{a}、I_{a}、M,而得到一个含有 ω 的微分方程

$$T_{\mathrm{a}}T_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{k_{\mathrm{d}}}U-\frac{R_{\mathrm{a}}}{k_{\mathrm{d}}^2}\left(T_{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}+M_{\mathrm{L}}\right) \tag{3-34}$$

其中,$T_{\mathrm{a}}=\dfrac{L_{\mathrm{a}}}{R_{\mathrm{a}}}$称为电磁时间常数,$T_{\mathrm{m}}=\dfrac{JR_{\mathrm{a}}}{k_{\mathrm{d}}^2}$称为机电时间常数。

对于式(3-18)的 n 阶微分方程而言,其完全解由两部分组成——齐次解和特解。齐次解应满足

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t)=0 \tag{3-35}$$

特征方程为

$$a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{3-36}$$

(1) 特征根为单根，微分方程的齐次解为

$$y_h(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+A_ne^{\lambda_n t} \tag{3-37}$$

(2) 特征根有重根，假设 λ_1 是特征方程的 k 重根，那么，在齐次解中，相应于 λ_1 的部分将有 k 项

$$(A_1t^{k-1}+A_2t^{k-2}+\cdots+A_{k-1}t+A_k)e^{\lambda_1 t} \tag{3-38}$$

(3) 若 λ_1、λ_2 为共轭复根，即 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$，那么，在齐次解中，相应于 λ_1、λ_2 的部分为

$$e^{\alpha t}(A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t) \tag{3-39}$$

例 3-5　求下列微分方程的齐次解。

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+7\frac{d^2y(t)}{dt^2}+16\frac{dy(t)}{dt}+12y(t)=x(t)$$

解　特征方程为

$$\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=(\lambda+2)^2(\lambda+3)=0$$

特征根

$$\lambda_1=\lambda_2=-2(\text{重根}),\quad \lambda_3=-3$$

齐次解

$$y_h(t)=A_1te^{-2t}+A_2e^{-2t}+A_3e^{-3t}$$ ■

特解 $y_p(t)$的函数形式与激励函数的形式有关。将激励信号代入微分方程的右端，代入后的函数式称为“自由项”。通常，由观察自由项试选特解函数式，代入方程后求得特解函数式中的待定系数(比较系数)，即可求出特解。表 3-1 列出了几种典型自由项函数相应的特解。

表 3-1　几种典型自由项函数相应的特解

激励函数 $f(t)$	响应函数 $y(t)$ 的特解
E(常数)	B(常数)
t^p(多项式)	$B_1t^p+B_2t^{p-1}+\cdots+B_pt+B_{p+1}$(多项式)
$e^{\alpha t}$	$Bt^ke^{\alpha t}$(当 α 是 k 重特征根时)
$\cos\omega t$ 或 $\sin\omega t$	$B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t$

完全解就是齐次解加特解，由初始条件定出齐次解系数 A_k。

例 3-6　已知 $y(0)=y'(0)=0$，求以下微分方程的完全解。

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+6\frac{d}{dt}y(t)+5y(t)=e^{-t}$$

解　齐次方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+6\frac{d}{dt}y(t)+5y(t)=0$$

特征方程为

$$\lambda^2+6\lambda+5=0$$

特征根为

$$\lambda_1=-5,\quad \lambda_2=-1$$

则该方程的齐次解为

$$y_h(t)=A_1e^{-5t}+A_2e^{-t}$$

注意,此时不要去解 A_1 和 A_2,留待特解求得后再去解决。

激励函数中 $\alpha=-1$,与微分方程的一个特征根相同,查表 3-1 可得特解的形式为

$$y_p(t)=Cte^{-t}$$

代入原微分方程得

$$\frac{d^2}{dt^2}(Cte^{-t})+6\frac{d}{dt}(Cte^{-t})+5(Cte^{-t})=e^{-t}$$

求得

$$C=\frac{1}{4}$$

所以特解为

$$y_p(t)=\frac{1}{4}te^{-t}$$

完全解为

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=A_1e^{-5t}+A_2e^{-t}+\frac{1}{4}te^{-t}$$

代入初始条件

$$y(0)=y'(0)=0$$

求得

$$A_1=\frac{1}{16},\quad A_2=-\frac{1}{16}$$

所以有

$$y(t)=\left(\frac{1}{16}e^{-5t}-\frac{1}{16}e^{-t}+\frac{1}{4}te^{-t}\right)\quad t>0$$

3.3 系统的时域响应

系统时域响应是指在典型输入信号作用下,系统的输出量或信号。在时域经典法求解系统的完全响应时,一种广泛应用的分解方法是把响应分为零输入响应(Zero-Input Response,ZIR)和零状态响应(Zero-State Response,ZSR)两部分,即

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)\tag{3-40}$$

零输入响应(ZIR)的定义为:从观察的初始时刻(例如 $t=0$)起不再施加输入信号(即零输入),仅由该时刻系统本身具有的起始状态引起的响应称为零输入响应(或储能响应)。

起始状态反映的是一个系统在初始观测时刻(如 $t=0$)的能量状态。例如在电系统中,电容和电感在 $t=0$ 时的值 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 称为起始状态,而把 $t=0$ 时的值 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 以及它们的各阶导数称为初始值(初始条件)。

