

第3章

CHAPTER 3

工作原理

本章主要介绍时域有限差分(FDTD)方法的基本工作原理,主要包括介绍利用离散有限差分近似计算偏微分的有限差分数学基础,FDTD方法的时空离散特性和空间网格剖分,与电磁波相关的麦克斯韦旋度方程的FDTD更新公式,以及FDTD的数值色散和数值稳定性条件。本章内容是FDTD方法的基础,对理解FDTD的算法设计和编程实现具有重要作用。

3.1 二阶中心差分格式

有限差分法是先将连续变量按某种方式进行离散,然后用离散量的差商近似替代连续变量的微商来构造差分方程或更新公式,再通过求解线性方程组或进行循环迭代法来获得离散节点上的变量数值的一种数值求解方法。有限差分法的首要任务是选择合适的差分格式,使得它的数值解既能保持原问题的主要性质,又能满足工程问题需要的精度。对于求解仅含有一阶偏微分运算的时域麦克斯韦方程组旋度方程,二阶中心差分格式是最佳选择。

为了说明利用有限差分来近似计算连续函数导数的可行性和计算精度,下面以求解一元函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 为例进行分析。如图 3.1 所示,对连续函数 $f(x)$ 以间隔 $\Delta x/2$ 进行空间离散,则 $f(x)$ 的前后两个采样值

$f(x \pm \Delta x/2)$ 在 x 点处的泰勒级数展开式为

$$f\left(x \pm \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x) \pm \frac{\Delta x}{2} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{8} f''(x) \pm \frac{(\Delta x)^3}{48} f'''(x) + O((\Delta x)^3) \quad (3.1)$$

将上式中带正负号的两个泰勒级数展开式相减,并经过整理可获取一阶导数的差分格式

$$f'(x) = \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} - O((\Delta x)^2) \approx \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

这就是一阶导数的中心差分近似,其误差主项为 $(\Delta x)^2 f'''(x)/24$,因此中心差分具有二阶精度,因此式(3.2)也称为二阶中心差分格式。从图 3.1 也可以看到,连接 $f(x)$ 的前后两个离散节点 $f(x \pm \Delta x/2)$ 的直线,与 $f(x)$ 在 x 点处的切线基本平行,因此从几何上看两者亦具有较好的近似程度。当 Δx 取值越小时,这种近似程度越高,计算误差越小。当然对于同样尺寸的问题,若减小离散间隔,离散节点数和计算量会相应增加,将加重计算机资源负担。因此,对于计算电磁学的各种数值计算方法,仿真计算精度和计算资源消耗量往往是一对矛盾体。

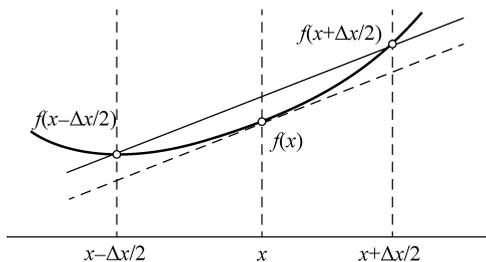


图 3.1 中心差分近似计算一阶导数示意图

采用式(3.2)所代表的中心差分格式近似计算一阶导数 $f'(x)$ 还有一个突出的优点就是差分格式中只涉及 $f(x)$ 的前后两个采样值 $f(x \pm \Delta x/2)$, 而不涉及 $f(x)$ 本身的数值。这个特点对 FDTD 方法具有重要的意义,因为在 FDTD 方法中电场(或磁场)的两个相邻节点之间的中心位置处并不存在电场(或磁场)的节点值,而是另外一个场量——磁场(或电场)的节点值。在 FDTD 方法中,将大量使用式(3.2)所代表的二阶中心差分格式对时域麦克斯韦方程组旋度方程中的偏微分运算进行替代。

假设在直角坐标系下, $f(x, y, z, t)$ 为电磁场矢量在直角坐标系下的某一个分量标量,三个坐标轴方向的空间离散间隔分别为 Δx 、 Δy 和 Δz ,时间

上的离散间隔为 Δt , 后者一般称为时间步长。在 FDTD 方法中, 一般将 $f(x, y, z, t)$ 在 $t = n\Delta t$ 时刻位于空间离散节点 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ 处的节点数值约定标记为

$$f(x, y, z, t) = f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \triangleq f^n(i, j, k) \quad (3.3)$$

