第 1 章

线性方程组与矩阵

线性方程组与矩阵是线性代数的核心，它们不仅是线性代数的重要内容，而且是科学研究、工程技术和经济管理各领域中常用的工具. 科学技术和经济管理中的许多问题，如线性规划问题、电路设计问题、图像处理问题和经济投入产出、产出分配问题等，往往可以归结为建立和求解线性方程组的问题，进而利用矩阵理论和矩阵方法进行分析讨论.

本章将引入线性方程组的相关概念，从解析几何角度来直观地了解二元和三元线性方程组的解的几何意义；介绍解线性方程组的高斯(Gauss)消元法，引入线性方程组和矩阵的初等变换，把用消元法解线性方程组转化为对方程组的增广矩阵施以初等行变换来解决；建立矩阵的秩的概念，并利用矩阵的秩判别线性方程组的解的情况：无解、有唯一解或有无穷多解.

1-1

1.1 线性方程组的基本概念

1.1.1 线性方程组的定义

1. 线性方程

线性方程是指包含未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次幂的方程，形如

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

的方程，其中常数 b 称为方程的常数项，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为方程未知量的系数；下标 n 为正整数，表示方程未知量的个数.

例如，方程 $x_1+x_2=1$ 和 $x_1-x_2+2x_3=5$ 都是线性方程. 而方程 $2x_1+3\sqrt{x_2}=1$ 和 $x_1x_2+2x_3=5$ 都不是线性方程，因为这两个方程中的 $\sqrt{x_2}$ 和 x_1x_2 都不是未知量的一次幂的项.

2. 线性方程组

1-2

线性方程组是由一个以上包含相同未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程所组成的，形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

的方程组，其中 b_i 表示方程组中第 i 个方程的常数项，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数；下标 m,n 均为正整数，分别表示方程组(1.1.1)中方程

的个数和未知量的个数. 本书例题一般取 n 在 2 与 5 之间. 通常,从实际问题中得到的线性方程组,n 可以取 100、1000 或更大; 方程个数 m 与未知量个数 n 可以相等,也可以不相等.

3. 线性方程组的类型

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零,则方程组(1.1.1)称为 n 元非齐次线性方程组;

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零,则方程组(1.1.1)称为 n 元齐次线性方程组.

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为 n 元齐次线性方程组. 通常称方程组(1.1.2)为方程组(1.1.1)的导出组(齐次线性部分组).

例如,方程组

$$\begin{cases} -x_1+x_2=0, \\ \quad x_1-x_2=0, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=0, \\ \quad x_1-x_2=0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

都是齐次线性方程组.

方程组

$$\begin{cases} -x_1+x_2=2, \\ \quad x_1-x_2=3, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ x_1\qquad\quad -x_3=3, \\ x_1+x_2\qquad\quad =1 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

都是非齐次线性方程组,其中方程组(1.1.3)是方程组(1.1.5)的导出组.

4. 线性方程组的解

如果一组数 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$,可以使方程组(1.1.1)中所有方程都成立,则称有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$为方程组(1.1.1)的一个解(或解向量). 在下文中,我们不再区分解和解向量.

如果线性方程组有解,就称方程组是相容的; 否则,就称方程组是不相容的. 线性方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的解集合(简称解集). 如果两个线性方程组具有相同的解集,则称它们是同解方程组(或等价方程组). 表示线性方程组的全部解的表达式称为线性方程组的通解.

对于齐次线性方程组(1.1.2),$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解,这个解$(0,0,\cdots,0)$叫做齐次线性方程组(1.1.2)的零解. 如果不全为零的一组数是方程组(1.1.2)的解,则它叫做齐次线性方程组(1.1.2)的非零解.

例如，齐次线性方程组(1.1.3)有零解(0,0)，也有非零解(1,1)，并且可验证该方程组有无穷多解(k,k)，k 为任意实数；而齐次线性方程组(1.1.4)有零解(0,0)，但没有非零解，此时方程组只有唯一的零解.

因此齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解. 那么：

(1) 齐次线性方程组什么时候有非零解？

(2) 式(1.1.5)和式(1.1.6)中的非齐次线性方程组一定有解吗？它们的解的情况是什么？

1.1.2　二元和三元线性方程组的几何意义

为了方便直观地了解线性方程组的解的情况，我们先利用解析几何来研究比较简单的二元和三元线性方程组.

