

第 1 章 系泊系统的设计(2016 A)

1.1 题目

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通信系统组成(见图 1-1)。某型传输节点的浮标系统可简化为底面直径 2m、高 2m 的圆柱体,浮标的质量为 1000kg。系泊系统由钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚组成。锚的质量为 600kg,锚链选用无档普通链环,近浅海观测网的常用型号及其参数在附表中列出。钢管共 4 节,每节长度 1m,直径为 50mm,每节钢管的质量为 10kg。要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16° ,否则锚会被拖行,致使节点移位丢失。水声通信系统安装在一个长 1m、外径 30cm 的密封圆柱形钢桶内,设备和钢桶总质量为 100kg。钢桶上接第 4 节钢管,下接电焊锚链。钢桶竖直时,水声通信设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜,则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度(钢桶与竖直线的夹角)超过 5° 时,设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度,钢桶与电焊锚链链接处可悬挂重物球。

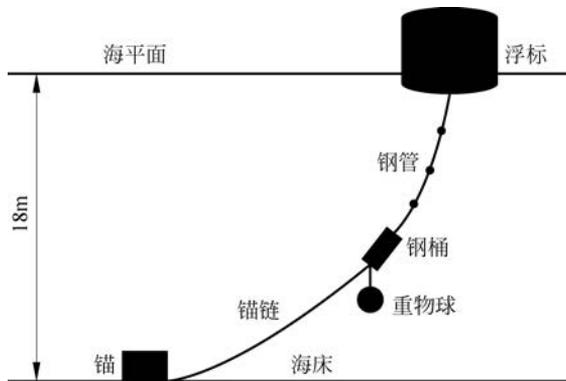


图 1-1 传输节点示意图(仅为结构模块示意图,未考虑尺寸比例)

系泊系统的设计问题就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

问题 1 某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m,选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 的海域。若海水静止,分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

问题 2 在问题 1 的假设下,计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。请调节重物球的质量,使得钢桶的倾斜角度不超过 5° ,锚链在锚点与海床的夹角不超过 16° 。

问题 3 由于潮汐等因素的影响,布放海域的实测水深介于 16~20m 之间。布放点的

海水速度最大可达到 1.5m/s,风速最大可达到 36m/s。请给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计,分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

说明 近海风荷载可通过近似公式 $F=0.625 \times S v^2$ (N) 计算,其中 S 为物体在风向法平面的投影面积(m^2), v 为风速(m/s)。近海水流力可通过近似公式 $F=374 \times S v^2$ (N) 计算,其中 S 为物体在水流速度法平面的投影面积(m^2), v 为水流速度(m/s)。

附表 锚链型号和参数表

型 号	长度/mm	单位长度的质量/(kg/m)
I	78	3.2
II	105	7
III	120	12.5
IV	150	19.5
V	180	28.12

注:长度是指每节链环的长度。

1.2 问题分析与建模思路概述

题目要求学生分析浮标、钢管、钢桶、重物球和锚链的受力情况,建立计算锚链形状、钢桶和钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度和游动区域的数学模型。从基本的数学原理来说,题目的解决思路比较固定,需要先对系统进行整体及部分的受力分析,列出系统的力学公式,再根据题目中给的参数,求得夹角、吃水深度、游动半径等相关结果就可以了,需要注意的是,在建立模型过程中要把相关因素考虑全面,如需要考虑水下构件的浮力等。

问题 1 题目中给出了锚链长度、锚链单位长度质量、重物球的质量、水深、海水密度、海面风速等具体数据,并且假设海水静止,只需对整个系统进行静力分析,建立系泊系统的数学模型(相关数学模型比较固定),得到受力分析的物理公式,再将具体数据代入,求得钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域等指标。