设电路如图 3-30 所示。在 $t<0$ 时,开关 S_1 一直闭合,因而电容 C 被电源充电到电压 U_0。在 $t=0$ 时,开关 S_1 打开而开关 S_2 同时闭合,假定开关动作瞬时完成。开关的动作常称为“换路”。通过换路,可以得到图 3-31 所示的电路。于是在电容储能的作用下,在 $t\geqslant 0$ 时电路中虽然没有电源,仍可以有电流、电压存在,构成零输入响应。

一般情况下，换路期间电容两端的电压和流过电感中的电流不会发生突变。这就是在电路分析中的换路定则

$$u_C(0_-)=u_C(0_+),\quad i_L(0_-)=i_L(0_+)$$

零状态响应(ZSR)的定义为：当电路中储能状态为零时，由外加激励信号产生的响应(电压或电流)称为零状态响应(或受激响应)。

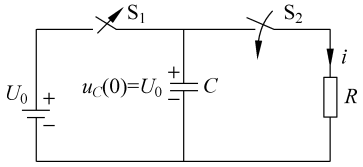


图 3-30　已充电的电容与电阻连接

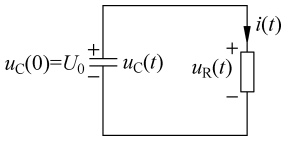


图 3-31　$t\geqslant 0$ 的电路

系统零输入响应，实际上是求系统方程的齐次解，由非零的系统状态值决定的初始值求出待定系数。下面通过例子来看零输入响应的求法。

例 3-7　求系统 $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t)+3\dfrac{d}{dt}y(t)+2y(t)=0$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$ 的零输入响应。

解　特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

特征根为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

零输入响应为

$$y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$$

由起始条件

$$\begin{cases}y(0_-)=C_1+C_2=1\\ y'(0_-)=-C_1-2C_2=2\end{cases}$$

得

$$C_1=4\quad C_2=-3$$

零输入响应为

$$y_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$$ ■

系统零状态响应是在激励作用下求系统方程的非齐次解，由状态值 $u_C(0_-)$，$i_L(0_-)$ 为零决定的初始值求出待定系数。零状态响应解的形式为齐次解加特解，即

$$y_{zs}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i t}+y_p(t)\tag{3-41}$$

特解的求法按表 3-1。由初始条件求待定系数 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$。

下面以具体例子说明求解过程。

例 3-8　某一阶 RC 电路，以电容电压 $u_C(t)$ 为变量的微分方程为

$$C\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{1}{R}u_C(t)=I_s$$

I_s 为常量,初始条件为 $u_C(0)=0$。求解 $u_C(t)$。

解 此例实际是求零状态响应 $u_C(t)$。这是一个一阶非齐次微分方程,它的通解是

$$u_C = u_{Ch} + u_{Cp}$$

其中,u_{Ch} 为对应的齐次方程的通解,u_{Cp} 为非齐次方程的特解。

对应的齐次方程的通解为

$$u_{Ch} = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \quad t \geqslant 0$$

设特解为

$$u_{Cp} = Q$$

代入方程,解得

$$u_{Cp} = Q = RI_s \quad t \geqslant 0$$

则非齐次方程的通解为

$$u_C = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} + RI_s$$

代入初始条件 $u_C(0)=0$,得

$$u_C(0) = K + RI_s = 0$$

所以

$$K = -RI_s$$

即零状态响应

$$u_C(t) = -RI_s\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} + RI_s = RI_s(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}) \quad t \geqslant 0$$ ■

例 3-9 电路如图 3-32 所示。

设 $R=5\Omega$,$L=1\mathrm{H}$,$C=1/6\mathrm{F}$,$i_s(t)=4\mathrm{A}$,$u_C(0_-)=1\mathrm{V}$,$i(0_-)=0.2\mathrm{A}$,电感电流 $i(t)$ 为响应。求零输入响应、零状态响应和全响应。

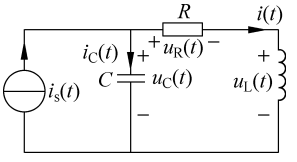


图 3-32 例 3-9 的电路

解 以电感中电流 $i(t)$ 为响应列微分方程。由于

$$\text{KCL: } i_C(t) = i_s(t) - i(t)$$

$$\text{KVL: } u_L(t) = u_C(t) - u_R(t)$$

$$\text{VCR: } u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad u_R(t) = Ri(t)$$

联合以上各式,有

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = u_C(t) - Ri(t) \tag{3-42}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}[i_s(\tau) - i(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{3-43}$$

把式(3-43)代入式(3-42),并求导一次,整理可得

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{LC}i_s(t) \tag{3-44}$$

代入元件的参数,得

$$i''(t) + 5i'(t) + 6i(t) = 6i_s(t)$$

(1) 求零输入响应

令上式中 $i_s(t)=0$,有齐次方程

$$i''(t)+5i'(t)+6i(t)=0$$

它的特征方程为

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

特征根为

$$\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=-3$$

所以零输入响应为

$$i_{zi}(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t} \tag{3-45}$$

为求系数 A_1 和 A_2,必须由起始状态导出初始值。因该系统中,$u_C(0_+)=u_C(0_-)$,$i(0_+)=i(0_-)$,故零输入响应的初始值为

$$i_{zi}(0_+)=i(0_-)=0.2\text{A}$$

$$i'_{zi}(0_+)=\left.\frac{di_{zi}}{dt}\right|_{t=0_+}=\frac{1}{L}[-Ri_{zi}(0_+)+u_C(0_+)]=0$$