在解析几何中，平面上直线间的相互位置关系、空间上平面间的相互位置关系等问题，实际上都可以归结为线性方程组的问题来解决.

在 xOy 平面上，一条直线可以用一个二元线性方程 $ax+by=c$ 表示.

设有两条直线 $l_i: a_ix+b_iy=c_i\ (i=1,2)$，则方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

就是一个二元线性方程组. 若有数组(x_0,y_0)满足方程组(1.1.7)当且仅当(x_0,y_0)是这两条直线间的公共交点. 因此，二元线性方程组的解等价于平面上直线之间的公共点.二元线性方程组的解的不同情况对应着平面上直线间不同的位置关系.

平面上两条直线间的位置关系只有平行、相交、重合三种情况，因而对应着二元线性方程组的解只有三种情况：无解、唯一解或无穷多解.故讨论平面上直线间三种不同的位置关系，就相当于研究二元线性方程组的解的三种不同情况，反之亦然.

例 1.1.1　判别下列二元线性方程组的解的情况，并讨论它们的解的几何意义.

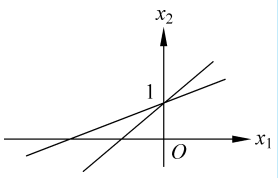
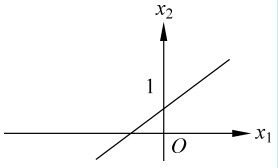
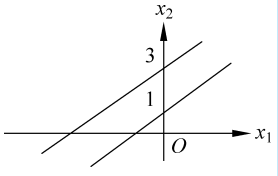
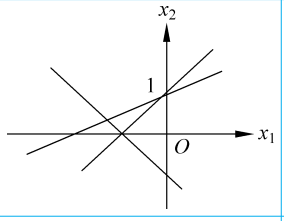
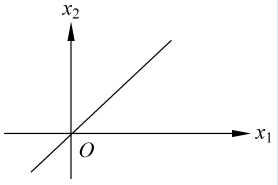
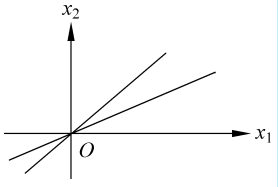
(1) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ -x_1+3x_2=3; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ -x_1+x_2=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ -x_1+x_2=3; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ x_1+x_2=-1, \\ -x_1+3x_2=3; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ -x_1+x_2=0; \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ -x_1+2x_2=0. \end{cases}$

解　如表 1.1.1 所示，容易验证，方程组(1)有唯一解(0,1)；方程组(2)对应的两条直线完全重合，方程组有无穷多解；方程组(3)对应的两条直线平行，但不重合，方程组无解；方程组(4)对应的三条直线两两相交，但没有公共交点，方程组无解；方程组(5)对应的两条直线都经过原点，且完全重合，方程组有无穷多解；方程组(6)对应的两条直线都经过原点，且只有唯一交点(0,0)，方程组有唯一零解.

表 1.1.1 二元线性方程组的解的情况及其图示

二元线性方程组	图 示	直线间的位置关系	方程组的解的情况
(1) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ -x_1+3x_2=3 \end{cases}$		两条直线相交于一点 $(0,1)$	方程组有唯一解
(2) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ -x_1+x_2=1 \end{cases}$		两条直线重合	方程组有无穷多解
(3) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ -x_1+x_2=3 \end{cases}$		两条直线平行，但不重合	方程组无解
(4) $\begin{cases} x_1-x_2=-1, \\ x_1+x_2=-1, \\ -x_1+3x_2=3 \end{cases}$		三条直线两两相交，但没有公共点	方程组无解
(5) $\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ -x_1+x_2=0 \end{cases}$		两条直线都经过原点，且完全重合	方程组有无穷多解，从而有非零解
(6) $\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ -x_1+2x_2=0 \end{cases}$		两条直线都经过原点，且只有唯一交点 $(0,0)$	方程组有唯一解，从而仅有零解

注 方程组(2)的两个方程中只有一个独立方程，因为其中的一个方程可以由另一个通过数乘和加法(线性运算)得到.这样，方程组的解中会含有参数，例如，由第一个方程 $x_1-x_2=-1$ 得到 $x_2=x_1+1$，则将 $x_1=x_1$，$x_2=x_1+1$ 代入必满足方程组，即 $\begin{cases} x_1=x_1, \\ x_2=x_1+1 \end{cases}$ 是方程组(2)的解.该解中的未知量 x_2 可由未知量 x_1 表示，x_1 作为参数可任意取值，故称之为**自由未知量**，x_1 取定一个值，x_2 就相应取得一个定值，所以方程组(2)有无穷多个解，方程

组的所有解可表示为$\begin{cases}x_1=c,\\x_2=c+1\end{cases}$（$c$ 为任意实数）.