一般情况下 FDTD 的更新公式较长, 以上简记法在不影响理解的同时极大缩短了公式长度, 既提高了阅读速度, 也节省了笔墨纸张。下面以 f 对坐标轴变量 x 和时间 t 的一阶偏微分为例进行说明。根据中心差分格式, $f(x, y, z, t)$ 关于 x 的一阶偏导数在 $x = i\Delta x$ 处的近似值可以写为

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=i\Delta x} \approx \frac{f^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - f^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} \quad (3.4)$$

而 $f(x, y, z, t)$ 关于 x 的一阶偏导数在 $x = (i + 1/2)\Delta x$ 处的近似值可以写为

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=(i+1/2)\Delta x} \approx \frac{f^n(i + 1, j, k) - f^n(i, j, k)}{\Delta x} \quad (3.5)$$

又如, $f(x, y, z, t)$ 关于 t 的一阶偏导数在 $t = n\Delta t$ 处的近似值可以写为

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=n\Delta t} \approx \frac{f^{n+1/2}(i, j, k) - f^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (3.6)$$

而 $f(x, y, z, t)$ 关于 t 的一阶偏导数在 $t = (n + 1/2)\Delta t$ 处的近似值可以写为

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=(n+1/2)\Delta t} \approx \frac{f^{n+1}(i, j, k) - f^n(i, j, k)}{\Delta t} \quad (3.7)$$

值得注意的是, 中心差分格式不仅可以计算一阶导数, 亦可以计算二阶导数。例如, 对连续函数 $f(x)$ 以间隔 Δx 进行空间离散, 则 $f(x)$ 的前后两个采样值 $f(x \pm \Delta x)$ 在 x 点处的泰勒级数展开式为

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) \pm \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + O((\Delta x)^3) \quad (3.8)$$

将上式中带正负号的两个泰勒级数展开式相加, 并经过整理可获取二阶导数的差分格式

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - O((\Delta x)^2) \\ &\approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

可见,用中心差分格式计算二阶导数亦具有二阶计算精度,其误差主项为 $(\Delta x)^2 f^{(4)}(x)/12$ 。式(3.9)在后面推导 FDTD 算法的稳定性条件和数值色散时要用到。

3.2 电磁场量时空离散

时域形式的麦克斯韦方程组是一组一阶的偏微分方程组,包含有电磁场各个分量对相应坐标轴和时间的一阶偏微分求导。从物理上看,电磁场各个分量都是坐标轴或时间的连续函数。根据电磁场理论,用于描述电磁波的两个麦克斯韦旋度方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_i \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M}_i \end{cases} \quad (3.10)$$

式中, \mathbf{J}_i 和 \mathbf{M}_i 分别是为激励产生电磁波而人为外加(impressed)的电流密度源和磁流密度源。值得注意的是,第一个方程中电磁波的传输媒质如果是导电媒质,其传导电流项 $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ 可以通过定义复介电常数而包含在 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 里面,从而极大方便了 FDTD 方法对材料的模块化仿真编程。为方便推导 FDTD 时域更新公式,将时间偏微分项移到方程的左边,有

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_i \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{M}_i \end{cases} \quad (3.11)$$

因计算机不方便存储矢量,上述方程适合写成关于电磁场分量的标量方程形式。这样,在直角坐标系中,关于电位移矢量 \mathbf{D} 的三个分量 D_x 、 D_y 和 D_z 的标量偏微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_{ix} \\ \frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - J_{iy} \\ \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_{iz} \end{cases} \quad (3.12)$$

关于磁感应强度矢量 \mathbf{B} 的三个分量 B_x 、 B_y 和 B_z 的标量偏微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - M_{1x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - M_{1y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - M_{1z} \end{cases} \quad (3.13)$$

由于计算机的存储容量及运算速度等计算资源的有限性,为了实现麦克斯韦方程组两个旋度方程的数值求解,我们必须对连续的电磁场量按照一定的空间或时间间隔进行离散化,使得有限数量的离散电磁场量有可能保存于计算机中。因此我们需要首先对电位移矢量 \mathbf{D} 和磁感应强度矢量 \mathbf{B} 进行空间和时间离散化。那么如何对电磁场矢量的六个分量进行时空离散就成为了重要的问题。

