

第 1 章 微积分和线性代数基本知识

数学已经成为经济学问题研究中不可或缺的工具,为理解、掌握及运用模型进行经济分析,需要具备一定的数学基础。本章在参考国内外数学教材、数理经济学教材如刘树林等教材的基础上^①,对动态随机一般均衡模型中涉及的微积分和线性代数知识进行简要介绍,并省略了复杂的数学推导,便于读者尽快回顾相关的数学知识。在本章部分内容的组织中,还参考了巴罗和萨拉-伊-马丁数学方法附录的内容^②。

1.1 微积分基础

1.1.1 导数与微分

1. 导数的定义

在进行比较静态分析时,需要对不同参数值或外生变量情形下的两种均衡状态进行比较。为便于对比,通常假设给定的初始均衡状态为起始点,令某些参数或外生变量发生变化,因而模型均衡做出改变并达到新的均衡。我们关注的问题之一是求变化率的问题,即在特定参数或外生变量变化时分析内生变量均衡值的变动特征。

例如,因变量 y 为自变量 x 的函数,即 $y=f(x)$,当变量 x 由初始值 x_0 变为 $x_0+\Delta x$ 时,函数值由 $f(x_0)$ 变为 $f(x_0+\Delta x)$,则由每单位 x 的变化引致 y 的变化可表示为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1-1)$$

式(1-1)度量的是 x 变化 Δx 单位时 y 的平均变化率,根据 Δx 很小时 y 的变化特征可以得到导数的定义式(1-2)。设函数 $y=f(x_0)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,如果存在极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1-2)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称此极限值为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数,记为 $f'(x_0)$, $y' \Big|_{x=x_0}$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$, $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$ 等;如果上述极限不存在,则函数 $y=f(x_0)$ 在点 x_0 处不可导。

2. 求导运算法则

(1) 函数四则运算的导数。假设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都在点 x 处可导,则两个函数的

① 刘树林,数理经济学[M].北京:科学出版社,2008.

② 巴罗,萨拉-伊-马丁.经济增长[M].夏俊,译.2版.上海:格致出版社,2010.

和、差、积、商均在点 x 处可导,且有

$$\begin{aligned} [cu(x)]' &= cu'(x) (c \text{ 为常数}) \\ [u(x) + v(x)]' &= u'(x) + v'(x) \\ [u(x)v(x)]' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \end{aligned}$$

(2) 复合函数求导数。设 $h(x) = f(g(x))$ 是函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数,且函数 $u = g(x)$ 在点 x_0 处可导,函数 $y = f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处可导,则复合函数 $h(x) = f(g(x))$ 在点 x_0 处可导,且有

$$h'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'[g(x_0)]g'(x_0)$$

一般地,当 x_0 为复合函数定义域中的任意点时,有

$$h'(x) \equiv [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

或可表示为链式法则式(1-3)。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (1-3)$$

(3) 隐函数求导数。隐函数定理: 设函数 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内具有连续偏导数,且有 $F_x(x_0, y_0) \neq 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域内能够唯一确定一个连续、可导的函数 $y = f(x)$, 其满足条件 $y_0 = f(x_0)$, 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad (1-4)$$

例如,对于隐函数 $f(x, y) = 3x^2 - 2y - 10$, 在计算导数 dy/dx 的值时,按照隐函数定理可得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f(x, y)/\partial x}{\partial f(x, y)/\partial y} = -\frac{6x}{-2} = 3x$$

3. 微分的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,点 x_0 和 $x_0 + \Delta x$ 都在该邻域内,如果函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为: $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中, A 是不依赖于 Δx 的常数, $o(\Delta x)$ 表示比 Δx 高阶的无穷小量,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, $A\Delta x$ 称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分,记作

$$dy|_{x=x_0} = A\Delta x \quad \text{或} \quad dy|_{x=x_0} = A dx \quad (1-5)$$

一般地,若函数 $f(x)$ 处处可微,则函数 $f(x)$ 在任意点 x 处的微分为: $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$ 或 $dy = df(x) = f'(x)dx$ 。

4. 微分运算法则

(1) 函数四则运算的微分法则。设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都在点 x 处可微,则两个函数的和、差、积、商均在点 x 处可微,且有

$$\begin{aligned} d(cu) &= c du (c \text{ 为常数}) \\ d(u \pm v) &= du \pm dv \end{aligned}$$

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

(2) 复合函数的微分法则。假设 $y = f[g(x)]$ 是两个可微函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数, 则其微分为

$$dy \equiv df[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)dx \quad (1-6)$$

其中, $f'[g(x)]$ 表示函数 $f(u)$ 在 $g(x)$ 处的导数。

(3) 微分形式的不变性。设函数 $y = f(u)$ 可导, 无论 u 是自变量, 还是某一自变量的可导函数 (u 为中间变量), 总有

$$dy = f'(u)du \quad (1-7)$$

(4) 全微分。如果将微分的定义推广至具有两个或两个以上自变量的函数, 例如函数 $y = y(x_1, x_2)$, 由 x_1 变化所引致的 y 的变化、由 x_2 变化所引致的 y 的变化可分别表示为 $(\partial y / \partial x_1)dx_1$ 和 $(\partial y / \partial x_2)dx_2$, 则由 x_1 和 x_2 共同引致的 y 的变化为式(1-8)或式(1-9)。

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 \quad (1-8)$$

$$dy = y_{x_1}dx_1 + y_{x_2}dx_2 \quad (1-9)$$

在式(1-8)或式(1-9)中, 等式左端的 dy 称为函数的全微分, 求解 dy 的过程称为全微分法; 等式右端的两项称为函数的偏微分。

例如, 在求函数 $U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$ 的全微分时, 首先分别求出函数对 x_1 与 x_2 的偏导数:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{和} \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2x_2 + 3x_1$$

将两个偏导数代入式(1-8)或式(1-9)中, 得到

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = (2x_1 + 3x_2)dx_1 + (2x_2 + 3x_1)dx_2$$

1.1.2 导数的应用

1. 泰勒定理

任意给定一个连续可微的函数 $f(x)$, 则围绕点 x_0 或在 x_0 处的泰勒展开为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n \quad (1-10)$$

其中, R_n 是余项, 为 x 的函数, 例如佩亚诺余项可以写为: $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$, $x \rightarrow x_0$, 拉格朗日余项形式则为

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

其中, ξ 位于 x_0 与 x 之间, 可写为: $\xi = [x_0 + \theta(x - x_0)]$, $\theta \in (0, 1)$ 。

例如,将函数 $f(x)=x^3$ 在 $x=1$ 处进行泰勒展开的形式为

$$f(x)=f(1)+3(x-1)+6(x-1)^2\frac{1}{2!}+6(x-1)^3\frac{1}{3!}+R_3$$

当函数中存在两个自变量时,如函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的 n 阶泰勒展开式为

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &+ f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2] + \cdots + R_n \end{aligned} \quad (1-11)$$