注　方程组(5)、(6)都是二元齐次线性方程组，把 $x_1=0, x_2=0$ 代入二元齐次线性方程组都能使之成立，故齐次线性方程组必有零解. 但方程组(6)只有零解，而方程组(5)的解可表示为$\begin{cases}x_1=x_1,\\x_2=x_1,\end{cases}$其中 x_1 为自由未知量，可以任意取值，所以方程组(5)有无穷多个解$\begin{cases}x_1=c,\\x_2=c\end{cases}$（$c$ 为任意实数）.

类似地，在空间解析几何中，三元线性方程 $ax+by+cz=d$ 表示空间中的一个平面.

设有三个平面 $\pi_i: a_ix+b_iy+c_iz=d_i\ (i=1,2,3)$，则方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}\tag{1.1.8}$$

就是一个三元线性方程组. 若有数组(x_0,y_0,z_0)满足方程组(1.1.8)当且仅当(x_0,y_0,z_0)是这三个平面间的公共点.因此三元线性方程组的解等价于平面之间的公共点，要考查这三个平面的位置关系，实际上只要考查这个线性方程组(1.1.8)的解的情况即可.

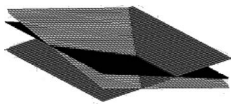
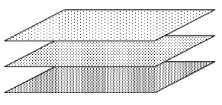
例 1.1.2　判别下列三元线性方程组的解的情况，并讨论它们的解的几何意义：

(1) $\begin{cases}x-y+z=2,\\2x+y-z=1,\\3x-y+2z=7;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x-y+z=2,\\2x-2y+2z=6,\\-x+y-z=3;\end{cases}$

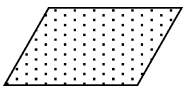
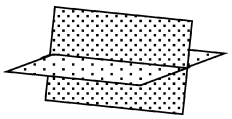
(3) $\begin{cases}x-y+z=2,\\2x-2y+2z=4,\\-x+y-z=-2;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x-y+z=2,\\y+z=1,\\-x+y-z=-2.\end{cases}$

解　如表 1.1.2 所示，可得方程组(1)对应的三个平面有唯一公共点，则方程组有唯一解(1,2,3)；方程组(2)对应的三个平面平行，但不重合，方程组无解；方程组(3)对应的三个平面完全重合，则方程组有无穷多解；方程组(4)中有两个平面重合，三个平面相交于一条直线，则方程组有无穷多解.

表 1.1.2　三元线性方程组的解的情况及其图示

三元线性方程组	图　示	平面间的位置关系	方程组的解的情况
(1) $\begin{cases}x-y+z=2,\\2x+y-z=1,\\3x-y+2z=7\end{cases}$		三个平面相交于唯一公共点	方程组有唯一解
(2) $\begin{cases}x-y+z=2,\\2x-2y+2z=6,\\-x+y-z=3\end{cases}$		三个平面平行，彼此不重合	方程组无解

续表

三元线性方程组	图　　示	平面间的位置关系	方程组的解的情况
(3) $\begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x-2y+2z=4, \\ -x+y-z=-2 \end{cases}$		三个平面完全重合	方程组有无穷多解
(4) $\begin{cases} x-y+z=2, \\ y+z=1, \\ -x+y-z=-2 \end{cases}$		三个平面相交于一条直线	方程组有无穷多解

由于空间上三个平面之间可能没有公共点、可能交于一个公共点、可能交于一直线或可能完全重合，因而对应着三元线性方程组的解只有三种情况：无解、唯一解或无穷多解.

由此，我们可得到线性方程组的下列一般事实，这将在 1.4 节证明.

线性方程组的解有下列三种情况：

(1) 无解；

(2) 唯一解；

(3) 无穷多解.