首先讨论电磁场分量的空间离散。1966年,美籍华人 K. S. Yee 分析了麦克斯韦方程组旋度方程的特点,结合式(3.12)和式(3.13)所示关于六个电磁场分量的标量方程,引入了一种极为巧妙的空间差分格式——Yee 元胞,从而在直角坐标系下建立起了 FDTD 方法的三维空间差分网格。图 3.2 给出以节点 (i, j, k) 和节点 $(i+1, j+1, k+1)$ 为长方体对角点的 Yee 元胞示意图以及电位移矢量 \mathbf{D} 和磁感应强度矢量 \mathbf{B} 的全部直角坐标分量在该元胞上所处的节点位置。另外,电磁强度矢量 \mathbf{E} 的三个分量所处节点位置与对应的电位移矢量 \mathbf{D} 的三个分量所处节点位置相同,磁场强度矢量 \mathbf{H} 的三个分量所处节点位置与对应的磁感应强度矢量 \mathbf{B} 的三个分量所处节点位置相同。为保持图形整洁,根据麦克斯韦旋度方程中电磁场量的关系,将上述十二个电磁场分量按 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 以及 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 分两组分别标示于两个 Yee 元胞中,以便在后续章节中推导相应的电磁场量更新公式。

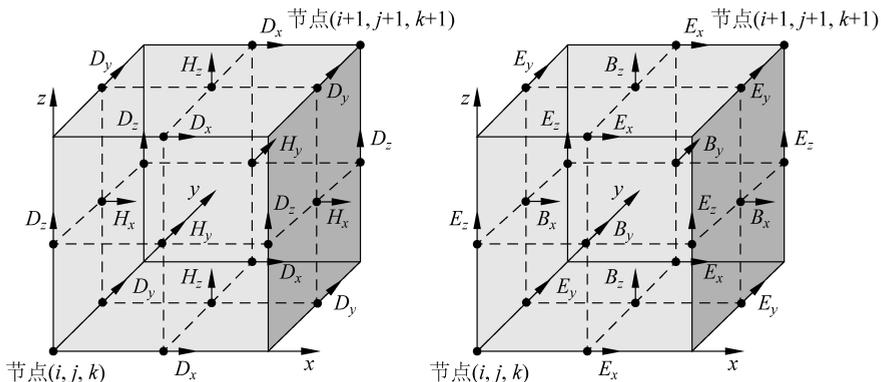


图 3.2 Yee 元胞以及全部电磁场分量的节点位置分布

从图 3.2 可以看到,电位移矢量 \mathbf{D} 或电场强度矢量 \mathbf{E} 的三个分量分别位于平行于坐标轴 x 、 y 和 z 轴的总共十二条棱边的中心点位置。磁感应强度矢量 \mathbf{B} 或磁场强度矢量 \mathbf{H} 的三个分量分别位于垂直于坐标轴 x 、 y 和 z 轴的总共六个矩形表面的中心点位置。这样设置电磁场分量节点位置的目的是:当 Yee 元胞沿着三个坐标轴方向复制拓展时,每个电场分量的四周均有四个磁场分量环绕,每个磁场分量的四周也有四个电场分量环绕,刚好与麦克斯韦方程组中的旋度运算所描述的物理场景相吻合。

同时,为了方便进行时域偏微分的数值计算,电场和磁场在时域上也需要进行离散化,所采用的时间间隔 Δt 一般称为时间步长。根据麦克斯韦方程组旋度方程中时域偏微分的特点,并依据传统习惯,可以设置电场的采样时刻为整数倍的时间步长,即 $t = n\Delta t$;磁场的采样时刻为整数加 $1/2$ 倍的时间步长,即 $t = (n+1/2)\Delta t$ 。因此,电场分量和磁场分量在采样时刻上错开了 $1/2$ 时间步长,从而方便了二阶中心差分格式的应用。

基于以上电磁场量的空间和时间离散规范,可以进一步明确 Yee 元胞中任一电磁场分量的时空标记。例如,在 $t = n\Delta t$ 时刻位于通过空间节点 (i, j, k) 且平行于 x 轴的棱边中点位置的电场 D_x 分量,可以标记为 $D_x^n(i+1/2, j, k)$;在 $t = (n+1/2)\Delta t$ 时刻位于空间节点 $(i+1/2, j+1/2, k)$ 处且平行于 z 轴的磁场 B_z 分量,可以标记为 $B_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k)$ 。表 3.1 给出了紧邻空间节点 (i, j, k) 的电磁场各直角坐标分量的空间离散编号、时间离散编号以及电磁场分量离散标记符号,供读者们在推导 FDTD 更新公式时参考。

