第一章　函数、极限与连续

函数是各种变量相互依存关系的数学表现形式，极限是描述在某一过程中变量变化趋势的一个重要概念。高等数学以函数为研究对象，以极限作为主要研究工具。本章将介绍函数、极限与连续的基本概念，以及它们的一些主要性质。

第一节　函　　数

★ 基础模块

一、函数的概念

1. 区间与邻域

为简便起见，在表示数值范围时，经常采用区间符号。设实数 a 与 b，且 $a<b$，则

闭区间　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$

开区间　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$

半开半闭区间　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$

$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$

上述区间都是有限区间，点 a 称为左端点，点 b 称为右端点，统称为区间端点，它们的距离 $b-a$ 称为区间长度。

除上述有限区间外，还有无限区间：

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\},(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\},[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$$

其中，$\mathbf{R}$ 表示实数集，符号∞读作“无穷大”，$+\infty$读作“正无穷大”，$-\infty$读作“负无穷大”。

区间$[a,b]$，(a,b)，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$在数轴上的表示分别如图 1-1(a)，(b)，(c)，(d)所示。

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点 a 的δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

从数轴上看，这是一个以 a 为中心，长度为 2δ 的区间。

若去掉邻域 $U(a,\delta)$中的点 a，称为点 a 的去心δ 邻域，记作 $U^{o}(a,\delta)$，即

$$U^{o}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

邻域在数轴上的表示如图 1-2 所示。

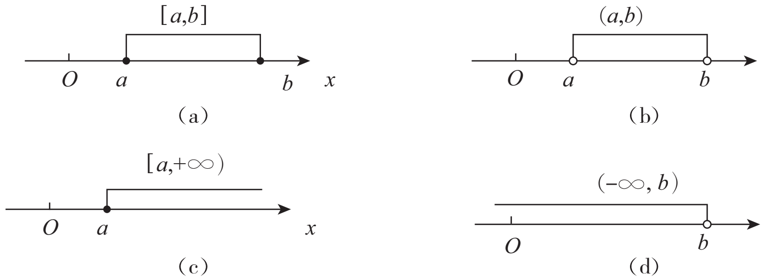


图 1-1

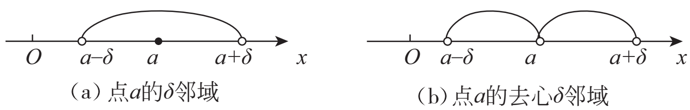


图 1-2

2. 函数的定义

例 1 某物体以 10m/s 的速度做匀速直线运动,则该物体走过的路程 S 和时间 t 有如下关系:

$$S = 10t, \quad (0 \leqslant t < +\infty)$$

对变量 t 和 S,每当 t 在$[0,+\infty)$内取一定值 t_0,S 就有唯一确定的值 $S_0 = 10t_0$ 与之对应。变量 t 和 S 之间的这种对应关系,即是函数概念的实质。

定义 1 设 D 为非空数集,x 与 y 是两个变量。如果对变量 x 在 D 中的每一个值,按照某种对应法则 f,变量 y 都有确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为

$$y = f(x), \quad x \in D$$

称 x 为自变量,y 为因变量,对应法则 f 称为函数关系,x 的取值范围 D 称为函数的定义域;与 x 对应的 y 值称为函数值,全体函数值的集合$\{y \mid y = f(x), x \in D\}$称为函数的值域,记为 M。

关于函数的定义,需要作如下几点说明。

(1) 定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个主要因素。只有定义域和对应法则都相同的两个函数才是相同函数。

(2) 若对 x 在 D 中的每一个值,y 值唯一,这时也称函数为单值函数;若对 x 在 D 中的每一个值,y 有两个或两个以上的不同值与之对应,则称函数为多值函数。在本书中主要讨论单值函数。

(3) 当 $x = x_0$ 时,对应的函数值为 y_0,通常记作 $y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0)$。此时,称函数 $y = f(x)$在 $x = x_0$ 处有定义。

例 2 下面各对函数是否是相同函数?