对于一般的线性方程组，我们最关心的问题是：如何判别一个方程组是否有解？如果方程组有解，那么它有多少解？有解时怎样求出它的全部解？这些问题将在本书中以各种形式出现. 下面我们将在 1.2 节介绍求解线性方程组的消元法和初等变换法，在 1.3 节和 1.4 节介绍如何通过增广矩阵的初等行变换法来解线性方程组.

1.2　线性方程组的消元法和初等变换

本节将介绍解线性方程组的高斯消元法，它的基本思想是对方程组施行一系列同解变形，消去方程组中的若干个未知量，把方程组化为一个更容易求解的同解方程组. 即用方程组的第一个方程中的 x_1 的项消去其他方程中含 x_1 的项，然后用第二个方程中的 x_2 的项消去其他方程中含 x_2 的项，以此类推，……，有时还可以消去方程组中某些多余的方程，最后我们将得到一个更简单更容易求解的行阶梯形方程组或行最简形方程组. 下面用具体例子来讨论这一方法.

1.2.1　线性方程组的消元法

1-3

例 1.2.1　解线性方程组 Ⅰ：$\begin{cases} 2x_1+5x_2=9, & ① \\ x_1-x_2=1. & ② \end{cases}$

解　先设法消去方程组的两个方程中的 x_1. 为此，可以把方程①两边乘以 $\frac{1}{2}$ 使 x_1 的系数变成 1，然后再做下一步运算，但若这样，则方程①中未知量的系数会出现分数，接下来的计算会比较麻烦. 为方便运算，先交换方程①和方程②的位置，消元过程如下：

$$\mathrm{I}\xrightarrow{①\leftrightarrow②}\mathrm{I}_1:\begin{cases}x_1-x_2=1, & ①\\ 2x_1+5x_2=9. & ②\end{cases}$$

$$\xrightarrow{②-①\times 2}\mathrm{I}_2:\begin{cases}x_1-x_2=1, & ①\\ 7x_2=7. & ②\end{cases}$$

$$\xrightarrow{②\div 7}\mathrm{I}_3:\begin{cases}x_1-x_2=1, & ①\\ x_2=1. & ②\end{cases}$$

用回代法，解得$\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=1.\end{cases}$即方程组 Ⅰ 有唯一解(2,1). 我们可以通过代入的方法，验证这一结果.

上述回代过程也可以这样处理：用方程组 I_3 的第二个方程中的 x_2，把第一个方程中的 x_2 消去，可得下面的方程组 I_4，就可以得到原方程组 Ⅰ 的唯一解(2,1).回代过程如下：

$$\mathrm{I}_3:\begin{cases}x_1-x_2=1, & ①\\ x_2=1. & ②\end{cases}$$

$$\xrightarrow{①+②}\mathrm{I}_4:\begin{cases}x_1=2, & ①\\ x_2=1. & ②\end{cases}$$

例 1.2.2　解线性方程组 Ⅱ：$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1, & ①\\ 2x_1+5x_2+7x_3=3, & ②\\ 3x_1+5x_2+10x_3=6. & ③\end{cases}$

1-4

解　先设法消去方程组中方程②和方程③中的 x_1.为此，可以把方程②减去方程①的 2 倍，把方程③减去方程①的 3 倍.消元过程如下：

$$\mathrm{II}:\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1, & ①\\ 2x_1+5x_2+7x_3=3, & ②\\ 3x_1+5x_2+10x_3=6. & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[③-①\times 3]{②-①\times 2}\mathrm{II}_1:\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1, & ①\\ x_2+x_3=1, & ②\\ -x_2+x_3=3. & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{③+②}\mathrm{II}_2:\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1, & ①\\ x_2+x_3=1, & ②\\ 2x_3=4. & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{③\div 2}\mathrm{II}_3:\begin{cases}\boxed{x_1}+2x_2+3x_3=1, & ①\\ \boxed{x_2}+x_3=1, & ②\\ \boxed{x_3}=2. & ③\end{cases}$$

用回代法，解得$\begin{cases}x_1=-3,\\ x_2=-1,\\ x_3=2.\end{cases}$即方程组Ⅱ有唯一解$(-3,-1,2)$.