根据式(1-10)和式(1-11)可得,函数在某一点处的泰勒展开均可表示为该点的函数值、导数或偏导数、自变量与该点的距离之差三类元素的组合形式。在动态随机一般均衡模型中,经常使用泰勒展开方法将非线性微分方程或方程组线性化后,再进行模型的求解。

2. 洛必达法则

洛必达法则是求解 $0/0$ 型未定式时十分有效的方法。假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件: ① $x \rightarrow a$ 时, $\lim f(x)=0$ 且 $\lim g(x)=0$; ② 在点 a 的某去心邻域内, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导,且 $g(x)$ 的导数不等于 0; ③ $x \rightarrow a$ 时, $\lim[f'(x)/g'(x)]$ 存在或为无穷大,则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1-12)$$

式(1-12)即为洛必达法则。当等式右侧的极限存在时,等式左侧极限也存在且等于等式右侧的极限;当等式右侧的极限为无穷大时,左侧的极限也为无穷大。将式(1-12)中的 $x \rightarrow a$ 替换成 $x \rightarrow \infty$,得到对应于 $x \rightarrow \infty$ 时的洛必达法则。

3. 函数的单调性和凹凸性

在动态一般均衡模型设定中,函数的单调性和凹凸性等性质对于其求导以及模型的求解至关重要,对函数单调性和凹凸性的了解十分必要。

(1) 单调性。对于单调性而言,设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在区间 (a,b) 上可导,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增大的充要条件是在 (a,b) 上恒有 $f'(x) \geq 0$; $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少的充要条件是在 (a,b) 上恒有 $f'(x) \leq 0$ 。另外,在区间 (a,b) 上, $f'(x) > 0$ 对应于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增大, $f'(x) < 0$ 对应于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少。

(2) 凹凸性的定义。凹凸性方面,若对任意 $\lambda \in [0,1]$,对于定义域 (a,b) 中给定的任意点 u 和 v ,恒有

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \quad (1-13)$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的,若有

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \quad (1-14)$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的。将式(1-13)、式(1-14)中不等号分别换为严格不等号,即小于号“ $<$ ”、大于号“ $>$ ”,则得到了函数严格凸性和严格凹性的定义。

当函数具有可微性时,也可以采用一阶导数的方式定义函数的凹凸性。对于定义域

中给定的任意点 u 和 v , 可微凹函数、凸函数 $f(x)$ 的定义分别如式 (1-15) 和式 (1-16) 所示。

$$f(v) \leq f(u) + f'(u)(v-u) \quad (1-15)$$

$$f(v) \geq f(u) + f'(u)(v-u) \quad (1-16)$$

同样地, 式 (1-15)、式 (1-16) 中的不等号 “ $\leq$ ” 与 “ $\geq$ ” 分别换成严格不等号 “ $<$ ” 与 “ $>$ ”, 则得到严格凸性和严格凹性的定义。

(3) 凹凸函数定义的图形解释。在几何上, 将凹(凸)函数描绘成一条与其切线重合或者位于其切线下方(上方)的曲线, 而严格凹曲线(严格凸曲线)必须位于所有切线的下方(上方), 切点除外。以凹函数为例, 其图形如图 1-1 所示。

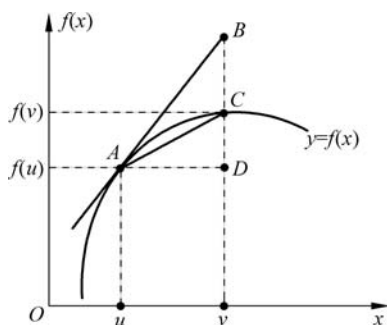


图 1-1 凹函数图形

在图 1-1 中, A 为曲线上的任意一点, 其高度为 $f(u)$, 过该点的切线为 AB 。当 x 自 u 开始递增时, 凹曲线应形成一个峰形, 即严格凹曲线必须逐渐向下弯曲, 远离切线 AB , 从而使得点 C 位于点 B 之下, 此时线段 AC 的斜率小于切线 AB 的斜率。若曲线为非严格凹曲线, 弧线 AC 可能变成一个线段并与 AB 重合, 成为曲线中的一个直线部分, AC 的斜率等于 AB 的斜率。在描述函数的凹凸性时, 还可以将原点作为基准, 将凹向原点的曲线视为凹函数, 将凸向原点的曲线视为凸函数。

(4) 函数凹凸性的判别准则。凹凸性的判别准则包括一阶微分判别标准和二阶微分判别标准。

在一阶微分判别标准中, 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 则:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为凸函数的充要条件是: 对任意 x_1 和 $x_2 \in (a, b)$, 有 $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$;

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为凹函数的充要条件是: 对任意 x_1 和 $x_2 \in (a, b)$, 有 $f(x_2) \leq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$;

将不等号 “ $\geq$ ” “ $\leq$ ” 分别换为严格不等号 “ $>$ ” 与 “ $<$ ”, 得到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为严格凸函数、严格凹函数的充要条件。

在二阶微分判别标准中, 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上二阶连续可导, 则:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为凸函数的充分条件是: 对任意 $x_1 \in (a, b)$, 有 $f''(x_1) \geq 0$;

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的凹函数的充分条件是: 对任意 $x_1 \in (a, b)$, 有 $f''(x_1) \leq 0$ 。

同理, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为严格凸函数、严格凹函数的充分条件分别是 $f''(x_1) > 0$ 和 $f''(x_1) < 0$ 。

4. 极值条件

(1) 极值的定义。设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, x_0 是 (a, b) 内的某一点, 如果存在一个点 x_0 的邻域, 使得对邻域内的任一点 $x (x \neq x_0)$, 总有 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值, 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值点。

函数的极大值与极小值统称为极值,极大值点与极小值点统称为极值点。

(2) 极值存在的必要条件。必要条件为:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,且 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极值点,则 $f'(x_0)=0$ 。

需要注意的是,满足 $f'(x_0)=0$ 的 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点,可导函数的极值点一定是驻点,反之不一定成立。典型的一个例子是,对于函数 $f(x)=x^3$ 而言, $x=0$ 是该函数的驻点但非极值点。此外,导数不存在的点也可能是极值点,例如函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处导数不存在,但点 $x=0$ 是函数的极小值点。可以认为,函数的极值点一定是其驻点或导数不存在的点。

(3) 极值存在的充分条件。充分条件分为两类:一类是一阶充分条件,另一类是二阶充分条件。

一阶充分条件:设 $f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内可导且 $f'(x_0)=0$ 。

如果在点 x_0 的左邻域 $(x_0-\delta, x_0)$ 内的任一点 x 处,恒有 $f'(x)>0$,而在其右邻域 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处,恒有 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;

如果在点 x_0 的左邻域 $(x_0-\delta, x_0)$ 内的任一点 x 处,恒有 $f'(x)<0$,而在其右邻域 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处,恒有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值。

二阶充分条件:设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$,则:

当 $f''(x_0)<0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;