在式(3-45)及其导数的关系式中令 $t=0_+$,并代入以上值,得

$$i_{zi}(0_+)=A_1+A_2=0.2\text{A}$$

$$i'_{zi}(0_+)=-2A_1-3A_2=0$$

解得

$$A_1=0.6,\quad A_2=-0.4$$

代回式(3-45),得零输入响应

$$i_{zi}(t)=0.6e^{-2t}-0.4e^{-3t}\quad t\geqslant 0$$

(2) 求零状态响应

当 $i_s(t)=4\text{A}$ 时,系统的零状态响应是方程

$$i''(t)+5i'(t)+6i(t)=24$$

的解,该解由两部分组成,即

$$i_{zs}(t)=\underbrace{i_h}_{\text{齐次解}}+\underbrace{i_p}_{\text{特解}}$$

齐次解形式为

$$i_h(t)=B_1e^{-2t}+B_2e^{-3t}$$

特解的形式与激励相同,因激励为直流,可设 i_p 为常量,令

$$i_p=I$$

代入原方程,得

$$i_p=4\text{A}$$

故零状态响应可写为

$$i_{zs}(t)=B_1e^{-2t}+B_2e^{-3t}+4 \tag{3-46}$$

需要注意的是,上式的待定系数 B_1 和 B_2 应由在 $u_C(0_-)=0$,$i(0_-)=0$ 的条件下导出的 0_+ 初始值 $i_{zs}(0_+)$和 $i'_{zs}(0_+)$决定。由题意得 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$,且

$$i_{zs}(0_+)=0$$

$$i'_{zs}(0_+)=\frac{1}{L}[-Ri_{zs}(0_+)+u_C(0_+)]=0$$

在式(3-46)及其导数的关系式中,令 $t=0$,并代入以上值,得

$$\begin{cases} i_{zs}(0_+)=B_1+B_2+4=0 \\ i'_{zs}(0_+)=-2B_1-3B_2=0 \end{cases}$$

解得

$$B_1=-12,\quad B_2=8$$

从而得零状态响应为

$$i_{zs}(t)=-12e^{-2t}+8e^{-3t}+4\quad t\geqslant 0$$

系统的全响应为零输入响应和零状态响应的叠加,即

$$i(t)=\underbrace{0.6e^{-2t}-0.4e^{-3t}}_{\text{零输入响应}}\underbrace{-12e^{-2t}+8e^{-3t}+4}_{\text{零状态响应}}=\underbrace{-11.4e^{-2t}+7.6e^{-3t}}_{\substack{\text{自由响应}\\(\text{瞬态响应})}}+\underbrace{4}_{\substack{\text{强迫响应}\\(\text{稳态响应})}}$$

■

系统响应的不同分类基于不同的概念。

把响应分为零输入响应和零状态响应,是按响应的不同起因分类的,即零输入响应是起始状态引起,零状态响应是外加激励引起。

把响应分为自由响应和强迫响应,是按系统的性质和输入信号的形式分类的,即自由响应的变化规律取决于系统的特征根(或固有频率),强迫响应则取决于外加激励的形式。把响应分为瞬态响应和稳态响应,是按响应的变化形式分类的,即随着 t 的增长,响应最终趋于零的分量称为瞬态响应,若响应恒定或保持为某个稳态函数,则称为稳态响应。

3.4 阶跃响应

在控制系统的分析中,经常引用阶跃信号作为激励信号,于是定义由单位阶跃信号引起的零状态响应称为单位阶跃响应,简称阶跃响应,记为 $s(t)$。如果阶跃信号的幅度为 A,则系统的阶跃响应为 $As(t)$。

图 3-33 为上述定义的直观示意图。

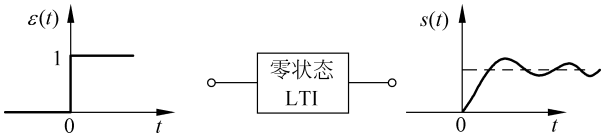


图 3-33 阶跃响应的示意图

一般地,若一阶系统在 $\varepsilon(t)$ 作用下其方程为

$$y'(t)+ay(t)=K\varepsilon(t)$$

则阶跃响应为

$$s(t)=\frac{K}{a}(1-e^{-at})\varepsilon(t) \tag{3-47}$$

例 3-10 求图 3-34 所示的零状态 RL 电路在图 3-35 所示脉冲电压作用下的电流 $i(t)$。已知 $L=1\text{H}$,$R=1\Omega$。

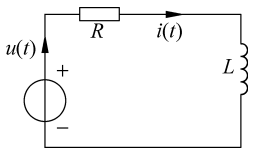


图 3-34　RL 电路

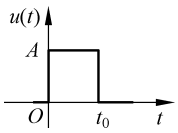


图 3-35　脉冲电压

解　电压 $u(t)$可以分解为两个阶跃信号之和,但幅度为 A,即

$$u(t)=A\varepsilon(t)-A\varepsilon(t-t_0)$$

电路的微分方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=u(t)$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{1}{L}u(t)$$

在 $A\varepsilon(t)$作用下的响应由式(3-47)得

$$s_1(t)=i_1(t)=\frac{A}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}})\varepsilon(t)=A(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

在 $-A\varepsilon(t-t_0)$作用下的响应是

$$s_2(t)=i_2(t)=-\frac{A}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R(t-t_0)}{L}})\varepsilon(t)=-A(1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)})\varepsilon(t-t_0)$$