上述回代过程也可以这样处理：用方程组Ⅱ_3的第三个方程中的x_3，把另外两个方程中的x_3消去，可得下面的方程组Ⅱ_4；最后用方程组Ⅱ_4的第二个方程中的x_2，把第一个方程中的x_2消去，也可以得到原方程组Ⅱ的唯一解$(-3,-1,2)$. 回代过程如下：

$$\text{Ⅱ}_3 \xrightarrow[①-③\times 3]{②-③} \text{Ⅱ}_4:\begin{cases}\boxed{x_1}+2x_2 = -5, & ①\\ \boxed{x_2} = -1, & ②\\ \boxed{x_3} = 2. & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{①-②\times 2} \text{Ⅱ}_5:\begin{cases}\boxed{x_1} = -3, & ①\\ \boxed{x_2} = -1, & ②\\ \boxed{x_3} = 2. & ③\end{cases}$$

1.2.2 行阶梯形方程组和行最简形方程组

例 1.2.2 中消元完毕后所得的新方程组Ⅱ_2称为**行阶梯形方程组**.我们把行阶梯形方程组Ⅱ_2中阶梯线后面的变量x_1,x_2,x_3称为**基本未知量或主元未知量**，其他变量称为**自由未知量**，我们说的自由未知量，是指它们可取任意的值. 例 1.2.2 中有 3 个主元未知量，没有自由未知量.

在回代过程中最后得到的方程组Ⅱ_5称为**行最简形方程组**，它是由行阶梯形方程组通过回代处理后得到的形式上最简单的方程组(主元未知量的系数为 1)，由行最简形方程组Ⅱ_5就可以直接得出原方程组的唯一解.

例 1.2.2 中得到的行阶梯形方程组、行最简形方程组就是与原方程组同解，且为更容易求解的线性方程组. 一般地，当我们得到一个方程组对应的行最简形方程组时，就可以得出原方程组的所有解的情况.

1.2.3 线性方程组的初等变换

例 1.2.1 和例 1.2.2 的解法可以用于任意线性方程组. 在线性方程组的化简及求解过程中，我们施行了下列三种变换：

(1) **对调变换**：交换第i，j两个方程的位置，记作$(i)\leftrightarrow(j)$；

(2) **倍乘变换**：以**非零常数**k乘以第i个方程，记作$k\times(i)$；

(3) **倍加变换**：第i个方程加上第j个方程的k倍，记作$(i)+k\times(j)$.

我们把这三种变换称为**线性方程组的初等变换**.利用初等变换把原方程组化为行阶梯形方程组(消元过程)，再继续使用初等变换化为行最简形方程组(回代过程)，最后解出原方

程组未知量的这个过程叫做(高斯)消元法.

注　从下面的变换过程容易得出上述三种变换都是可逆的.

例如,下列式(1)中交换线性方程组Ⅰ中第 i,j 两个方程的位置后得到方程组Ⅱ,那么把方程组Ⅱ的 i,j 两个方程再作交换就还原为方程组Ⅰ,因此对调变换是可逆变换. 类似地,其他两种变换也是可逆的,见式(2)、式(3).

(1) $\mathrm{Ⅰ}\xrightarrow{i\leftrightarrow j}\mathrm{Ⅱ}\xrightarrow{i\leftrightarrow j}\mathrm{Ⅰ}$;

(2) $\mathrm{Ⅰ}\xrightarrow{k\times i}\mathrm{Ⅱ}\xrightarrow{\frac{1}{k}\times i}\mathrm{Ⅰ}\ (k\neq 0)$;

(3) $\mathrm{Ⅰ}\xrightarrow{i+k\times j}\mathrm{Ⅱ}\xrightarrow{i-k\times j}\mathrm{Ⅰ}$.

因此,对线性方程组施行的初等变换是可逆变换,变换前后的方程组同解,我们也把这个过程称为方程组的同解变换过程,从而通过初等变换所得到的新的方程组与原方程组同解. 例如,在例 1.2.2 中,原方程组Ⅱ经过若干次的初等变换得到了一系列方程组 $\mathrm{Ⅱ}_1$,$\mathrm{Ⅱ}_2$,$\mathrm{Ⅱ}_3$,…,$\mathrm{Ⅱ}_5$,这些方程组均有唯一解(−3,−1,2),因而这些方程组都是同解方程组.