当 $f''(x_0)>0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值。

1.1.3 积分法则

1. 积分的定义与类型

积分是微分的逆过程,设函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若给定原函数 $F(x)$,对其微分得到导数 $f(x)$,即 $F'(x)=f(x)$;假设可以得到适当信息确定在积分过程中产生的任意常数,则可通过对 $f(x)$ 积分以得到原函数 $F(x)$,函数 $F(x)$ 被称为 $f(x)$ 的积分。一般而言,积分可以分为不定积分和定积分两类。

不定积分的概念为, $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分,记作 $\int f(x)dx$,其中, $\int$ 称为积分号, x 为积分变量, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)dx$ 为被积表达式。若 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$,则不定积分可表示为

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1-17)$$

不定积分没有确定的数值,由于它等于 $F(x)+C$,其值随着 x 的变化而变化。因此,同导数一样,不定积分本身是 x 的函数。实际上,积分结果的正确性可以通过微分来检验,若积分是正确的,则积分的导数必然等于被积函数。

一个简单的例子是求不定积分 $\int \frac{1}{x^4}dx, x \neq 0$,由于 $\frac{1}{x^4}$ 的一个原函数为 $-\frac{1}{3x^3}$,不定

积分结果可写为: $\int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C$ 。

对于连续函数 $f(x)$ 的已知不定积分(1-17),若选择 x 定义域中的两个值 a 和 $b(a < b)$,依次将其代入方程的右边,并计算差值 $[F(b)+C]-[F(a)+C]=F(b)-F(a)$,则得到一个不再包含自变量 x 的具体数值,这一数值称为 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分,记作

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1-18)$$

式中, a 为积分下限; b 为积分上限。定积分的计算公式为

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1-19)$$

2. 分部积分法

设 $u(x), v(x)$ 均有连续的导数,根据求导法则,对函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的乘积求导数,有

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

对两边同时积分,得到

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) + \int v'(x)u(x) = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x)$$

整理得到分部积分法公式

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \quad (1-20)$$

例如,求不定积分 $\int \ln(x) dx, x > 0$ 时,可令 $v = \ln(x), u = x$,从而有 $dv = (1/x) dx$, $du = dx$,求得 $\int \ln(x) dx = \int v du = vu - \int u dv = x \ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C$ 。

3. 积分的微分法则

设 $F(t)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数,即 $F'(t) = f(t)$,则有

$$\frac{\partial \left[\int f(t) dt \right]}{\partial t} = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = F'(t) = f(t) \quad (1-21)$$

令 $F(a, b, c) = \int_a^b f(c, t) dt$, 其中 a 和 b 分别代表积分下限和积分上限, c 为函数 $f(c, t)$ 中的一个参数,则有

$$\frac{\partial F(\bullet)}{\partial c} = \int_a^b f_c(c, t) dt \quad (1-22)$$

$$\frac{\partial F(\bullet)}{\partial b} = \frac{\partial \left[\int_a^b f(c, t) dt \right]}{\partial b} = f(c, t) \Big|_{t=b} = f(b) \quad (1-23)$$

$$\frac{\partial F(\bullet)}{\partial a} = \frac{\partial \left[\int_a^b f(c, t) dt \right]}{\partial a} = -f(c, t) \Big|_{t=a} = -f(a) \quad (1-24)$$

1.1.4 微分方程

1. 基本概念

含有自变量 t 、因变量 y 或未知函数 $y = f(t)$ 、未知函数各阶导数的等式称为微分方程,若未知函数是一元函数则称为常微分方程;微分方程中未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶;一阶导数如 dy/dt 是在一阶微分方程中出现的唯一导数,但是其可能以不同的幂次出现,即 dy/dt 、 $(dy/dt)^2$ 、 $(dy/dt)^3$ 等,方程中导数的最高幂次称为微分方程的次。

当导数 dy/dt 仅为一次,因变量 y 也是一次,并且没有 $y(dy/dt)$ 乘积项等形式的前提下,此微分方程称为线性的。一阶线性微分方程的一般形式如式(1-25)所示。

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = x(t) \quad (1-25)$$

其中,函数 u 和 x 与 y 一样,都是 t 的函数,可以表示为如 t^2 、 e^t 、 t 的复杂函数,或是代表常数。当 u 和 x 表示常数,且 x 是一个可加性常数项时,式(1-25)简化为具有常数系数和常数项的一阶线性微分方程的情况。

若 x 恰好恒为零,则式(1-25)变为

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \quad (1-26)$$

其中, a 为一常数,考虑到常数项为 0,则此时的微分方程被称为齐次方程。

若 x 为一不为零的常数,式(1-25)变为非齐次方程,即

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \quad (1-27)$$

如果把已知函数及其导数或微分代入微分方程后能够使其成为恒等式,则称该函数为微分方程的一个解,微分方程的解通常有两种形式:若是这个解中任意常数的个数等于方程的阶数,则此解称为通解;若解中不含任意常数,则称为微分方程的特解。

2. 一阶常微分方程

一阶常微分方程的求解方法主要有两种:图解法和解析法。

(1) 图解法。在一阶常微分方程中,一阶导数 dy/dt 可以表示成为 y 的函数,即

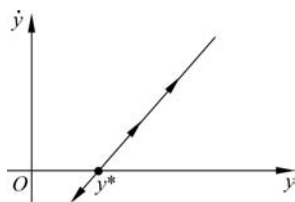
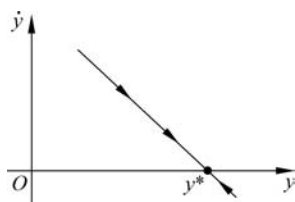
$$\dot{y}(t) = f[y(t)] \quad (1-28)$$

基于式(1-28),可根据函数 $f(y)$ 得到不同形式的常微分方程。一个典型的常微分方程是

$$\dot{y}(t) = f[y(t)] = ay(t) - x \quad (1-29)$$

式中, a 为常系数; x 为任一常数值。求解一阶常微分方程的示例如图 1-2 和图 1-3 所示。

当 $a > 0$ 时,可将式(1-29)表示的常微分方程绘制成图 1-2,其中 y^* 称为均衡值或稳态值,当 $y > y^*$ 时, $ay - x > 0$,即 $\dot{y} > 0$, y 为增函数;当 $y < y^*$ 时, $ay - x < 0$,即 $\dot{y} < 0$, y 为减函数,此时, $y(t)$ 是发散的;若 $a < 0$,则常微分方程解的图形如图 1-3 所示,当 $y > y^*$

图 1-2 $a > 0$ 情形下的微分方程求解图图 1-3 $a < 0$ 情形下的微分方程求解图

时, $ay - x < 0$, 即 $\dot{y} < 0$, y 为减函数; 当 $y < y^*$ 时, $ay - x > 0$, 即 $\dot{y} > 0$, y 为增函数, 此时 $y(t)$ 收敛到 y^* 。