表 3.1 Yee 元胞中各电磁场分量的时空离散编号及离散标记符号

电磁场分量	空间离散编号 ($x/\Delta x, y/\Delta y, z/\Delta z$)	时间离散编号 ($t/\Delta t$)	电磁场分量离散标记符号
D_x	$(i+1/2, j, k)$	n	$D_x^n(i+1/2, j, k)$
E_x	$(i+1/2, j, k)$		$E_x^n(i+1/2, j, k)$
D_y	$(i, j+1/2, k)$		$D_y^n(i, j+1/2, k)$
E_y	$(i, j+1/2, k)$		$E_y^n(i, j+1/2, k)$
D_z	$(i, j, k+1/2)$		$D_z^n(i, j, k+1/2)$
E_z	$(i, j, k+1/2)$		$E_z^n(i, j, k+1/2)$
B_x	$(i, j+1/2, k+1/2)$	$n+1/2$	$B_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2)$
H_x	$(i, j+1/2, k+1/2)$		$H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2)$
B_y	$(i+1/2, j, k+1/2)$		$B_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2)$
H_y	$(i+1/2, j, k+1/2)$		$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2)$
B_z	$(i+1/2, j+1/2, k)$		$B_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k)$
H_z	$(i+1/2, j+1/2, k)$		$H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k)$

值得注意的是,上述电磁场分量的节点位置编号中含有 $1/2$,然而利用 C 语言或 MATLAB 语言进行 FDTD 编程时,用于存储电磁场各个分量的数组(三维问题)、矩阵(二维问题)和向量(一维问题)的元素索引变量只能为整数,因而采用以上编号不利于编程实现。在不引起混淆的前提下,将各电磁场分量的空间离散节点编号进行如下转换:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x, E_x : (i + 1/2, j, k) \Rightarrow (i, j, k) \\ D_y, E_y : (i, j + 1/2, k) \Rightarrow (i, j, k) \\ D_z, E_z : (i, j, k + 1/2) \Rightarrow (i, j, k) \\ B_x, H_x : (i, j + 1/2, k + 1/2) \Rightarrow (i, j, k) \\ B_y, H_y : (i + 1/2, j, k + 1/2) \Rightarrow (i, j, k) \\ B_z, H_z : (i + 1/2, j + 1/2, k) \Rightarrow (i, j, k) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

以上转换确保了索引编号均是整数,方便了各电磁场分量存储数组的初始化和元素索引。不过,在设计 FDTD 算法和编写程序代码时一定要记住各离散电磁场分量所处的实际位置仍是转换前 Yee 元胞里规定的离散节点位置。

假设 FDTD 仿真计算空间为长方体区域,按照指定的空间离散参数进行离散剖分后,在 x 、 y 和 z 轴方向各剖分出 N_x 、 N_y 和 N_z 个 Yee 元胞,并以最左前下的 Yee 元胞的左前下角点作为仿真区域的坐标原点 $(0, 0, 0)$,那么上述节点编号 i 、 j 和 k 是从 0 开始的整数。

由于 C 语言中数组的索引变量(也称为下标)也是从 0 开始的整数,因此若使用 C 语言进行 FDTD 编程,直接使用式(3.14)的变换公式即可,并且 C 语言程序代码中各电磁场分量的实际节点位置、场量存储数组尺寸以及存储数组索引范围如下所列:

- (1) C 语言编程中的电场分量 $D_x(i, j, k)$ 或 $E_x(i, j, k)$
 - 场量实际节点位置: $x = (i + 1/2)\Delta x$; $y = j\Delta y$; $z = k\Delta z$
 - 场量存储数组尺寸: $N_x \times (N_y + 1) \times (N_z + 1)$
 - 存储数组索引范围: $i = 0 : (N_x - 1)$; $j = 0 : N_y$; $k = 0 : N_z$
- (2) C 语言编程中的电场分量 $D_y(i, j, k)$ 或 $E_y(i, j, k)$
 - 场量实际节点位置: $x = i\Delta x$; $y = (j + 1/2)\Delta y$; $z = k\Delta z$
 - 场量存储数组尺寸: $(N_x + 1) \times N_y \times (N_z + 1)$
 - 存储数组索引范围: $i = 0 : N_x$; $j = 0 : (N_y - 1)$; $k = 0 : N_z$
- (3) C 语言编程中的电场分量 $D_z(i, j, k)$ 或 $E_z(i, j, k)$
 - 场量实际节点位置: $x = i\Delta x$; $y = j\Delta y$; $z = (k + 1/2)\Delta z$
 - 场量存储数组尺寸: $(N_x + 1) \times (N_y + 1) \times N_z$
 - 存储数组索引范围: $i = 0 : N_x$; $j = 0 : N_y$; $k = 0 : (N_z - 1)$