用消元法解线性方程组是把整个方程组通过逐次消元变成另一个更容易求解的同解方程组. 事实上,**线性方程组的消元法等价于线性方程组的初等变换.**

注　用初等变换法解线性方程组,运算符号用:“→”或“～”,过程如下:

$$\text{线性方程组}\xrightarrow[\text{消元过程}]{\text{初等变换}}\text{行阶梯形方程组}\xrightarrow[\text{回代过程}]{\text{初等变换}}\text{行最简形方程组}$$

例 1.2.3　解线性方程组Ⅲ:
$$\begin{cases} x_2+2x_3-x_4=1, & ①\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1, & ②\\ 3x_1+x_2-x_3+5x_4=1. & ③ \end{cases}$$

1-5

解　由于方程①中 x_1 的系数为 0,不能消去方程②③中的 x_1. 因此,先交换方程①和方程②的位置,解方程组的过程如下:

$$\mathrm{Ⅲ}\xrightarrow{①\leftrightarrow②}\mathrm{Ⅲ}_1:\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, & ①\\ x_2+2x_3-x_4=1, & ②\\ 3x_1+x_2-x_3+5x_4=1. & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{③-①\times 3}\mathrm{Ⅲ}_2:\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, & ①\\ x_2+2x_3-x_4=1, & ②\\ -2x_2-4x_3+2x_4=-2. & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{③+②\times 2}\mathrm{Ⅲ}_3:\begin{cases} \boxed{x_1}+x_2+x_3+x_4=1, & ①\\ \boxed{x_2}+2x_3-x_4=1, & ②\\ 0=0. & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①-②}\mathrm{Ⅲ}_4:\begin{cases} \boxed{x_1}-x_3+2x_4=0, & ①\\ \boxed{x_2}+2x_3-x_4=1, & ②\\ 0=0. & ③ \end{cases}$$

我们可以得到与原方程组同解的行阶梯形方程组 Ⅲ_3 和行最简形方程组 Ⅲ_4，其中 $\text{Ⅲ}\to\text{Ⅲ}_3$ 的化简过程为消元过程，$\text{Ⅲ}_3\to\text{Ⅲ}_4$ 的化简过程为回代过程. 行阶梯形方程组 Ⅲ_4 中阶梯线后面的变量 x_1,x_2 为主元未知量，变量 x_3,x_4 为自由未知量，可取任意值.

因此，原线性方程组对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3+2x_4=0, \\ \quad x_2+2x_3-x_4=1, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1=\quad x_3-2x_4, \\ x_2=-2x_3+x_4+1. \end{cases}$$

即基本未知量 x_1,x_2 可以用自由未知量 x_3,x_4 表示. 取自由未知量 $x_3=c_1,x_4=c_2$ 可得方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1-2c_2 \\ -2c_1+c_2+1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1,c_2 \text{ 为任意实数.}$$

即方程组Ⅲ有无穷多解.

注 方程组 Ⅲ_4 中最后一个方程“$0=0$”恒成立，说明原方程组的 3 个方程中有两个独立方程，一个多余方程.

注 利用高中的向量运算或第 3 章的矩阵运算，方程组Ⅲ的所有解还可以表示成

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1-2c_2 \\ -2c_1+c_2+1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.2.4 解线性方程组Ⅳ：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, & ① \\ x_1+x_2+2x_3=1, & ② \\ x_1+x_2-x_3=2. & ③ \end{cases}$

解 解方程组的过程如下：

$$\text{Ⅳ} \xrightarrow[③-①]{②-①} \text{Ⅳ}_1:\begin{cases} x_1+x_2+\quad x_3=1, & ① \\ \qquad\quad x_3=0, & ② \\ \qquad -2x_3=1. & ③ \end{cases} \xrightarrow{③+②\times 2} \text{Ⅳ}_2\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, & ① \\ \qquad\quad x_3=0, & ② \\ \qquad\quad\ 0=1. & ③ \end{cases}$$

由此得到的方程组 Ⅳ_2 为行阶梯形方程组，但其中方程③“$0=1$”是矛盾方程，方程组 Ⅳ_2 无解，从而原方程组无解.

由例 1.2.1～例 1.2.4 可以看出，解线性方程组的消元过程或回代过程，实际上是利用线性方程组的初等变换，把方程组中某些未知量的系数化为零，起到化简方程组的系数和常数项的作用，从而把原方程组化为更容易求解的行阶梯形方程组或行最简形方程组，得出方程组的解. 因此，线性方程组的解由方程组的系数和常数项决定. 同时，我们还可以得出这样一个事实，在线性方程组的初等变换（同解变换）过程中，主元未知量的个数保持不变.