(1) $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$ (2) $u(x) = \ln x^2, v(x) = 2\ln x$

解 (1) $f(x)$和 $g(x)$是相同函数。因为它们的定义域都是全体实数 $\mathbf{R}$,且 x 取任意实数 a 时,$f(a) = g(a)$,即对应法则相同。

(2) $u(x)$和$v(x)$是不相同函数。因为$u(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而$v(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，两者定义域不相同。

3. 函数的定义域

函数的定义域就是使函数有意义的自变量的取值范围。一般情况下，当函数关系表示一个实际问题时，函数定义域应是使实际问题有意义的自变量的取值范围；当函数关系不表示实际问题，且用数学式子表示时，函数定义域应是使该数学式子有意义的自变量的取值范围。

例 3 求下列函数的定义域。

(1) $y=\ln(x+2)$　　(2) $y=\sqrt{2x-1}$

(3) $y=\sqrt{x+3}-\dfrac{1}{1-x^2}$　　(4) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{x-1}$

解 (1) 要使函数有意义，须使$x+2>0$，即$x>-2$，所以函数的定义域为$\{x\mid x>-2\}$。

(2) 要使函数有意义，须使$2x-1\geqslant0$，即$x\geqslant\dfrac{1}{2}$，所以函数的定义域为$\left\{x\mid x\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$。

(3) 要使函数有意义，须使$\begin{cases}x+3\geqslant0\\1-x^2\neq0\end{cases}$，解不等式组得$x\geqslant-3$，且$x\neq\pm1$，所以函数的定义域为$\{x\mid x\geqslant-3$ 且 $x\neq\pm1\}$。

(4) 要使函数有意义，须使$\begin{cases}x+2>0\\x-1\neq0\end{cases}$，即有$\begin{cases}x>-2\\x\neq1\end{cases}$，所以函数的定义域是$\{x\mid x>-2$ 且 $x\neq1\}$。

4. 函数表示法

在中学里，我们已经知道函数的表示方法主要有三种：解析法(或称公式法)、列表法和图像法。

有些函数在其定义域的不同部分需用不同的公式表达，这类函数称为分段函数。例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

是分段函数，其图像如图 1-3 所示。这个函数又称为符号函数，常用 $\operatorname{sgn}x$ 表示。

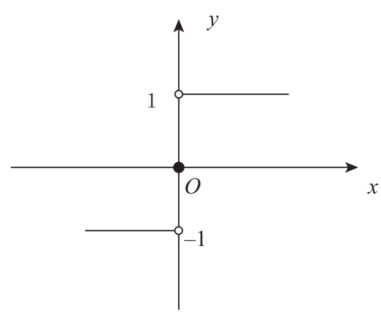


图 1-3

又如，函数$f(x)=|x|$也可用分段函数形式表示：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$$

还有些函数难以用解析法、列表法或图像法来表示，只能用语言来描述。如下面的函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

这个函数称为狄利克雷(Dirichlet)函数。

二、函数的基本特性

1. 单调性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，

(1) 若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的；

(2) 若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的。

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数。

2. 奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果函数既不是奇函数也不是偶函数，称其为非奇非偶函数。

奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称。

例 4 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=x^3-3x$ (2) $f(x)=x^2(1-x^2)$ (3) $\varphi(x)=x^2+x$

解 (1) 因为 $f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)=x^3-3x$ 是奇函数。

(2) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，所以函数 $f(x)=x^2(1-x^2)$ 是偶函数。

(3) 因为 $\varphi(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，即 $\varphi(-x)\neq\varphi(x)$，$\varphi(-x)\neq-\varphi(x)$，所以函数 $\varphi(x)=x^2+x$ 是非奇非偶函数。

3. 有界性

定义 4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界；否则，称 $f(x)$ 在区间 I 内无界。

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的。因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在正数 $M=1$，使 $|\sin x|\leqslant 1$ 恒成立。又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的。当 x 取正值无限接近 0 时，$\dfrac{1}{x}$ 无限增大，因此不可能存在某个正数 M，使任意 $x\in(0,1)$ 时恒有 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立，如图 1－4 所示。

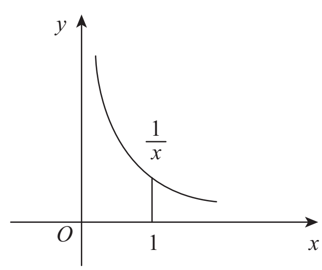


图 1－4

4. 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对于任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 称为 $f(x)$ 的周期。其中，满足等式 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数 T 称为函数的最小正周期。通常把函数的最小正周期称为函数的周期。

三、反函数与初等函数

1. 反函数

定义 6 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 M。对于任意一数值 $y\in M$,在 D 内可以确定一个 x 与 y 对应,这个 x 满足关系 $y=f(x)$。如果把 y 看成自变量,把 x 看作因变量,得到一个新的函数,称这个新的函数为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$。