当常微分方程中存在两个函数时, 即一阶导数 $\dot{y}$ 用两个函数进行表示时, 如式(1-30)所示。

$$\dot{y}(t) = f[y(t)] - g[y(t)] \quad (1-30)$$

微分方程式(1-30)的求解图形如图 1-4 所示。

在图 1-4 中, y^* 为该方程均衡点, 当 $y < y^*$ 时, $\dot{y} > 0$, y 为增函数; 当 $y > y^*$ 时, $\dot{y} < 0$, y 为减函数。A 点位于两条线之间, 一定会收敛到 y^* , 而 B 点则可能会发散。

当常微分方程如式(1-31)所示形式时, 即

$$\dot{y}(t) = sy^{\alpha}(t) - \delta y(t) \quad (1-31)$$

式中, $s, \alpha, \delta > 0$, 且 $0 < \alpha < 1$ 。

式(1-31)均衡点的求解对应于图 1-5。显然, y^* 为均衡点, 当 $y < y^*$ 时, $\dot{y} > 0$, y 为增函数; 当 $y > y^*$ 时, $\dot{y} < 0$, y 为减函数, 因此函数收敛到 y^* 。

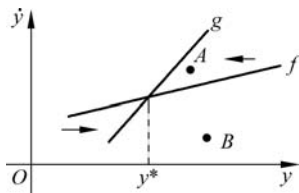


图 1-4 微分方程式(1-30)求解示例

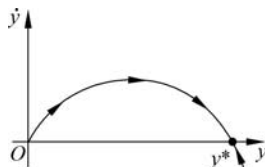


图 1-5 微分方程式(1-31)求解示例

(2) 解析法。对于变量可分离方程, 形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (1-32)$$

式中, $f(x)$ 与 $g(y)$ 分别是 x 与 y 的连续函数。

若 $g(y) \neq 0$, 则式(1-32)可写为

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad (1-33)$$

式(1-33)称为变量已分离的方程, 应用不定积分的换元积分法, 对式(1-33)两边积分可得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \quad (1-34)$$

式中, C 为积分常数。式(1-34)中两个不定积分分别是 $1/g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数, 将式(1-34)理解为函数关系式 $y=y(x, C)$, 对任意常数 C 所确定的函数关系式 $y=y(x, C)$ 满足式(1-32), 故式(1-34)是式(1-32)的通解。

需要注意的是, 式(1-33)不适合 $g(y)=0$ 的情形, 若存在 y_1 , 使得 $g(y_1)=0$ 是方程的解, 则 $y=y_1$ 为方程的特解, 在求解方程时也应将特解包含在其中。

例如, 求解方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 时, 首先应将变量分离, 得到 $ydy = -x dx$; 然后, 对两边积分, 得到 $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$, 因此通解为 $x^2 + y^2 = C$, C 是任意正常数。为表示清楚起见, 也可以解出 y , 写成显函数形式 $y = \pm\sqrt{C-x^2}$ 。

齐次微分方程: 形如 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次微分方程, 在求解齐次微分方程时, 设 $u = \frac{y}{x}$, $g(u)$ 是 u 的连续函数, 则 $y = ux$, 可得 $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$; 进一步整理得到变量可分离的方程 $\frac{du}{dx} = \frac{g(u)-u}{x}$; 在此基础上, 按照变量可分离的方法求解得到未知函数 $u = u(x)$, 进而得到函数 $y(x) = xu(x)$ 。

一阶线性微分方程: 其基本形式如式(1-35)所示。

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x) \quad (1-35)$$

式中, $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是 x 的连续函数。若 $Q(x)=0$, 则式(1-35)为

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \quad (1-36)$$

式(1-36)称为一阶齐次线性微分方程, 为变量可分离方程, 易于得到其通解为

$$y = Ce^{\int P(x)dx} \quad (1-37)$$

式中, C 为任意常数。

一阶非齐次线性微分方程: 齐次线性微分方程是非齐次线性微分方程的特殊情形。若 $Q(x) \neq 0$, 则式(1-35)称为一阶非齐次线性微分方程。在式(1-37)中, 将常数 C 更换为 x 的待定函数 $C(x)$, 即

$$y = C(x)e^{\int P(x)dx} \quad (1-38)$$

对式(1-38)求微分得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{\int P(x)dx} \quad (1-39)$$

将式(1-38)、式(1-39)代入式(1-35), 得到

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{\int P(x)dx} = P(x)C(x)e^{\int P(x)dx} + Q(x) \quad (1-40)$$

整理得到

$$\frac{dC(x)}{dx} = -Q(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (1-41)$$

将式(1-41)两边积分后得到一阶非齐次线性微分方程的通解为

$$y = e^{\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx + c \right) \quad (1-42)$$

在求解一阶非齐次线性微分方程时将常数变易为待定函数的方法,简称为常数变易法。实际上,常数变易法也是一种变量变换的方法,其通过变换式(1-38)可将方程(1-35)化为变量可分离方程进行求解。

3. 线性常微分方程组

线性微分方程组的一般形式为

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \quad (1-43)$$

其中, $\mathbf{y}(t)$ 为向量, $\mathbf{A}$ 为系数矩阵。在式(1-43)中,如果向量 $\mathbf{x}(t) \neq 0$,则方程组为非齐次线性方程组;如果 $\mathbf{x}(t) = 0$,则方程的形式为齐次线性方程组

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \quad (1-44)$$

式(1-43)、式(1-44)通常设置为时间 t 的函数,用于分析在某些参数变动情况下系统的动态稳定性,即其随时间变动的路径。

在动态随机一般均衡模型中,经常采用微分方程组表示复杂的宏观经济系统。在微分方程组中,高阶微分方程常常通过化为一阶微分方程组的形式求解,非线性微分方程组需化为线性微分方程组来求解,因此,一阶线性微分方程组的求解至关重要。一阶线性微分方程组的求解方法也有图解法与解析法两类。

(1) 图解法。设一个简单的微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = a_{22}y_2(t) \end{cases} \quad (1-45)$$

其中, a_{11} 、 a_{22} 为系数,(0,0)为均衡点。其解的图形如图1-6和图1-7所示。

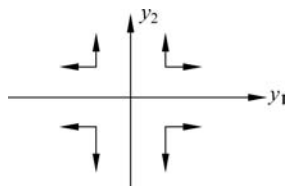


图 1-6 $a_{11} > 0, a_{22} > 0$ 时的微分方程组求解

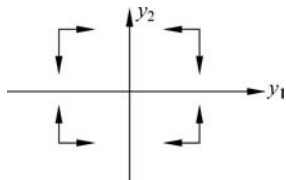


图 1-7 $a_{11} < 0, a_{22} < 0$ 时的微分方程组求解

如图1-6所示,当 $a_{11} > 0$ 且 $a_{22} > 0$ 时,若 $y_1 > 0$,则 $\dot{y}_1 > 0$,此时 y_1 增加;若 $y_2 > 0$,则 $\dot{y}_2 > 0$,此时 y_2 增加,同理可分析其他三个象限的情形。显然,该情形下该方程组是发散的。