问题 2 在问题 1 的基础上,由于风速变大,可能使得钢桶的倾斜角超过 5° ,锚链在锚点与海床的夹角也可能超过 16° ,题目要求重新设计重物球的质量。此时重物球的质量就是未知数,由于仍然不计水速的影响,因此基本模型和问题 1 相同。为了求得适合的重物球质量,需要得到一条以重物球质量为自变量,因变量分别是钢桶与水平面夹角和锚链下端与海床面夹角,找出符合条件的最小重物球质量(可建立优化模型或相关评价模型来解决)。

问题 3 在上述问题的基础上考虑海水速度最大为 1.5m/s,在这种情况下要考虑水流对系统的冲击力,在确定水流力方向后,只需在问题 2 的基础上建立新的系泊系统数学模型,整体目标使得吃水深度、游动半径、钢桶倾角尽量小,运用系统受力分析给出锚链在水流冲击下的微分方程,根据这些计算出重物球质量以及选用何种锚链即可。

1.3 获奖论文——基于协调曲线的系泊系统的设计

作 者: 李哲鑫 李展宇 卞欣钰

指导教师: 李炳照

获奖情况: 2016 年全国数学建模竞赛二等奖

摘要

近海观测网的传输节点由三部分组成,其中规模最大的是系泊系统。系泊系统的设计影响着整个传输节点的运行与工作,有着至关重要的作用。本文通过建立数学模型,求解了在一定条件下,传输节点各个部分的状态参量,并且基于协调曲线优化算法,设计了在题目条件下的系泊系统的方案。

针对问题 1,通过受力分析,对整个传输节点进行部分与整体的受力分析,合理运用分析力学,列出各个变量的方程组,寻找到它们之间的关系。可以发现,所有的其他参量都可以表示成浮标吃水深度 h 的函数,最终我们就可以得到关于吃水深度 h 的方程,解得 h 之后,再代入即可求出其他所有的未知量。这里值得注意的是锚链的形状受到海床平面的制约,我们分两种情况进行了讨论。用 MATLAB 求解得到: 风速 12m/s 时,钢桶的倾斜角度 $\theta_5 = 1.2010^\circ$,浮标的吃水深度为 0.6838m; 风速 24m/s 时,钢桶的倾斜角度 $\theta_5 = 4.5629^\circ$,浮标的吃水深度为 0.6979m。

针对问题 2,第一小问仍然是基于问题 1 建立的模型来求解的。通过求解我们可以发现,当风速为 36m/s 时,钢桶的倾斜角度 $\theta_5 = 9.4404^\circ$,锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角 $\theta_6 = 19.6289^\circ$,均超过要求。因此必须调整重物球质量 M 。首先,我们利用问题 1 的模型分别给出了钢桶的倾斜角度、锚链在锚点与海床的夹角与重物球质量的函数图像; 然后再次反向利用问题 1 的模型,通过 MATLAB 解出精确的 M 的下限值为 2062.2kg 和 1931.9kg,得出重物球的质量应该大于 2062.2kg; 同时,浮标不能完全浸没于水中,因此由受力平衡得到重物球质量上限为 6097.1kg。

针对问题 3,我们首先建立了考虑水流力的物理模型。针对优化问题,我们构建了基于协调曲线的多目标优化方法。首先,我们通过画出目标函数可行域的方法确定最优解范围,在此基础上将“锚链在锚点与海床的夹角不超过 16° ”的不等式约束关系调整为等式约束关系,进一步缩小最优解范围。之后,我们利用协调曲线的方法分析了浮标吃水深度与钢桶倾角这一对矛盾的目标函数,通过构造满意度函数转化为单目标优化问题。最后,我们得出,当选择型号 V 的锚链,且锚链长度为 21.420m(119 节链环),重物球质量为 4475.0kg 时,系统在最“恶劣”环境下(水深最大,风速最大,水速最大)的工作效果最佳。