(4) C 语言编程中的磁场分量 $B_x(i, j, k)$ 或 $H_x(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=i\Delta x$; $y=(j+1/2)\Delta y$; $z=(k+1/2)\Delta z$

○ 场量存储数组尺寸: $(N_x+1)\times N_y\times N_z$

○ 存储数组索引范围: $i=0:N_x$; $j=0:(N_y-1)$; $k=0:(N_z-1)$

(5) C 语言编程中的磁场分量 $B_y(i, j, k)$ 或 $H_y(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=(i+1/2)\Delta x$; $y=j\Delta y$; $z=(k+1/2)\Delta z$

○ 场量存储数组尺寸: $N_x\times(N_y+1)\times N_z$

○ 存储数组索引范围: $i=0:(N_x-1)$; $j=0:N_y$; $k=0:(N_z-1)$

(6) C 语言编程中的磁场分量 $B_z(i, j, k)$ 或 $H_z(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=(i+1/2)\Delta x$; $y=(j+1/2)\Delta y$; $z=k\Delta z$

○ 场量存储数组尺寸: $N_x\times N_y\times(N_z+1)$

○ 存储数组索引范围: $i=0:(N_x-1)$; $j=0:(N_y-1)$; $k=0:N_z$

如果是利用 MATLAB 软件进行编程, 由于 MATLAB 对数组索引变量 i 、 j 和 k 是从 1 开始的正整数, 因此场量存储数组的索引范围与 C 语言不同。MATLAB 程序代码中各电磁场分量和激励源的实际节点位置、场源存储数组尺寸, 以及存储数组索引范围如下所列:

(1) MATLAB 编程中的电场分量 $D_x(i, j, k)$ 或 $E_x(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=(i-1/2)\Delta x$; $y=(j-1)\Delta y$; $z=(k-1)\Delta z$

○ 场量存储数组尺寸: $N_x\times(N_y+1)\times(N_z+1)$

○ 存储数组索引范围: $i=1:N_x$; $j=1:(N_y+1)$; $k=1:(N_z+1)$

(2) MATLAB 编程中的电场分量 $D_y(i, j, k)$ 或 $E_y(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=(i-1)\Delta x$; $y=(j-1/2)\Delta y$; $z=(k-1)\Delta z$

○ 场量存储数组尺寸: $(N_x+1)\times N_y\times(N_z+1)$

○ 存储数组索引范围: $i=1:(N_x+1)$; $j=1:N_y$; $k=1:(N_z+1)$

(3) MATLAB 编程中的电场分量 $D_z(i, j, k)$ 或 $E_z(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=(i-1)\Delta x$; $y=(j-1)\Delta y$; $z=(k-1/2)\Delta z$

○ 场量存储数组尺寸: $(N_x+1)\times(N_y+1)\times N_z$

○ 存储数组索引范围: $i=1:(N_x+1)$; $j=1:(N_y+1)$; $k=1:N_z$

(4) MATLAB 编程中的磁场分量 $B_x(i, j, k)$ 或 $H_x(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=(i-1)\Delta x$; $y=(j-1/2)\Delta y$; $z=(k-1/2)\Delta z$