图1-7则显示,当 $a_{11} < 0$ 且 $a_{22} < 0$ 时,若 $y_1 > 0$,则 $\dot{y}_1 < 0$,此时 y_1 减少;若 $y_2 > 0$,则 $\dot{y}_2 < 0$,此时 y_2 减少,同理可分析其他三个象限。可以得出,此情形下该方程组收敛于均衡点(0,0)。实际上,在采用图形法进行微分方程组的求解时,最重要的是观察 $\dot{y}_1 = 0$

曲线和 $\dot{y}_2=0$ 曲线。

例如,采用图形法求解方程组:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = k(t)^{0.3} - c(t) \\ \dot{c}(t) = c(t)(0.3k(t)^{-0.6} - 0.03) \end{cases} \quad (1-46)$$

应画出 $\dot{k}(t)=0$ 和 $\dot{c}(t)=0$ 两条线,令 $\dot{c}(t)=0$,求得 $k(t)^{-0.6}=0.1$; 令 $\dot{k}(t)=0$,推导得出 $c(t)=k^{0.3}(t)$,如图 1-8 所示。

当 $k > k^*$ 时, $\dot{c}(t) < 0$, $c(t)$ 为减函数; 在 $\dot{k}(t)=0$ 的上方, $\dot{k}(t) < 0$, $k(t)$ 为减函数。图 1-8 中两线交点为稳定点,系统在稳定点处局部收敛,即第一象限和第三象限中的部分点能够达到局部稳定或局部均衡,能够达到局部均衡的点组成的路径称为鞍点路径。

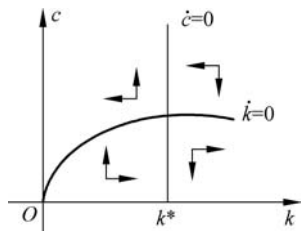


图 1-8 微分方程组(1-46)求解示例

(2) 解析法。解析法可以用于求解齐次、非齐次线性微分方程组。

齐次线性微分方程组。对于齐次线性微分方程组,其一般形式为

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \quad (1-47)$$

式中, $\mathbf{y}(t)$ 为 $n \times 1$ 阶向量; n 为方程的个数; $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶系数矩阵。

定义

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}(t) \quad (1-48)$$

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}'(t) \quad (1-49)$$

综合式(1-47)~式(1-49),可得

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) \quad (1-50)$$

式中, $\mathbf{V}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量构成的矩阵; $\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$, $\mathbf{D}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 对角化的矩阵。

为便于理解,可将式(1-50)写为方程组的形式:

$$\begin{cases} z_1'(t) = \alpha_1 z_1(t) \\ z_2'(t) = \alpha_2 z_2(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) = \alpha_n z_n(t) \end{cases} \quad (1-51)$$

其中, α_i 为对角矩阵 $\mathbf{D}$ 的第 i 行 i 列元素。对于方程组(1-51)中的各个方程分别求解,使用齐次线性微分方程的通解式(1-37)可得

$$\begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} \\ z_2(t) = c_2 e^{\alpha_2 t} \\ \vdots \\ z_n(t) = c_n e^{\alpha_n t} \end{cases} \quad (1-52)$$

对于整个方程组而言,可将式(1-52)简写为

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{E}\mathbf{c} \quad (1-53)$$

式中, $\mathbf{E}$ 为对角线上元素分别为 $e^{a_i t}$ 、其余元素为 0 的对角矩阵; $\mathbf{c}$ 为由常数 c_i 组成的列向量。

由式(1-48)与式(1-53)可得齐次线性微分方程组式(1-47)的通解为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{c} \quad (1-54)$$

特别地,在构建微分方程组以代表经济系统时,需要密切关注系统的稳定性问题。系统的稳定性取决于特征根的符号,以两个方程组成的方程组为例,求解其特征根后,根据其是否为实数还是虚数分为两大类六小类情形。

若两个特征根均为实数且均大于 0,则系统不稳定;若两个特征根均为实数且均小于 0,则系统稳定;若两个特征根均为实数且符号各异,则系统鞍形稳定。

若两个特征根均为复数且实部均为正,则系统震荡发散;若两个特征根均为复数且实部均为负,则系统震荡收敛;若两个特征根均为复数且实部均为 0,则系统震荡循环。

非齐次线性微分方程组。非齐次线性微分方程组的求解相对复杂,其一般形式为

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \quad (1-55)$$

非齐次线性微分方程组的求解方法与齐次线性微分方程组大致相同。首先仍采用式(1-50)定义 $\mathbf{z}(t)$,可得到

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t)) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}(t) + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (1-56)$$

式中, $\mathbf{V}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量构成的矩阵; $\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$, $\mathbf{D}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 对角化的矩阵。

将式(1-56)写为方程组的形式:

$$\begin{cases} z_1'(t) = \alpha_1 z_1(t) + V_1^{-1}x_1(t) \\ z_2'(t) = \alpha_2 z_2(t) + V_2^{-1}x_2(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) = \alpha_n z_n(t) + V_n^{-1}x_n(t) \end{cases} \quad (1-57)$$

式中, α_i 为对角矩阵 $\mathbf{D}$ 的第 i 行 i 列元素。对于方程组式(1-57)中各个方程分别求解,使用非齐次线性微分方程的通解式(1-42)可得方程组中第 i 个方程的通解为

$$z_i(t) = e^{a_i t} \int e^{-a_i t} V_i^{-1} x_i(t) dt + c_i e^{a_i t} \quad (1-58)$$

因此,对整个方程组而言,有

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{E}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{E}\mathbf{c} \quad (1-59)$$

式中, $\mathbf{E}$ 为对角线上元素分别为 $e^{a_i t}$ 而其余元素为 0 的对角矩阵; $\hat{\mathbf{x}} = \int e^{-a_i t} V_i^{-1} x_i(t) dt$; $\mathbf{c}$ 为由常数 c_i 组成的列向量。

由此可得非齐次线性微分方程组式(1-55)的通解为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{E}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{E}\mathbf{c}) \quad (1-60)$$

在实际求解中,方阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量组成的矩阵 $\mathbf{V}$ 及其逆矩阵、对角化矩阵 $\mathbf{D}$,可使用

MATLAB 软件的 eig、inv 等命令分别求解。

4. 非线性微分方程组

非线性微分方程组的求解主要有图形解法即相位图分析法、将非线性方程组线性化两种方法。以双变量的一阶微分方程组为例,其一般形式为

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y) \\ y'(t) = g(x, y) \end{cases} \quad (1-61)$$

需要注意的是,时间导数 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 仅取决于 x 和 y , 变量 t 并不作为独立变量进入 f 函数和 g 函数,这一特征使得方程组成为一个自治系统,同时这也是应用图解法即相位图分析方法进行方程组求解的前提条件。