关于反函数的定义,需作如下说明。

(1) 习惯上,自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,这样 $y=f(x)$的反函数就表示为 $y=f^{-1}(x)$。

(2) 函数 $y=f(x)$的定义域是反函数的值域,函数 $y=f(x)$的值域是反函数的定义域。

(3) 由定义 6 可知,如果 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的反函数,则 $y=f(x)$也是 $y=f^{-1}(x)$的反函数。把 $y=f(x)$和 $y=f^{-1}(x)$的图像绘在同一坐标平面上,这两个图像关于直线 $y=x$ 对称。

(4) 已知函数 $y=f(x)$,求其反函数的方法是:从对应法则 $y=f(x)$中求出 $x=f^{-1}(y)$,然后改写成 $y=f^{-1}(x)$,并指出反函数的定义域。

例 5 求下列函数的反函数。

(1) $y=\dfrac{x-1}{x}$　　　　(2) $y=\ln(x-1)$

解 (1) 由 $y=\dfrac{x-1}{x}$解得 $x=\dfrac{1}{1-y}$并改写为 $y=\dfrac{1}{1-x}$,于是所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{1-x}$,其定义域是$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq1\}$。

(2) 由 $y=\ln(x-1)$解得 $x-1=\mathrm{e}^y$ 即 $x=\mathrm{e}^y+1$ 并改写为 $y=\mathrm{e}^x+1$,于是所求的反函数为 $y=\mathrm{e}^x+1$,其定义域是全体实数 $\mathbf{R}$。

2. 基本初等函数

常量、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数。

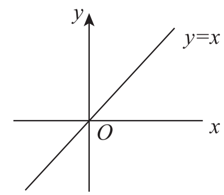
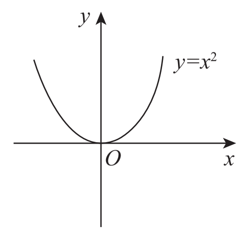
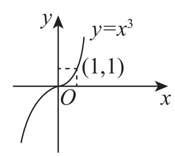
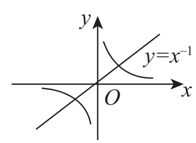
常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质如表 1-1 所示。

3. 复合函数与初等函数

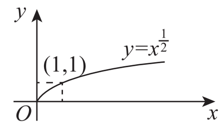
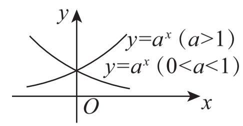
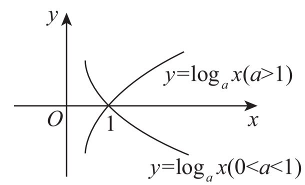
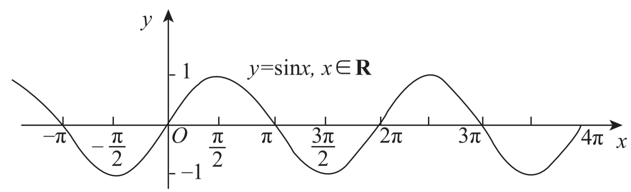
函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示 y 是 x 的函数,它的定义域为$[-1,1]$。如果引入辅助函数 u,则这个函数的对应法则可这样理解:首先,对于任意 $x\in[-1,1]$,通过函数 $u=1-x^2$ 得到对应的 u 值;然后,对于这个 u 值,通过函数 $y=\sqrt{u}$ 得到相应的 y 值,称函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 构成的复合函数,u 称为中间变量。

定义 7 设 $y=f(u)$是以 u 为自变量的函数,$u=\varphi(x)$是以 x 为自变量的函数。如果当 x 在某一数集 I 内取值时,函数 $u=\varphi(x)$相应的值能使 $y=f(u)$有意义,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$是由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,变量 u 称为中间变量。

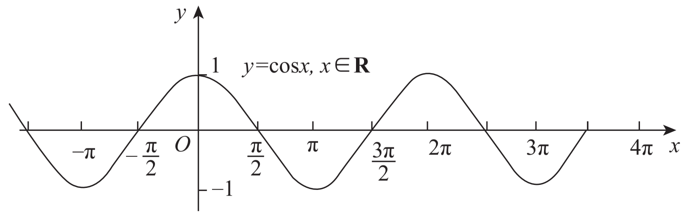
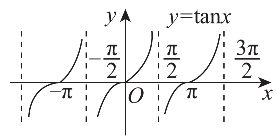
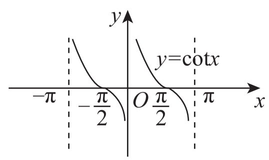
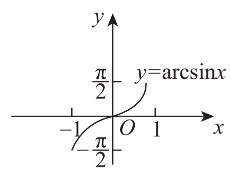
表 1-1