最后,我们对优化模型进行了灵敏度分析,重点考察了水深对最优解的影响,并对模型进行了评价。

关键词: 系泊系统,分析力学,协调曲线, MATLAB。

1.3.1 问题重述

在当代海运行业,传输节点扮演着非常重要的角色。一个近海观测网的传输节点由三部分组成——浮标系统、系泊系统和水声通信系统。现在有一个已知部分条件的传输节点。将传输节点的浮标系统简化为底面直径 2m、高 2m 的圆柱体,质量为 1000kg。系泊系统则由很多部分组成,其中包括 4 节长 1m、直径 50mm、每节质量 10kg 的钢管,与之相连的是一个钢桶,钢桶的另一端连接着质量可调的重物球以及锚链,锚链的型号以及节数都可供选择。锚链另一端由质量为 600kg 的锚固定。而刚刚提及的钢桶,是一个长 1m、外径 30cm 的封闭圆柱体,充当着水声通信系统的载体,里面装有设备,总质量为 100kg,重物球可以用

于控制钢桶倾斜的角度。

这样的系统节点,为了维持其稳定性与功能的正常实现,需要满足的条件是,锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16° ,否则节点会被拖走;钢桶的倾斜角度(钢桶与竖直线的夹角)尽可能小,竖直时效果最好,超过 5° 时效果最差。

整个问题的核心便在于确定锚链的型号、长度和重物球的质量,使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

问题 1 现在选用 II 型电焊锚链 22.05m,重物球 1200kg。传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 的海域。首先考虑风荷载,不计水流量,分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

问题 2 仍然是在问题 1 的背景下,计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。接着要调节重物球的质量,使系统满足正常工作的条件:钢桶的倾斜角度不超过 5° ,锚链在锚点的切线与海床的夹角不超过 16° 。

问题 3 加入了近海水流力的影响。布放海域水深 16~20m,海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。要求做出一个设计,要考虑风力、水流量和水深,分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度,锚链形状,浮标的吃水深度和游动区域。

1.3.2 基本假设

1. 假设重物球、锚链、钢管的材质均为钢,密度取为 $\rho_s = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。
2. 假设重物球、锚链均为实心物体;钢管为空心管,内部灌满海水,即它们排开海水的体积与其自身的体积相等。
3. 假设钢管、锚链的质量分布均匀,假设钢桶及其内部的设备的重心为其几何中心。
4. 假设浮标在平衡状态时保持水平,不发生倾斜。即浮标的迎风面积只与吃水深度有关。
5. 考虑到海风的方向具有长期稳定性,我们假设在系统达到平衡的过程中近海风的方向恒定。

1.3.3 符号说明

符 号	含 义	符 号	含 义
h	浮标吃水深度	θ_i	从上到下第 i 根钢管的倾斜角度($i = 1, 2, 3, 4$)
H	水深	θ_5	钢桶的倾斜角度
l_1	浮标高度	θ_6	锚链在锚点与海床的夹角
d_1	浮标直径	σ	锚链的线密度
m_1	浮标质量	M	重物球质量
l_2	钢桶长度	R	浮标游动区域的半径
d_2	钢桶外径	g	重力加速度
m_2	钢桶质量(含设备)	ρ_w	海水的密度 $\rho_w = 1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
l	每节钢管长度	ρ_s	钢的密度,这里取 $\rho_s = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
d_3	钢管直径		
m_3	每节钢管质量		

1.3.4 问题分析

这个问题,表面呈现出来的是一道类似于物理题目的形式。以经典的力学系统作为整道题目的载体,搭配上实际的工程问题,运用物理和数学方法去建立和求解这个模型。

问题 1 给出了很多具体确定的值,要求在两个不同风速下的系统状态。首先通过受力分析,结合牛顿力学与分析力学等物理知识,构建一个模型。由此得到各个物理量之间的关系,由于变量都有具体确定的值,通过解方程即可得到一个未知数的解,再通过之间的关系,求解出其他所有的量。

问题 2 在问题 1 的基础上进一步增大了风速去求得一个新的解。考虑到问题不会有重复性,所以求得的结果应该会有不满足设计要求的地方。因此还是在问题 1 的模型上修改部分参数,反过来求解需要调整的重物球质量即可。

问题 3 则回归到在基本模型情况下的一个多元函数多目标优化问题。由于锚链型号是离散化的,可以逐一分析,则剩余的两个自变量在型号确定的情况下,可以先由条件进行约束,这相当于减少独立变量,转化为一元多目标优化问题,再通过协调曲线法,匹配满意曲线,来解决多目标优化问题。

1.3.5 模型建立与求解

1. 问题 1 的模型建立与求解

(1) 模型建立

这是一个典型的力学问题,我们首先进行受力分析,之后利用拉格朗日力学的方法计算其平衡状态。

根据力学平衡原理可知,平衡时海风速度方向与整个系统共面,并且指向外侧。

我们首先考虑锚链的形状。由于每节链环的长度与锚链总长度相比是小量,并且考虑到 22.05m 的 II 型锚链实际上是由 210 节链环连接而成的,我们将锚链抽象成有质量的刚性绳(不可伸缩)的模型。可以证明,有质量的刚性绳在重力场中自由悬挂的状态下的形状为悬链线。证明如下^[1]:

考虑两端分别固定在 A, B 的均匀重链,不失一般性,设 A, B 在同一水平位置,取链的最低点的坐标为 (0, a), 设链的线密度为 σ , 则体系的势能为

$$V = \int_{x_A}^{x_B} \sigma g y ds = \sigma g \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1)$$

上式中的函数 $y(x)$ 就是悬链线方程的解。由于保守体系处于平衡状态时势能取极值,因此这是一个泛函极值问题,处理方法是求解欧拉方程。

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{常数} \quad (2)$$

其中

$$f = y \sqrt{1 + y'^2} \quad (3)$$

解得

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (4)$$

这就是锚链线。锚链悬垂时的形状就是该函数图像上的一段曲线。进一步我们可以得到(4)式中的常数 a 的表达式^[2]：

$$a = \frac{T_{\text{horizontal}}}{\sigma g} \quad (5)$$

其中 $T_{\text{horizontal}}$ 为锚链的张力的水平分量。

之后我们对系统进行受力分析。选取受力分析的对象,对于建立模型的复杂度以及模型能否求解至关重要。受力分析中,最常见的就是整体法与隔离法两种,因此,合适地分割部分、组合整体成为分析的关键步骤。

单独来看,图 1-2 中可分割的最小单元有以下六组:浮标、四根钢管、钢桶、重物球、锚链以及固定的锚。由于锚是一个固定点,题目中并没有提及诸如摩擦力等力,因此在这里暂时不需要对其进行分析。浮标和锚链作为独立的单元,很显然要独立地拿来分析。其中,锚链由于是由很多的小节组装而成的,没有必要对一小节进行分析,只需要将其看成一个类似刚性绳的整体即可。

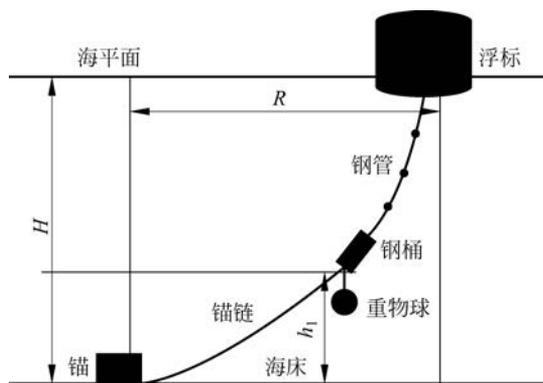


图 1-2 传输节点

剩余的便是最特殊的钢管、钢桶与重物球部分,由题中所给的条件可知,钢管与钢桶的长度一样,并且问题中,对于它们与竖直方向的角度都有要求,因此,对于它们,要分别用整体和隔离的方法进行分析,由于隔离法相当烦琐,之后会有更简单的方法来应对。而整体法就较为简单,只要将四根钢管和钢桶看成一个整体,由于重物球悬挂在钢桶末端,显然也可以计入整体,共同分析。

由此,第一步的受力分析,我们主要对两个部分,即浮标,钢管、钢桶和重物球组成的整体分析即可。下面,便逐一展开分析。

对于浮标这个物体(见图 1-3):受到重力 G_1 、浮力 F_{b1} 、风力 f_1 、钢管、钢桶和重物球整体对其的拉力 T_1 。其中浮力和风力都与吃水深度 h 有关,而拉力可以分解,如图 1-4 所示。

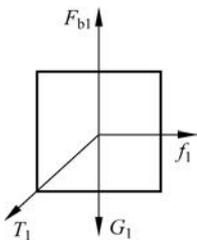


图 1-3 浮标受力分析

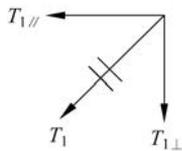


图 1-4 拉力 T_1 分解

由平衡关系可知

$$T_{1//} = f_1 \quad (6)$$

$$T_{1\perp} + G_1 = F_{b1} \quad (7)$$

对于钢管、钢桶和重物球组成的整体(见图 1-5): 受到重力 G_2 、浮力 F_b 、两处的拉力 T'_1 和 T_2 。其中根据牛顿第三定律, T'_1 和 T_1 是一对相互作用力, 则 T'_1 可进行分解(见图 1-6)。显然

$$T'_{1//} = T_{1//} \quad (8)$$

$$T'_{1\perp} = T_{1\perp} \quad (9)$$

而 T_2 也可以如图 1-7 所示进行分解, 则由受力平衡, 有

$$T_{2//} = T'_{1//} = T_{1//} \quad (10)$$

$$G_2 + T_{2\perp} = F_b + T'_{1\perp} = F_b + T_{1\perp} \quad (11)$$

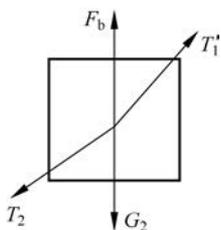


图 1-5 整体受力分析

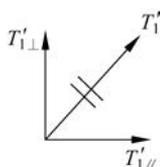


图 1-6 T'_1 分解

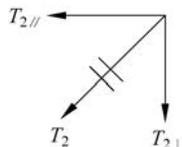


图 1-7 T_2 分解

对于锚链, 为了便于描述形状, 我们将锚固定的点设为 (x_0, y_0) , 将锚链与钢桶连接的点设为 (x_1, y_1) 。由几何关系和力学原理, 显然可以知道, 在连接点处切线的斜率与该点处合力方向相反。

浮标所受的风荷载为

$$f_1 = 0.625(l_1 - h)d_1 v_1^2 \quad (12)$$

浮标所受的浮力为

$$F_{b1} = \rho_w g \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 h \quad (13)$$

钢桶所受的浮力为

$$F_{b2} = \rho_w g \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 l_2 \quad (14)$$

钢管、锚链、重物球的浮力同样是不可忽略的, 我们已经假设它们排开海水的体积与其自身的体积相等, 并且它们的密度均为 $\rho_s = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。这样, 我们可以用等效重力加速度 g' 来刻画它们受到的重力与浮力的合力。

考虑浮力后的等效重力加速度(适用于钢管、锚链、重物球)为

$$g' = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} g \quad (15)$$

现在我们应用拉格朗日力学的方法对四根钢管和钢桶组成的系统进行分析, 选取 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ 为广义坐标, 写出各个力的作用点(从上到下)的矢径

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2} l_3 \sin \theta_1 \mathbf{i} + \frac{1}{2} l_3 \cos \theta_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2 = l_3 \left(\sin\theta_1 + \frac{\sin\theta_2}{2} \right) \mathbf{i} + l_3 \left(\cos\theta_1 + \frac{\cos\theta_2}{2} \right) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_3 = l_3 \left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \frac{\sin\theta_3}{2} \right) \mathbf{i} + l_3 \left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \frac{\cos\theta_3}{2} \right) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_4 = l_3 \left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \frac{\sin\theta_4}{2} \right) \mathbf{i} + l_3 \left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \frac{\cos\theta_4}{2} \right) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_5 = \left[l_3 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \sin\theta_4) + \frac{l_2}{2} \sin\theta_5 \right] \mathbf{i} +$$

$$\left[l_3 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \cos\theta_4) + \frac{l_2}{2} \cos\theta_5 \right] \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_6 = [l_3 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \sin\theta_4) + l_2 \sin\theta_5] \mathbf{i} +$$

$$[l_3 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \cos\theta_4) + l_2 \cos\theta_5] \mathbf{j}$$

列出拉格朗日方程^[1]：

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5$$

将各个力代入,化简后得到各节钢管与钢桶的倾斜角度与浮标吃水深度 h 的关系:

$$\tan\theta_1 = \frac{f_1}{F_{b1} - m_1 g - \frac{1}{2} m_3 g'} \quad (16)$$

$$\tan\theta_2 = \frac{f_1}{F_{b1} - m_1 g - \frac{3}{2} m_3 g'} \quad (17)$$

$$\tan\theta_3 = \frac{f_1}{F_{b1} - m_1 g - \frac{5}{2} m_3 g'} \quad (18)$$

$$\tan\theta_4 = \frac{f_1}{F_{b1} - m_1 g - \frac{7}{2} m_3 g'} \quad (19)$$

$$\tan\theta_5 = \frac{f_1}{F_{b1} + \frac{1}{2} F_{b2} - m_1 g - \frac{1}{2} m_2 g - 4m_3 g'} \quad (20)$$

锚链右端到海床平面的高度差为

$$h_1 = H - h - l_3 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \cos\theta_4) - l_2 \cos\theta_5 \quad (21)$$

锚链右端的切线斜率为

$$k_1 = \frac{T_{2y}}{f_1} \quad (22)$$

并且我们已经证明锚链的曲线方程为

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{1}{a}x\right) + C, \quad x_0 < x < x_1 \quad (23)$$

其中 $a = \frac{f_1}{\sigma_{II} g'}$

这样,我们将其他参量(诸如 h_1, a, k)都写成了 h 的函数。

在实际情况下,我们要考虑到锚链形状还受到海床的约束,锚链的最低点不能低于海床平面。这样,我们应该分两种情况考虑锚链形状:

① 锚链全部自由悬垂:

参见图 1-8,此时锚链方程满足如下条件:

$$h_1 = y(x_1) - y(x_0) = a \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) - a \cosh\left(\frac{x_0}{a}\right) \quad (\text{几何约束}) \quad (24)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = L \quad (\text{长度约束}) \quad (25)$$

$$y'(x_1) = k_1 \quad (\text{斜率约束}) \quad (26)$$

整合后我们得到了一个关于 h 的方程:

$$h^2 + 2ak_1L - L^2 - 2ah\sqrt{1+k_1^2} = 0 \quad (27)$$

从该方程可以解出浮标的吃水深度 h ,代入前述关系式可进而求得各节钢管与钢桶的倾斜角度以及锚链曲线方程的其他参量:

$$x_1 = a \cdot \operatorname{arcsinh}(k_1) \quad (28)$$

$$x_0 = a \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{ak - L}{a}\right) \quad (29)$$

以及浮标游动区域的半径

$$R = l_3(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \sin\theta_4) + l_2\sin\theta_5 + x_1 - x_0 + d_1/2 \quad (30)$$

② 锚链部分接触海床:

参见图 1-9,此时锚链方程满足如下条件:

$$h_1 = y(x_1) - y(0) = a \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) - a \quad (\text{几何约束}) \quad (31)$$

$$y'(x_1) = k_1 \quad (\text{斜率约束}) \quad (32)$$

整合后我们得到了一个关于 h 的方程:

$$h_1^2 + 2ah_1 - k_1^2 a^2 = 0 \quad (33)$$

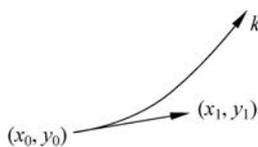


图 1-8 悬链线全部悬垂

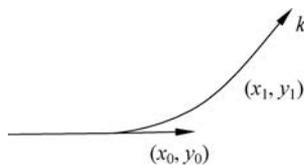


图 1-9 悬链线部分与海床接触

从该方程可以解出浮标的吃水深度 h ,与情况一同理可进而求得其他参量:

$$x_1 = a \cdot \operatorname{arcsinh}(k_1) \quad (34)$$

锚链与海床接触部分的长度为

$$L' = L - ak \quad (35)$$

浮标游动区域的半径

$$R = l_3(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \sin\theta_4) + l_2\sin\theta_5 + x_1 + L' + d_1/2 \quad (36)$$

(2) 模型求解

我们利用 MATLAB 求解前述的非线性方程,得到如下结果:

① 风速为 12m/s 时:

钢管的倾斜角度(从上到下):

$$\theta_1 = 1.1566^\circ, \quad \theta_2 = 1.1651^\circ, \quad \theta_3 = 1.1737^\circ, \quad \theta_4 = 1.1824^\circ$$

钢桶的倾斜角度: $\theta_5 = 1.2010^\circ$

浮标的吃水深度: $h = 0.6838\text{m}$

浮标游动区域的半径: $R = 15.6534\text{m}$

锚链形状:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 6.2521\text{m} \\ 3.9724 \left[\cosh\left(\frac{x - 6.2521}{3.9724}\right) - 1 \right], & 6.2521\text{m} < x < 14.5508\text{m} \end{cases}$$

原点取在锚点处。

② 风速为 24m/s 时:

钢管的倾斜角度(从上到下):

$$\theta_1 = 4.4013^\circ, \quad \theta_2 = 4.4322^\circ, \quad \theta_3 = 4.4635^\circ, \quad \theta_4 = 4.4952^\circ$$

钢桶的倾斜角度: $\theta_5 = 4.5629^\circ$

浮标的吃水深度: $h = 0.6979\text{m}$

浮标游动区域的半径: $R = 18.7784\text{m}$

锚链形状:

$$y(x) = 15.7190 \left[\cosh\left(\frac{x + 1.2214}{15.7190}\right) - 1 \right], \quad 0 < x < 17.3887\text{m}$$

原点取在锚点处,并且 $x_1 = 18.6100\text{m}, x_0 = 1.2214\text{m}$ 。

2. 问题 2 的模型建立与求解

(1) 模型建立

问题 2 与问题 1 的背景环境相同,只是需要考虑系统正常工作时的条件:钢桶的倾斜角度不超过 5° ,锚链在锚点与海床的夹角不超过 16° 。

关于浮标吃水深度 h ,钢管与钢桶的倾角 θ_i ,浮标游动半径 R 的计算都可参照问题 1 的模型,下面我们给出锚链在锚点与海床的夹角 θ_6 的计算方法。

整个系统在竖直方向受力平衡,因而有

$$F_{b1} + F_{b2} = m_1 g + m_2 g + 4m_3 g' + Mg' + \sigma Lg' + T_{3y} \quad (37)$$

又由于锚点处切线方向即为张力方向,有

$$\tan\theta_6 = \frac{T_{3y}}{f_1} \quad (38)$$

即

$$\theta_6 = \arctan \frac{T_{3y}}{f_1} \quad (39)$$

由此,我们计算出当风速为 36m/s 时的一些数据:

钢管的倾斜角度(从上到下):