(1) 图解法。对于自治微分方程组式(1-61),时间导数 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 可简写为 x' 与 y' 。两条分界线分别以 $x'=0$ 和 $y'=0$ 表示,则对应于 $x'=0$ 和 $y'=0$ 分别得到

$$f(x, y) = 0 \quad (1-62)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (1-63)$$

如果 f 函数的具体形式已知,则可由式(1-62)求得 x 与 y 的关系表达式,在 xy 平面上绘制图形作为 $x'=0$ 曲线;如果 f 函数的形式未知,则可借助隐函数法则,确定 $x'=0$ 曲线的斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x'=0} = -\frac{f_x}{f_y}, \quad f_y \neq 0 \quad (1-64)$$

对于式(1-64)而言,在求得偏导数 f_x 与 f_y 后,即可得到 $x'=0$ 曲线的斜率特征。同理, $y'=0$ 曲线的斜率可由式(1-65)得到。

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y'=0} = -\frac{g_x}{g_y}, \quad g_y \neq 0 \quad (1-65)$$

若已知或假设

$$f_x < 0, \quad f_y > 0, \quad g_x > 0, \quad g_y < 0$$

则曲线 $x'=0$ 和曲线 $y'=0$ 的斜率均为正,若已知或进一步假定 $-\frac{f_x}{f_y} > -\frac{g_x}{g_y}$, 即曲线 $x'=0$ 陡于曲线 $y'=0$, 则微分方程解的图形如图 1-9 所示。

图 1-9 显示,曲线 $x'=0$ 和曲线 $y'=0$ 在点 E 处相交,并将相空间分成 I 到 IV 四个区域,在除点 E 之外的其他点, x 和 y 都会随着时间而变化,变化的方向由时间导数 x' 和 y'

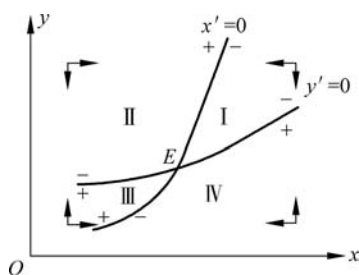


图 1-9 双变量相位图

在该点的符号确定。在图 1-9 中,由于假定或已知

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = f_x < 0$$

当 x 增加时, x' 的符号依次经过+,0,-三个阶段。类似地,由于

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = g_y < 0$$

当 y 增加时, y' 的符号依次经过+,0,-三个

阶段。

进一步分析可得,在区域 I 中的任意点, x' 与 y' 均为负,因而 x' 与 y' 必定随着时间而递减,如区域 I 中的两个箭头所示;与区域 I 相比,区域 III 的情况则恰好相反;在区域 II 中, x' 与 y' 的符号不同, x' 为正, y' 为负;与区域 II 相比,区域 IV 的情况则恰好相反。

(2) 线性化求解方法。分析非线性微分方程组的另一个方法是对其线性化,将函数进行泰勒展开后,舍弃阶数高于 1 的各项后可以得到线性近似,这一过程简称为线性化。例如,对于非线性方程组

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1-66)$$

其围绕展开点 (x_0, y_0) 的线性化可以写成线性方程组,如式(1-67)所示。

$$\begin{aligned} x' &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ y' &= g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned} \quad (1-67)$$

在局部稳定性分析中的均衡点处有 $x' = y' = 0$, 均衡点易于求出,可围绕均衡点进行线性展开。在已知函数 f 和函数 g 的具体形式时,式(1-67)可以被定量解出。

例如,求解方程组 $\begin{cases} k' = k^{0.3} - c \\ c' = c(0.3k^{-0.6} - 0.03) \end{cases}$, 初始条件为: $k(0) = 0$ 。该方程为非线性

微分方程组,令 $k' = c' = 0$ 可求出均衡点 (k^*, c^*) 。根据式(1-67)将其线性化,将非线性方程组在 (k^*, c^*) 处展开,舍弃阶数大于 1 的项之后即可化为线性微分方程组,进而使用线性微分方程组的求解方法进行求解即可。

1.2 线性代数知识

1.2.1 向量与矩阵

1. 向量

向量的定义: n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 构成的有序数组称为一个 n 维向量,记作 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,其中 a_i 称为 $\mathbf{a}$ 的第 i 个分量,写成上述形式的向量称为行向量,写成列的形式为列向量,即

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

分量全为零的 n 维向量称为 n 维零向量,记作 $\mathbf{0}_n$ 或 $\mathbf{0}$ 。

向量的内积: 对于向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = y_1^T \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ 为向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的内积。

向量的模: 设向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 称 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ 为

向量 x 的模,当 $\|x\|=1$ 时,称 x 为单位向量。

向量的线性组合: 对于向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 与向量 b 而言,如果存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$,使得 $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$,则向量 b 是向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的线性组合,称向量 b 可由向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示。

向量的相关性与无关性: 如果对 m 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_m$,有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$,使得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$ 成立,则称 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关,否则称 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关。

向量的极大无关组与秩: 设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 的部分组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 满足两个条件: 第一, $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关; 第二, $a_1, a_2, \dots, a_s$ 中的任一向量均可由 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性表示,则称向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 为向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 的一个极大无关组,向量组极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩,记为 $r(a_1, a_2, \dots, a_s) = r$ 。

2. 矩阵

一个 m 行 n 列的矩阵形如

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的表示: 记为 $A = (a_{ij})$ 或 $A = [a_{ij}]$, a_{ij} 是矩阵 A 中第 i 行第 j 列的元素,其中 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。显然, A 为 m 行 n 列的矩阵,其维数为 $m \times n$ 。当需要指明矩阵的行列数时,应记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 。

实矩阵、复矩阵与零矩阵: 当每个 a_{ij} 都是实数时,则称 A 是实矩阵,每个 a_{ij} 都是复数时,则称 A 是复矩阵; 元素全为 0 的矩阵称为零矩阵,记作 O 或 $O_{m \times n}$ 。

向量的组合: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 可视为由 m 个 n 维行向量 α_i 构成,也可看作由 n 个 m 维列向量 β_j 构成,其中 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ 是矩阵 A 的第 i 行, $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ 是矩阵 A 的第 j 列,即

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n)$$

对于行数和列数相等且均为 n 的矩阵,称为 n 阶矩阵,记为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,矩阵 A 的部分特殊形式、性质如下:

(1) n 阶对角矩阵: 对所有的 i 和 $j, i \neq j$ 有 $a_{ij} = 0$,即非对角元素均为零的方阵,记作 $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 。

(2) n 阶单位矩阵: 对所有的 i 和 $j, i \neq j$ 有 $a_{ij} = 0$ (对所有的 i 和 $j, i \neq j$),且对所有的 i 有 $a_{ii} = 1$,即主对角线上的元素全为 1 而非主对角线上的元素全为 0 的 n 阶矩阵,记为 I_n (或 I),也记为 E_n (或 E)。