所以

$$i(t)=s(t)=i_1(t)+i_2(t)=A(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)-A(1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)})\varepsilon(t-t_0)$$ ■

例 3-11　设有二阶系统方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\varepsilon(t)$$

在零状态下,即 $y(0_-)=0$,$y'(0_-)=0$,求阶跃响应 $s(t)$。

解　因为方程右端无冲激,故响应及其各阶导数不可能产生状态的跳变,即应有

$$y(0_+)=y(0_-)=0$$

$$y'(0_+)=y'(0_-)=0$$

系统特征方程的根为

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

故系统齐次方程的通解形式为

$$y_\mathrm{h}(t)=B_1\mathrm{e}^{-t}+B_2\mathrm{e}^{-2t}$$

对于阶跃输入,方程的特解形式为常数,令

$$y_\mathrm{p}(t)=K$$

代入原方程,可得

$$K=\frac{1}{2}$$

系统的解为

$$y(t)=y_\mathrm{h}(t)+y_\mathrm{p}(t)=B_1\mathrm{e}^{-t}+B_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}$$

进而

$$y'(t)=-B_1\mathrm{e}^{-t}-2B_2\mathrm{e}^{-2t}$$

由于 $y(0_+)=y'(0_+)=0$,代入以上两式得

$$\begin{cases}B_1+B_2+\dfrac{1}{2}=0\\ -B_1-2B_2=0\end{cases}$$

解得

$$B_1=-1,\quad B_2=\frac{1}{2}$$

最后得阶跃响应

$$y(t)=s(t)=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\quad t\geqslant 0$$ ■

3.5 冲激信号与冲激响应

3.5.1 单位冲激信号

在物理和工程技术中,还常常会碰到单位冲激信号。因为在许多物理现象中,除了有连续分布的物理量外,还会有集中于一点的量(点源),或者具有脉冲性质的量。例如,怎样描述钉子在一瞬间受到极大作用力的过程?打乒乓球时,如何描述运动员发球瞬间的作用力?如何描述在极短时间内给电容以极大电流充电的情形?如此等等,都需要定义一个理想函数以满足各种应用。研究这类问题就会产生下面要介绍的单位冲激信号。

1. 单位冲激信号的定义

在原来电流为零的电路中,某一瞬时(设为 $t=0$)进入一个单位电量的脉冲,现在要确定电路上的电流 $i(t)$。以 $q(t)$表示上述电路中到时刻 t 为止通过导体截面的电荷函数(即累计电量),则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

由于电流大小是电荷函数对时间的变化率,即

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

所以,当 $t\neq 0$ 时,$i(t)=0$;当 $t=0$ 时,由于 $q(t)$是不连续的,从而在普通导数意义下,$q(t)$在这一点导数不存在,如果形式化地计算这个导数,则得

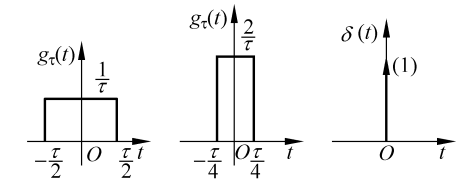
$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}=\infty$$

这表明,在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够用来表示上述电路的电流大小,为了确定这种电路上的电流大小,必须引进一个新的函数,这个函数称为 Dirac(狄拉克,

1930年英国物理学家Dirac给出的定义)函数,简单的记为δ函数。有了这种函数,对于许多集中在一点或一瞬间的量,例如点电荷、点热源、集中于一点的质量以及脉冲技术中的非常狭窄的脉冲等,就能够像处理连续分布的量那样,用统一的方式来加以解决。

再看一个普通函数的例子。图3-36(a)是一矩形脉冲$g_\tau(t)$,它是宽度为τ、面积$S=1$的普通信号,可以表示为

$$g_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<-\dfrac{\tau}{2}\\ \dfrac{1}{\tau}, & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & t>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}\tag{3-48}$$



(a) 矩形脉冲函数　(b) 脉冲函数　(c) 冲激函数

图3-36　冲激函数示意图

若该脉冲的宽度变小为$\frac{\tau}{2}$,高度增大为$\frac{2}{\tau}$,如图3-36(b)所示,此时其面积S仍为1。若此脉冲宽度继续缩小至极限情况,即若$\tau\to0$,则$\frac{1}{\tau}\to\infty$,这时$g_\tau(t)$变为一个宽度为无穷小,高度为无穷大,但面积仍为1的极窄脉冲,如图3-36(c)所示。为了研究方便,把上述极限抽象为一个奇异函数,把它称为单位冲激函数,记为$\delta(t)$,其定义为

$$\begin{cases}\delta(t)=0, & t\neq0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{3-49}$$

式(3-49)定义表明,$\delta(t)$是在瞬间出现又立即消失的信号,且幅值为无限大;在$t\neq0$时,始终为0,而积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\tag{3-50}$$

是该函数的面积,通常称为$\delta(t)$的强度。强度为A的冲激信号可记为$A\delta(t)$。这种用积分结果定义函数的目的,是强调$\delta(t)$"做了"什么,而不是强调$\delta(t)$"是"什么。由于冲激函数的定义与普通函数不同,所以很长时间理论界争论不休。直到1950年施瓦斯提出广义函数理论并证明$\delta(t)$完全合理后,20年的争论风波才平息下来。

延迟t_0的冲激信号定义为

$$\begin{cases}\delta(t-t_0)=0, & t\neq t_0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{3-51}$$

其波形如图3-37所示,其中符号(1)表示强度。

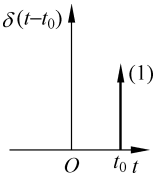


图3-37　冲激信号的延迟

2. 单位冲激函数和单位阶跃函数之间的关系

根据$\delta(t)$的定义,由于$\delta(t)$只在$t=0$时存在,所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0-}^{0+}\delta(t)\mathrm{d}t=1\tag{3-52}$$

故有

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{3-53}$$

根据$\varepsilon(t)$的定义,应有

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-54}$$

式(3-54)表明单位冲激信号的积分为单位阶跃函数;反之,单位阶跃信号的导数应为单位冲激函数,即

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3-55}$$

还有延迟t_0后的冲激函数和阶跃函数之间的关系:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t-t_0) \tag{3-56}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t-t_0)=\delta(t-t_0) \tag{3-57}$$

值得指出的是,在引入$\delta(t)$的前提下,函数在不连续点处也有导数值。

例 3-12 $f(t)$的波形如图 3-38(a)所示,试求其一阶导数并画出波形。

解 首先利用阶跃函数的组合表示$f(t)$

$$f(t)=\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)-4\varepsilon(t-3)+2\varepsilon(t-4)$$

对上式求导得

$$f'(t)=\delta(t-1)+\delta(t-2)-4\delta(t-3)+2\delta(t-4)$$

其波形如图 3-38(b)所示。 ■

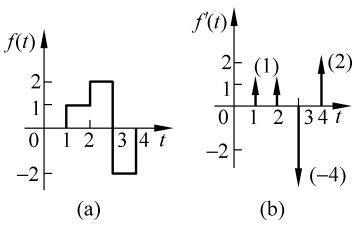


图 3-38 例 3-12 的波形

3. δ 函数的性质

(1) δ 函数的筛选性质

δ 函数有一个重要的结果,称为δ函数的筛选性质。若函数$f(t)$在$t=0$连续,由于$\delta(t)$只在$t=0$存在,故有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{3-58}$$

若$f(t)$在$t=t_0$连续,则有

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{3-59}$$

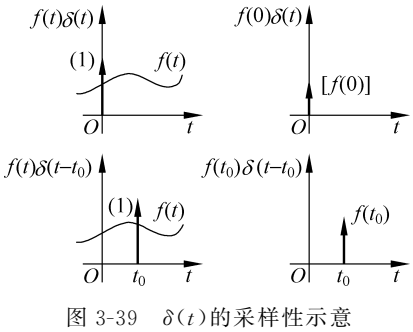


图 3-39 $\delta(t)$的采样性示意

以上说明,冲激函数可以把冲激所在位置处的函数值抽取(筛选)出来,如图 3-39 所示。δ 函数的这一重要性质在近代物理和工程技术等领域有着广泛的应用。

利用$\delta(t)$的采样性,可以得到两个重要的积分结果:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(0)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)\end{cases} \tag{3-60}$$

例 3-13　利用冲激函数的性质求下列积分：

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{1}{4}\right)\sin(\pi t)\mathrm{d}t$；

(b) $\int_{0_-}^{3}\mathrm{e}^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)\mathrm{d}t$($k$ 取整数)；

(c) $\int_{0_+}^{3}\mathrm{e}^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)\mathrm{d}t$($k$ 取整数)；

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)\frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t$。

解

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{1}{4}\right)\sin(\pi t)\mathrm{d}t=\sin(\pi t)\mid_{t=\frac{1}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(b) $\int_{0_-}^{3}\mathrm{e}^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{3}\mathrm{e}^{-2t}[\delta(t)+\delta(t-2)]\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-2t}\mid_{t=0}+\mathrm{e}^{-2t}\mid_{t=2}=1+\mathrm{e}^{-4}$；

(c) $\int_{0_+}^{3}\mathrm{e}^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)\mathrm{d}t=\int_{0_+}^{3}\mathrm{e}^{-2t}\delta(t-2)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-2t}\mid_{t=2}=\mathrm{e}^{-4}$；

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)\frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t=\lim_{t\to 0}2\frac{\sin(\pi t)}{t}=2\pi$。 ■

(2) $\delta(t)$函数是偶函数，即

$$\delta(t)=\delta(-t) \tag{3-61}$$

若 τ 为某一时间值，则得

$$\delta(t-\tau)=\delta(\tau-t) \tag{3-62}$$

(3) 尺度变换性质

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{3-63}$$

(4) 冲激信号的重要作用就是任意信号 $f(t)$均可以表示为无穷多个冲激信号的线性组合。如图 3-40 所示 $f(t)$，当 $\Delta t\to 0$ 时，可以用冲激信号的线性组合逼近 $f(t)$。

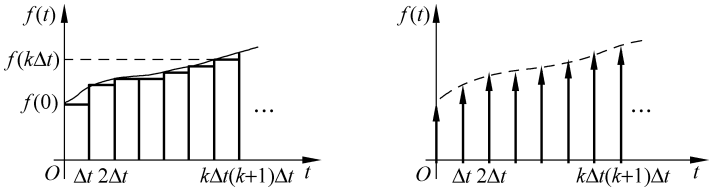


图 3-40　任意信号的冲激组合表示

在理论分析中，还经常用到 $\delta(t)$的导数，即

$$\delta'(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \tag{3-64}$$

它可以看作是位于原点的极窄矩形脉冲的导数极限，因而 $\delta'(t)$的波形由两个分别出现在

0_- 和 0_+ 的强度相等的正负冲激函数组成，如图 3-41 所示。通常把 $\delta'(t)$ 称为冲激偶。

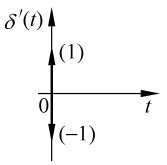


图 3-41　冲激偶的表示

由以上分析可知冲激偶有以下特点。

① 冲激偶的积分等于 $\delta(t)$，即

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-65}$$

② 冲激偶是奇函数，正、负两个冲激面积之和为零，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=0 \tag{3-66}$$