○ 场量存储数组尺寸: $(N_x+1)\times N_y\times N_z$

○ 存储数组索引范围: $i=1:(N_x+1)$; $j=1:N_y$; $k=1:N_z$

(5) MATLAB 编程中的磁场分量 $B_y(i, j, k)$ 或 $H_y(i, j, k)$

○ 场量实际节点位置: $x=(i-1/2)\Delta x$; $y=(j-1)\Delta y$; $z=(k-1/2)\Delta z$

- 场量存储数组尺寸: $N_x \times (N_y + 1) \times N_z$
 - 存储数组索引范围: $i = 1:N_x$; $j = 1:(N_y + 1)$; $k = 1:N_z$
 - (6) MATLAB 编程中的磁场分量 $B_z(i, j, k)$ 或 $H_z(i, j, k)$
 - 场量实际节点位置: $x = (i - 1/2)\Delta x$; $y = (j - 1/2)\Delta y$; $z = (k - 1)\Delta z$
 - 场量存储数组尺寸: $N_x \times N_y \times (N_z + 1)$
 - 存储数组索引范围: $i = 1:N_x$; $j = 1:N_y$; $k = 1:(N_z + 1)$
- 若基于 MATLAB 软件平台编程,则上述电磁场分量的初始化 MATLAB 程序代码为

```

%% 设置元胞数
Nx = 100;           % 设置 x 轴方向的元胞数
Ny = 100;           % 设置 y 轴方向的元胞数
Nz = 100;           % 设置 z 轴方向的元胞数

%% 电磁场量初始化
Dx = zeros(Nx, Ny + 1, Nz + 1); % 初始化电场分量 Dx
Dy = zeros(Nx + 1, Ny, Nz + 1); % 初始化电场分量 Dy
Dz = zeros(Nx + 1, Ny + 1, Nz); % 初始化电场分量 Dz
Ex = zeros(Nx, Ny + 1, Nz + 1); % 初始化电场分量 Ex
Ey = zeros(Nx + 1, Ny, Nz + 1); % 初始化电场分量 Ey
Ez = zeros(Nx + 1, Ny + 1, Nz); % 初始化电场分量 Ez

Bx = zeros(Nx + 1, Ny, Nz);      % 初始化磁场分量 Bx
By = zeros(Nx, Ny + 1, Nz);      % 初始化磁场分量 By
Bz = zeros(Nx, Ny, Nz + 1);      % 初始化磁场分量 Bz
Hx = zeros(Nx + 1, Ny, Nz);      % 初始化磁场分量 Hx
Hy = zeros(Nx, Ny + 1, Nz);      % 初始化磁场分量 Hy
Hz = zeros(Nx, Ny, Nz + 1);      % 初始化磁场分量 Hz

```

3.3 电磁场量更新公式

FDTD 方法的核心算法思想,就是采用离散电磁场量二阶中心差分格式近似替代连续电磁场量关于空间和时间的一阶偏微分,代入时域旋度方程推导出各个电磁场分量的更新公式,进而通过时域上的迭代更新而不断获得后续时刻电磁场量空间分布的数值解。在前述二阶中心差分格式以及电磁场量时空离散方式基础上,可以逐一推导出式(3.12)和式(3.13)所代表的六个电磁场分量旋度方程所对应的 FDTD 更新公式。

下面先以推导电场分量 D_x 的更新公式为例,介绍如何从连续偏微分方程推导出对应的更新公式。根据麦克斯韦方程组, D_x 所遵循的一阶连续偏微分方程为

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_{ix} \quad (3.15)$$

根据 FDTD 中电磁场的时空离散特点,标记 D_x 的当前值为 $D_x^n(i+1/2, j, k)$,后一时刻的更新值为 $D_x^{n+1}(i+1/2, j, k)$,则根据中心差分格式有

$$\left. \frac{\partial D_x}{\partial t} \right|_{t=(n+1/2)\Delta t} \approx \frac{D_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - D_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} \quad (3.16)$$

因此,偏微分方程式(3.15)右边的磁场分量 H_z 、 H_y 以及外加电流 J_{ix} 对应的时刻应该是 $t=(n+1/2)\Delta t$ 。类似地,对于空间偏微分 $\partial H_z/\partial y$ 和 $\partial H_y/\partial z$,其中心差分格式分别为

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=j\Delta y} \approx \frac{H_z^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{z=k\Delta z} \approx \frac{H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \quad (3.18)$$

将式(3.16)、式(3.17)和式(3.18)代入式(3.15)并经过整理,可得到关于电场分量 D_x 的更新公式

$$\begin{aligned} D_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= D_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + \\ &\frac{\Delta t}{\Delta y} \left[H_z^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right) \right] - \\ &\frac{\Delta t}{\Delta z} \left[H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right) \right] - \\ &\Delta t J_{ix}^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

将上式转换为对应于 MATLAB 编程用的 D_x 更新公式

$$\begin{aligned} D_x^{n+1}(i, j, k) &= D_x^n(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\Delta y} [H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n+1/2}(i, j-1, k)] - \\ &\frac{\Delta t}{\Delta z} [H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n+1/2}(i, j, k-1)] - \Delta t J_{ix}^{n+1/2}(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.20)$$