(3) 上三角矩阵: 对所有的 i 和 $j, i > j$ 有 $a_{ij} = 0$, 即对角线下方的元素均为 0 的矩阵。

(4) 下三角矩阵: 对所有的 i 和 $j, i < j$ 有 $a_{ij} = 0$, 即对角线上方的元素均为 0 的矩阵。

(5) 对称矩阵: 对所有的 i 和 j 有 $a_{ij} = a_{ji}$, 即矩阵的转置等于其本身, 记为 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ 。

(6) 非奇异矩阵: 矩阵 $\mathbf{A}$ 是满秩的, 或矩阵 $\mathbf{A}$ 对应的方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有且仅有一个解, 即 $r(\mathbf{A}) = n$ 。

(7) 可逆矩阵: 存在一个 n 阶矩阵 $\mathbf{B}$, 使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$, 则称矩阵 $\mathbf{B}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵, 记为 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ 。

(8) 正交矩阵: $\mathbf{A}$ 是实矩阵且满足 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, 则称 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵。

(9) 分块矩阵: 将一个大型矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 分成若干小块, 则得到分块矩阵。在矩阵运算中将大型矩阵分为若干小型矩阵进行运算, 使得运算更为简明。

例如, 将一个 5 阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 用水平和垂直的虚线分为 4 块, 记为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}, \text{ 其中, } \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。 \text{ 矩阵}$$

$\mathbf{A}$ 由 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ 四个小矩阵所组成, 也称 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个 2×2 分块矩阵, 每一个小矩阵称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个子块。

一般地, 将一个 m 行 n 列的矩阵 $\mathbf{A}$, 在行的方向上分为 s 块, 在列的方向上分为 t 块, 则称其为 $\mathbf{A}$ 的 $s \times t$ 分块矩阵, 记作 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{kl})_{s \times t}$, $\mathbf{A}_{kl}$ 为 $\mathbf{A}$ 的子块, $k = 1, 2, \dots, s, l = 1, 2, \dots, t$ 。

此外, 对于上述性质中涉及矩阵转置、求逆等运算的细节, 将在后续部分进行介绍。

3. 行列式

行列式是取自不同行不同列的 n 个元素组成的数表, 实质上是一个数值, 为 $n!$ 项乘积的代数和。行列式是在解线性方程组时引入的一种记号或算式。

一阶行列式为

$$D_1 = |a_{11}| = a_{11}$$

二阶行列式为

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式为

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

n 阶行列式为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} \cdots a_{j_n n}$$

其中, τ 表示一组数的逆序数, 如 231645 的逆序数为 4, 即 $\tau(231645) = 4$ 。一般地, 在行列式中, $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 表示在乘积 $a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} (a_{j_1 1} \cdots a_{j_n n})$ 中, 当行(列)序数是按从小到大的顺序排列时, 元素的列(行)序数排列的逆序数。由 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的元素所构成的行列式称为该方阵的行列式, 记为 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$ 。

(1) 行列式的性质。

第一, 行列式的行与列互换, 互换后的行列式称为行列式的转置, 其值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第二, 行列式的两行(列)互换, 行列式的值反号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据这一性质可推出, 如果行列式中有两行(列)完全相同, 则此行列式等于零。

第三, 行列式的某一行(列)元素中所有元素都乘以 k , 等于用数 k 乘此行列式, 这一性质可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

基于这一性质可推断出, 行列式中如果有两行(列)元素成比例, 此行列式等于零。

第四, 如果行列式某行(列)元素皆为两数之和, 则其行列式等于两个行列式之和, 例

如第 i 行的元素是两数之和,行列式可分解为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第五,在行列式中,将某行(列)各元素分别乘以常数 k ,再加入到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} + a_{j1} & ka_{i2} + a_{j2} & \cdots & ka_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第六, n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式满足运算律: $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$; $|\lambda \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|$; 方阵 $\mathbf{A}$ 、方阵 $\mathbf{B}$ 的行列式满足: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$ 。

(2) 行列式的展开定理。首先明确概念余子式与代数余子式: 设 M_{ij} 是在行列式 D 中去掉第 i 行第 j 列全部元素后,按照原顺序排列的 $n-1$ 阶行列式,称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 。

行列式的展开定理为行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ ($D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$)。

(3) 克莱姆法则。克莱姆法则是对于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组,在系数行列式不等于零时的方程组解法。例如,设线性非齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{其系数行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 则方程组有唯一解 } x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1,$$

$2, \cdots, n$ 。其中 D_j 是用常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换 D 中第 j 列所成的行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.2 矩阵的基本运算

1. 矩阵的线性运算

(1) 矩阵的加法：设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和矩阵 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ，则

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

称矩阵 $A + B$ 为 A 与 B 之和。

(2) 矩阵的数量乘法：设 k 是任意一个常数， $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，则

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

称矩阵 kA 为常数 k 与矩阵 A 的数量乘积。

2. 矩阵的乘法

假设 A 是一个 $m \times n$ 维的矩阵， B 是一个 $n \times s$ 维的矩阵，例如：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

则 A 与 B 的乘积为 C ， $C = AB$ ， C 为一个 $m \times s$ 矩阵，即 $C = (c_{ij})_{m \times s}$ ，其第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 的计算公式为

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

显然， c_{ij} 为 A 第 i 行的 n 个元素与 B 第 j 列 n 个元素分别对应相乘之和。

矩阵的乘法还满足运算律，如结合律： $(AB)C = A(BC)$ ；数乘结合律： $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ ；左分配律： $C(A+B) = CA + CB$ ；右分配律： $(A+B)C = AC + BC$ 。

3. 矩阵的转置和对称矩阵

(1) 矩阵的转置。将一个 $m \times n$ 阶矩阵 A 的行列互换，得到的 $n \times m$ 阶矩阵称为 A 的转置矩阵，记作 A^T ，矩阵 A 和 A^T 的形式为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵的转置也是一种运算，满足运算律，如矩阵转置的转置： $(A^T)^T = A$ ；矩阵加法

的转置: $(A+B)^T = A^T + B^T$; 矩阵数量乘法的转置: $(kA)^T = kA^T$; 矩阵乘法的转置: $(AB)^T = B^T A^T$ 。

(2) 对称矩阵与反对称矩阵。设 A 是一个 n 阶矩阵, 若 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为对称矩阵, 记为 $A^T = A$; 如果 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为反对称矩阵, 记为 $A^T = -A$ 。

4. 伴随矩阵

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, 由其行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ 称为矩阵 A 的伴随矩阵, 且有 $AA^* = A^*A = |A|E_n$ 。

5. 矩阵求逆

(1) 可逆矩阵的定义。对于 n 阶方阵 A , 如果存在 n 阶方阵 B , 使得 $AB = BA = E$, 则称 A 为可逆矩阵, 或称 A 可逆, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 即 $A^{-1} = B$ 。