③ 当 $\delta'(t)$ 与连续信号 $f(t)$ 相乘时，可以筛选出 $f(t)$ 在 $t=0$ 时的变化速率值，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=-f'(0) \tag{3-67}$$

这是因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\delta(t)\mathrm{d}t=-f'(0)$$

3.5.2 冲激响应

线性时不变系统的单位冲激响应，是指系统初始状态为零，激励为单位冲激信号作用下的响应，简称冲激响应，用 $h(t)$ 表示。

系统的冲激响应也属于零状态响应。图 3-42 为上述定义的直观示意图。

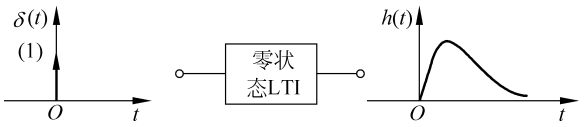


图 3-42　冲激响应的示意图

一般地，若一阶系统在 $\delta(t)$ 作用下有方程

$$y'(t)+ay(t)=K\delta(t) \tag{3-68}$$

其冲激响应为

$$h(t)=y_{zs}(t)=K\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t) \tag{3-69}$$

对因果系统，当 $t<0$ 时，必有 $h(t)=0$。

例 3-14　如图 3-43 所示 RC 电路，设 $u_C(0_-)=0$。输入信号为 $\delta(t)$，试以 $u_C(t)$ 为响应，求冲激响应 $h(t)$。

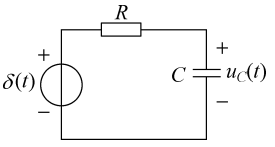


图 3-43　例 3-14 的电路

解　电路的微分方程为

$$u_C'(t)+\frac{1}{RC}u_C(t)=\frac{1}{RC}\delta(t)$$

这里，$a=\dfrac{1}{RC}$，由式(3-69)得冲激响应

$$h(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\quad t\geqslant 0$$

■

需要说明的是，冲激响应并不是专指某一输出量，只要输入信号为 $\delta(t)$，系统中任意处的电流或电压输出都称为冲激响应 $h(t)$。在例 3-14 中，若以电流 $i(t)$ 为冲激响应（输出），则

$$h(t)=i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)\right]=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

下面讨论阶跃响应 $s(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 的关系。

因为 $\varepsilon(t)$ 和 $\delta(t)$ 的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对于 LTI 系统而言，由微分、积分特性必然有

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3-70}$$

相应地有

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3-71}$$

这就是说，对于 LTI 系统，冲激响应等于阶跃响应的导数；阶跃响应等于冲激响应的积分。这种关系不但适用于一阶系统，也适用于高阶系统。

例如，若阶跃响应为

$$s(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

则其冲激响应

$$h(t)=s'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\right]=\delta(t)-\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)-\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\right]=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

小　　结

（1）典型的控制信号。

① 直流信号 $f(t)=A(-\infty<t<\infty)$

② 正弦信号 $f(t)=K\sin(\omega t+\theta)$

③ 单位阶跃信号 $\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$

④ 矩形脉冲信号 $g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$

⑤ 斜坡信号 $r(t)=t\varepsilon(t)$

⑥ 符号函数 $\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$

⑦ 实指数信号 $f(t)=K\mathrm{e}^{-at}$

⑧ 复指数信号 $f(t)=K\mathrm{e}^{st}$ $(s=\alpha+\mathrm{j}\omega)$

⑨ 采样函数 $\mathrm{Sa}(t)$

⑩ 单位冲激信号 $\delta(t)$

(2) 信号的基本运算。

① 信号相加与相乘：两个信号相加(相乘)可得到一个新的信号，它在任意时刻的值等于两个信号在该时刻的值之和(积)。

② 信号反转(褶)：信号的反转(或反褶)是将信号 $f(t)$ 的自变量 t 换为 $-t$，可得到另一个信号 $f(-t)$。

③ 信号延时：将信号 $f(t)$ 的自变量 t 换为 $t\pm t_0$，t_0 为正实常数，则可得到另一个信号 $f(t\pm t_0)$。

④ 尺度变换：将信号 $f(t)$ 的自变量 t 换为 αt，α 为正实常数，则信号 $f(\alpha t)$ 将在时间尺度上压缩或扩展。

⑤ 微分运算

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=f'(t)=f^{(1)}(t)$$

⑥ 积分运算

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f^{(-1)}(t)$$

(3) 对于线性时不变(LTI)控制系统来说，描述这类系统输入-输出特性关系，常用的数学模型是常系数线性微分方程。

对于 n 阶微分方程

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

此方程的完全解由两部分组成，这就是齐次解和特解。

(4) 系统时域响应是指在典型输入信号作用下，系统的输出量或信号。在时域经典法求解系统的完全响应时，一个广泛应用的分解是把响应分为零输入响应(Zero-Input Response，ZIR)和零状态响应(Zero-State Response，ZSR)两部分，即

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

(5) 单位阶跃信号和单位冲激信号是两个重要的信号，它们的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

(6) 线性时不变系统的单位冲激响应，是指系统初始状态为零，激励为单位冲激信号作用下的响应，简称冲激响应，用 $h(t)$ 表示。由单位阶跃信号引起的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，记为 $s(t)$。

单位冲激响应和单位阶跃响应的关系为

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

习　　题

3-1　画出下列信号的波形。

(1) $f(t)=\sin\pi t\varepsilon(t)+\sin\pi(t-1)\varepsilon(t-1)$；

(2) $f(t)=2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-2)$；

(3) $f(t)=\sin\pi t\cdot[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-6)]$。

3-2　试用阶跃信号表示如图 3-44 所示的波形。

3-3　如图 3-45 所示信号 $f(t)$，试画出 $f(2t)$，$f(t+2)$，$f(2t+2)$，$f(-2t+2)$的波形。

3-4　已知 $f(t)$(见图 3-46)，画出 $f(2t)$和 $f\left(\frac{t}{2}\right)$的波形。

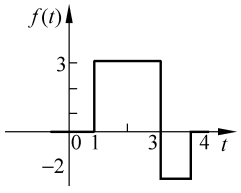


图 3-44　题 3-2 的图

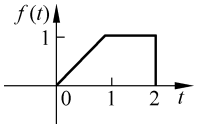


图 3-45　题 3-3 的图

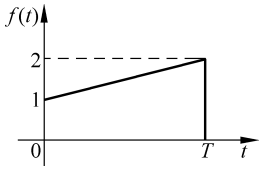


图 3-46　题 3-4 的图

3-5　判断下列关于信号波形变换的说法是否正确？

(1) $f(-t+1)$是将 $f(-t)$左移一个时间单位而得；

(2) $f(2t+1)$是将 $f(t+1)$波形压缩 0.5 而得；

(3) $f(2t+1)$是将 $f(2t)$左移一个时间单位而得；

(4) $f(2t+1)$是将 $f(2t)$左移 0.5 个时间单位而得。

3-6　求解方程$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=\frac{1}{2}+t$，$u(0)=0$。

3-7　如图 3-47 所示的电路系统，以电容上电压 $u_C(t)$为响应列写其微分方程。

3-8　如图 3-48 所示的 LC 振荡电路，$L=\frac{1}{16}\mathrm{H}$，$C=4\mathrm{F}$，$u_C(0)=1\mathrm{V}$，$i_L(0)=1\mathrm{A}$，求零输入响应 $u_C(t)$和 $i_L(t)$。

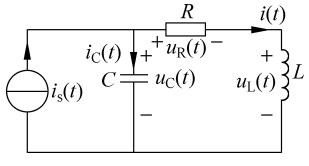


图 3-47　题 3-7 的图

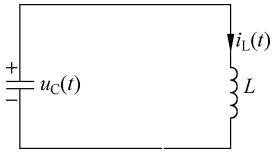


图 3-48　题 3-8 的图

3-9　设某二阶系统的方程为$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+2y(t)=0$，其对应的 0_+ 状态条件为

$y(0_+)=1$，$y'(0_+)=2$，求系统的零输入响应。

3-10　如图 3-49 所示电路，已知激励信号 $x(t)=\cos 2t\,\varepsilon(t)$，两个电容上的初始电压均为零，求输出信号 $v_2(t)$ 的表达式。

3-11　电路如图 3-50 所示，$R=500\Omega$，$C=1\mu F$，$L=1H$，$i_s(t)=\varepsilon(t)A$，当 $t=0$ 时，把开关 K 拉开，试求系统的阶跃响应 $i_L(t)$、$u_C(t)$、$i_C(t)$。

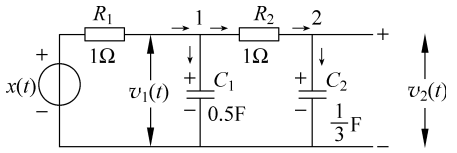


图 3-49　题 3-10 的图

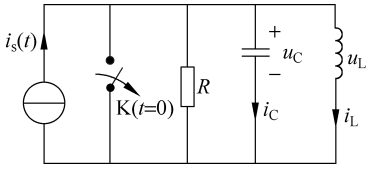


图 3-50　题 3-11 的图

3-12　计算：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-1)\mathrm{d}t$；

(2) $\int_{0_-}^{\infty} \cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)\delta(t)\mathrm{d}t$；

(3) $\int_{0_+}^{\infty} \cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)\delta(t)\mathrm{d}t$；

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varepsilon(t-2t_0)\mathrm{d}t$；

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]\mathrm{d}t$。

3-13　化简：

(1) $f(t)\delta(t-3)$；

(2) $\delta(t)+\sin t\cdot\delta(t)$；

(3) $2\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)$；

(4) $\cos t\cdot\delta(t)$；

(5) $t\delta(t-1)$。

3-14　化简函数 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon(t)\right]$。

3-15　计算如图 3-51(a)～图 3-51(d)所示信号的导数 $f'(t)$，并画出波形。

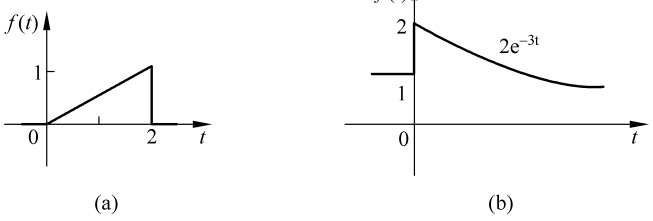
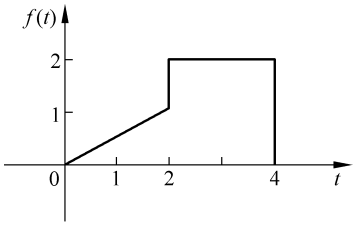
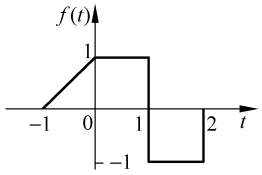


图 3-51　题 3-15 的图



(c)



(d)

图 3-51　(续)

常微分方程

1. 微分方程的概念

方程对于学过中学数学的人来说是比较熟悉的；在初等数学中就有各种各样的方程，比如线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程和方程组等。这些方程都是要把研究的问题中的已知数和未知数之间的关系找出来，列出包含一个未知数或几个未知数的一个或者多个方程式，然后求取方程的解。

但是在实际工作中，常常出现一些特点和以上方程完全不同的问题。比如，物质在一定条件下的运动变化，要寻求它的运动、变化的规律；某个物体在重力作用下自由下落，要寻求下落距离随时间变化的规律；火箭在发动机推动下在空间飞行，要寻求它飞行的轨道等。

物质运动和它的变化规律在数学上是用函数关系来描述的，因此，这类问题就是要去寻求满足某些条件的一个或者几个未知函数。也就是说，凡是这类问题都不是简单地去求一个或者几个固定不变的数值，而是要求一个或者几个未知的函数。

解这类问题的基本思想和初等数学解方程的基本思想很相似，也是要把研究的问题中已知函数和未知函数之间的关系找出来，从列出的包含未知函数的一个或几个方程中去求得未知函数的表达式。但是无论在方程的形式、求解的具体方法、求出解的性质等方面，都和初等数学中的解方程有许多不同的地方。

在数学上，解这类方程，要用到微分和导数的知识。因此，凡是表示未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程，就叫作微分方程。

微分方程差不多是和微积分同时产生的(1676 年)，苏格兰数学家耐普尔创立对数的时候，就讨论过微分方程的近似解。牛顿在建立微积分的同时，对简单的微分方程用级数来求解。后来瑞士数学家雅各布·伯努利、欧拉及法国数学家克雷洛、达朗贝尔、拉格朗日等人又不断地研究和丰富了微分方程的理论。

常微分方程的形成与发展是和力学、天文学、物理学，以及其他科学技术的发展密切相关的。

如牛顿研究天体力学的时候，利用了微分方程这个工具，从理论上得到了行星的运动规律，证实了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆形，澄清了当时地球坠毁于太阳的论点。后来，法国天文学家勒维烈和英国天文学家亚当斯使用微分方程各自计算出那时尚未发现的

海王星的位置。这些都使数学家更加深信微分方程在认识自然、改造自然方面的巨大力量。

随着微分方程理论的逐步完善,利用它就可以精确地表述事物变化所遵循的基本规律,只要列出相应的微分方程,有了解方程的方法,微分方程也就成了最有生命力的数学分支。

2. 常微分方程的解

常微分方程是指包含一个自变量和它的未知函数以及未知函数的微分的等式。

一般地说,n 阶微分方程的解含有 n 个任意常数。也就是说,微分方程的解中含有任意常数的个数和方程的解数相同,这种解叫作微分方程的通解。通解构成一个函数族。

如果根据实际问题要求出其中满足某种指定条件的解来,那么求这种解的问题叫作定解问题,对于一个常微分方程的满足定解条件的解叫作特解。对于高阶微分方程可以引入新的未知函数,把它化为多个一阶微分方程组。

3. 常微分方程的特点

常微分方程的概念、解法和其他理论很多,比如,方程和方程组的种类及解法、解的存在性和唯一性、奇解、定性理论等。下面就方程解的有关几点简述一下,以了解常微分方程的特点。

求通解在历史上曾作为微分方程的主要目标,一旦求出通解的表达式,就容易从中得到问题所需要的特解。也可以由通解的表达式,了解对某些参数的依赖情况,便于参数取适宜的值,使它对应的解具有所需要的性能,还有助于进行关于解的其他研究。

后来的发展表明,能够求出通解的情况不多,在实际应用中所需要的多是求满足某种指定条件的特解。当然,通解是有助于研究解的属性的,但是人们已把研究重点转移到定解问题上来。

一个常微分方程是不是有特解呢? 如果有,又有几个呢? 这是微分方程论中一个基本的问题,数学家把它归纳成基本定理,叫作存在和唯一性定理。因为如果没有解,而人们要去求解,那是没有意义的; 如果有解而又不是唯一的,那又不好确定。因此,存在和唯一性定理对于微分方程的求解是十分重要的。

大部分的常微分方程求不出十分精确的解,而只能得到近似解。当然,这个近似解的精确程度是比较高的。另外还应该指出,用来描述物理过程的微分方程,以及由实验测定的初始条件也是近似的,这种近似之间的影响和变化还必须在理论上加以解决。

现在,常微分方程在很多学科领域内有着重要的应用,自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究等,这些问题都可以化为求常微分方程的解,或者化为研究解的性质的问题。应该说,应用常微分方程理论已经取得了很大的成就,但是,它的现有理论还远远不能满足实际需要,还有待进一步的发展,使这门学科的理论更加完善。