函数		定义域和值域	图像	性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数，在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，在$(-\infty,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数，单调减少

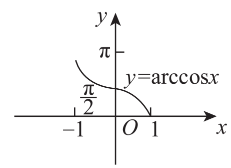
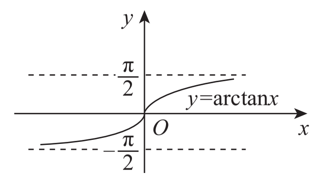
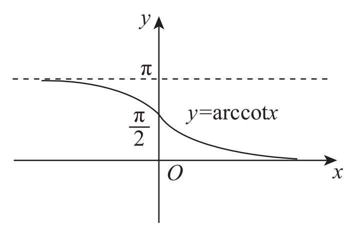
续表

函　数		定义域和值域	图　像	性　质
幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点$(0,1)$， 当 $a>1$ 时，单调增加； 当 $0<a<1$ 时，单调减少
对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq 1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点$(1,0)$， 当 $a>1$ 时，单调增加； 当 $0<a<1$ 时，单调减少
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界， 在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加， 在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调减少

续表

函　数		定义域和值域	图　像	性　质
三角函数	余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调减少，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加
	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调减少
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界，单调增加

续表

函　数		定义域和值域	图　像	性　质
反三角函数	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，单调减少
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，单调减少

关于复合函数的定义,需作如下说明。

(1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数。例如,函数 $y=\ln(u-1)$ 和 $u=1-x^2$ 是不能进行复合的,因为对于 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值 $(u\leqslant 1)$,都不能使 $y=\ln(u-1)$ 有意义。

(2) 通常一个复合函数可以由多个函数复合而成,即有多个中间变量。

例 6 已知 $f(x)=x^2+1,\varphi(x)=\mathrm{e}^{2x}$,求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$。

解 $f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2+1=\mathrm{e}^{4x}+1,\quad \varphi[f(x)]=\mathrm{e}^{2f(x)}=\mathrm{e}^{2(x^2+1)}$

例 7 写出下列复合函数的复合过程。

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$　(2) $y=\sin(3x+1)$　(3) $y=\mathrm{e}^{2x-3}$

(4) $y=\ln(1-x^3)$　(5) $y=\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

解 (1) 函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2+1$ 复合成的。

(2) 函数 $y=\sin(3x+1)$ 是由 $y=\sin u$ 和 $u=3x+1$ 复合成的。

(3) 函数 $y=\mathrm{e}^{2x-3}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=2x-3$ 复合成的。

(4) 函数 $y=\ln(1-x^3)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=1-x^3$ 复合成的。

(5) 函数 $y=\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是由 $y=u^3,u=\sin v$ 和 $v=2x-\dfrac{\pi}{4}$ 复合成的。

复合函数分解的结果是:若干个基本初等函数或者基本初等函数经有限次四则运算得到的函数。

定义 8 由基本初等函数经过有限次四则运算或复合运算得到的、且能用一个解析式子表示的函数称为初等函数。例如,$y=\sqrt{x^2+3x-10}$,$y=x^3+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 都是初等函数。

★★ 扩展模块

例 8 求下列函数的定义域。

(1) $y=\lg\left(\sin\dfrac{x}{\pi}\right)$　(2) $y=\sqrt{6-x^2+x}-\arcsin\dfrac{x+1}{2}$

解 (1) 要使函数有意义,须使 $\sin\dfrac{x}{\pi}>0$,解不等式得 $2k\pi<\dfrac{x}{\pi}<(2k\pi+1)\pi$,所以函数的定义域为 $\{x\,|\,2k\pi^2<x<(2k\pi+1)\pi^2(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\}$。

(2) 要使函数有意义,须使

$$\begin{cases}6-x^2+x\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1\end{cases},\quad \text{解不等式组得}\ \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\ -3\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

所以函数的定义域是 $\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 1\}$,即 $[-2,1]$。

例 9 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=x\sin x+\cos x$　(2) $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$