(2) 求矩阵的逆矩阵。求矩阵的逆矩阵主要有两种方法, 第一种是利用行列式和伴随矩阵求矩阵的逆, 第二种是通过初等变换的方法求逆。

在第一种方法中, 首先确定矩阵的行列式 $|A| \neq 0$, 则矩阵 A 可逆, 其逆矩阵为 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 。若 A 与 B 都是 n 阶矩阵, 且 $AB = E$, 则 A 与 B 可逆且互为逆矩阵。

在第二种方法中, 初等变换有三类方式: ①用非零常数 k 乘矩阵的某一行(列); ②互换矩阵某两行(列)的位置; ③把某行(列)的 k 倍加到另一行(列)中。对于矩阵而言, 上述三种变换均称为初等变换。将单位矩阵做一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵, 对矩阵实施一次初等行(列)变换, 相当于左(右)乘相应的初等矩阵。例如:

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为可逆矩阵, 其可以经过若干次初等行变换转化为

单位矩阵。如果对可逆矩阵 A 与同阶单位阵 E 做同样的初等变换, 那么当 A 变为单位阵 E 时, E 则变为 A^{-1} , 即矩阵组合 (A, E) 经过初等行变换化为 (E, A^{-1}) 。

1.2.3 矩阵的秩、特征值与特征向量

1. 矩阵的秩

如前所述, 在一个矩阵中, 若线性无关的最大行数为 r , 则称该矩阵的秩为 r 。秩也为

该矩阵线性无关的最大列数,一个 m 行 n 列矩阵秩的最大值等于 m 与 n 中较小的一个。

对于一个 2 行 2 列的矩阵,通过检查一行(列)是否为另一行(列)的倍数即可判断是否行(列)线性无关。然而,对于更高维度的矩阵,仅靠观察是不够的,需要使用正式的方法判断其秩的大小,其中一个方法是计算矩阵的秩,即确定 $\mathbf{A}$ 中无关的行数。由于初等变换不改变矩阵的秩,可以通过使用初等行变换将矩阵转化为阶梯矩阵,由阶梯矩阵的结构特征得到矩阵的秩。

例如,求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩时,可以按照四个步骤进行计算:①首先将元素 0 所在的行移到矩阵底部,在矩阵 $\mathbf{A}$ 中,可通过将第一行与第三行互换,得到 $\mathbf{A}_1$;②然后,将 $\mathbf{A}_1$ 第一行的元素同时除以常数 4,得到 $\mathbf{A}_2$;③将 $\mathbf{A}_2$ 中第一行元素乘以 -2 加到第二行,得到 $\mathbf{A}_3$;④将矩阵 $\mathbf{A}_3$ 的第二行元素乘以 3 后加到第三行,并将第二行元素乘以 0.25,得到 $\mathbf{A}_4$ 。各个阶段的矩阵形式为

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过初等行变换,将矩阵 $\mathbf{A}$ 变换成为阶梯矩阵 $\mathbf{A}_4$ 的形式,由于初等变换不改变矩阵的秩,矩阵 $\mathbf{A}_4$ 中非零行的个数即为矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩,因此 $r(\mathbf{A})=2$ 。

2. 矩阵的特征值与特征向量

设 $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶方阵,若存在常数 λ 和非零 n 维列向量 α ,使 $\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha$,则称 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值,满足 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\alpha = \mathbf{0}$; α 是对应于特征值 λ 的矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量;行列式 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ 称为方阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式,满足 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ 也称为方阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程。

特征值的求解方法为:求解特征方程 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$,得到 $\mathbf{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。

特征向量的求解方法为:对每个不同的特征值 λ_i ,求解齐次线性方程组 $(\lambda_i\mathbf{E} - \mathbf{A})\alpha = \mathbf{0}$,解得矩阵 $\mathbf{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量。

3. 特征值与特征向量的基本运算性质

特征值与特征向量满足一些运算性质,设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,则有:

(1) 特征值之和 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的主对角元素之和,称为矩阵的迹,记为 $\text{tr}(\mathbf{A})$ 。

(2) 特征值之积 $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$, $|\mathbf{A}|$ 为矩阵的行列式。

(3) 如果 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 都是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量,则 $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2$ 也是矩

阵 A 的属于 λ_i 的特征向量, 其中 k_1 与 k_2 是不全为 0 的任意常数。

(4) 不同特征值对应的特征向量线性无关。

(5) 如果 λ_i 是 n 阶矩阵 A 的 m 重特征值, 则属于 λ_i 的线性无关的特征向量个数不超过 m 个。

4. 相似矩阵

相似矩阵的定义是, 设 A 与 B 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 P , 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称矩阵 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

若矩阵 $A \sim B$, 则有:

$$(1) r(A) = r(B); |A| = |B|; |\lambda E - A| = |\lambda E - B|; \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B);$$

$$(2) A^T \sim B^T; A^{-1} \sim B^{-1}; A^n \sim B^n; A^* \sim B^*。$$

5. 矩阵的对角化

在经济模型的求解中, 如果一个矩阵 A 能够与对角矩阵相似, 则根据对角矩阵的行列式和迹等于原矩阵 A 的行列式和迹这一重要结论, 可以得到矩阵 A 的大量信息。若矩阵 A 与对角阵 Λ 相似, 即 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则称矩阵 A 可相似对角化, 记为 $A \sim \Lambda$ 。其中, 可逆矩阵 P 是由矩阵 A 的特征向量所组成的, n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

如果矩阵 A 不是实对称矩阵, 判断矩阵 A 是否可相似对角化的一般步骤为:

第一步, 由特征多项式求出矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。

第二步, 若特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 互异, 即所有特征值都不同, 则矩阵 A 可相似对角化。

第三步, 若有重特征值 λ_i , 计算 $A - \lambda_i E$ 的秩 $r(A - \lambda_i E)$, 对每个重特征值 λ_i 判断其重数 k_i 是否满足 $n - k_i = r(\lambda_i E - A)$; 若满足, 则矩阵 A 可相似对角化, 否则不可相似对角化。

第四步, 若可相似对角化, 求矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 所对应的线性无关的特征向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。

第五步, 将特征向量组合成为可逆矩阵, 按特征值 λ_i 的顺序从左往右将特征值排列构造出可逆矩阵 $P = (X_1, X_2, \dots, X_n)$; 与特征向量相对应, 按照自上而下的顺序将特征值 λ_i 写在矩阵的主对角线上构成对角矩阵 Λ , 则有 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

本章习题

1. 填空题: 求导运算法则

假设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都在点 x 处可导, 则两个函数的和、差、积、商均在点 x 处的导数为:

$$[cu(x)]' = \underline{\hspace{2cm}} (c \text{ 为常数})$$

$$[u(x) + v(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$[u(x)v(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 填空题：泰勒定理

任意给定一个连续可微的函数 $f(x)$, 则围绕点 x_0 或在 x_0 处的泰勒展开为:

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. 综合题：采用图形法求解方程组

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = k(t)^{0.3} - c(t) \\ \dot{c}(t) = c(t)(0.3k(t)^{-0.6} - 0.03) \end{cases}$$

4. 计算题：求矩阵的秩

求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩。