

01 空腔物体的质心

我们可以用悬挂法测量三角形板的质心(图 1),假设三角形板没有厚度,质量均匀分布,中间的内空三角形和边界三角形是相似的,理论上,这个空腔三角形的质心在哪里?逐渐把内空的三角形扩大,直到和边界三角形重合,但是保持总的质量不变,那么这个框架三角形的质心在哪里?升高维度,把三角形板替换为四面体,那么空腔和框架四面体的质心分别在哪里?

1. 三角形质心公式的推导

设三角形三个顶点的位置矢量(位矢)分别是 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 和 $\mathbf{r}_3$,那么三角形内部任意一点的位矢是

$$\mathbf{r}(a, b) = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)a + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)b$$

其中,各参数的取值范围是

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1, \quad 0 < a + b < 1$$

三角形的面元是

$$dA = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \right| da db = |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)| da db = 2A da db$$

其中, $A = \frac{1}{2} |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)|$ 是三角形的面积。由质心的积分定义(这是基础原始本质的定义)

$$A \mathbf{r}_c = \iint \mathbf{r}(a, b) dA = 2A \int_0^1 da \int_0^{1-a} (\mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)a + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)b) db$$

由以下三个简单的两重积分表达式

$$\int_0^1 da \int_0^{1-a} db = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 da \int_0^{1-a} b db = \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 a da \int_0^{1-a} db = \frac{1}{6}$$

得到三角形的质心公式

$$\mathbf{r}_c = 2 \left(\frac{\mathbf{r}_1}{2} + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{6} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{6} \right) = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}$$

2. 四面体质心公式的推导

设四面体四个顶点的位矢分别是 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 和 $\mathbf{r}_4$,那么四面体内部任意一点的位矢是

$$\mathbf{r}(a, b, c) = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)a + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)b + (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1)c$$

其中,参数的取值范围是

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1, \quad 0 < c < 1, \quad 0 < a + b + c < 1$$

四面体的体积元是

$$\begin{aligned} dV &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} \right) \right| da db dc \\ &= |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot ((\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1))| da db dc = 6A da db dc \end{aligned}$$

其中, $V = \frac{1}{6} |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot ((\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1))|$ 是四面体的体积。由质心的积分定义

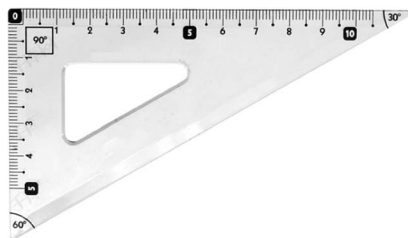


图 1

$$V\mathbf{r}_c = \iiint \mathbf{r}(a, b, c) dV = 6V \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} dc (\mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)a + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)b + (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1)c)$$

由以下四个简单的三重积分表达式

$$\begin{aligned} \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} dc &= \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 a da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} dc = \frac{1}{24} \\ \int_0^1 da \int_0^{1-a} b db \int_0^{1-a-b} dc &= \frac{1}{24}, \quad \int_0^1 a da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} c dc = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

得到四面体的质心公式

$$\mathbf{r}_c = 6 \left(\frac{\mathbf{r}_1}{6} + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{24} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{24} + \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1}{24} \right) = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4}$$

3. 空腔三角形的质心

空腔三角形由外面(边界)三角形里面挖去一个小的三角形而来。由质心的线性组合原理,空腔三角形的质心为

$$\mathbf{r}'_c = \frac{A_{\text{外}} \mathbf{r}_{c\text{外}} - A_{\text{内}} \mathbf{r}_{c\text{内}}}{A_{\text{外}} - A_{\text{内}}}$$

其中,符号 A 表示三角形的面积。由于平面矢量(坐标)和复数有一一对应关系,考虑内部三角形是由外部三角形缩放、旋转和平移得到的。设外部三角形顶点复数为 z ,内部三角形顶点复数为 w ,那么

$$w = \alpha z + \beta$$

其中,复数 β 表示平移,复数 α 表示旋转和缩放, α 的模(大小)表示缩放比例, α 的幅角表示相对转动角。质心的变换是

$$w_c = \alpha z_c + \beta$$

面积的变换是

$$A_{\text{内}} = |\alpha|^2 A_{\text{外}}$$

其中, z_c 是原来三角形的质心。那么,空腔三角形质心的复数表示是

$$z'_c = \frac{z_c - |\alpha|^2 w_c}{1 - |\alpha|^2} = \frac{z_c - |\alpha|^2 (\alpha z_c + \beta)}{1 - |\alpha|^2} = \frac{1 - |\alpha|^2 \alpha}{1 - |\alpha|^2} z_c - \frac{|\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} \beta$$

对于三角形板,内部三角形只有缩放,没有旋转和平移,此时 $\beta=0$, α 是实数且小于 1。以相似中心为原点,那么这个框架三角形的质心为

$$z'_c = \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2} z_c = \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha} z_c = \lambda z_c$$

这说明从原点(相似中心)出发,从内到外,内部三角形质心 αz_c ,外部三角形质心 z_c ,框架三角形质心 λz_c 在同一直线上,内部和框架三角形质心距离与外部和框架三角形质心距离之比为

$$\frac{|z'_c - w_c|}{|z'_c - z_c|} = \frac{1}{\alpha^2}$$

4. 两类边框三角形的质心

由上一小节可知,空腔三角形的质心取决于原来三角形的质心以及相似中心和相似比。理论上,三角形内部任何一点都可以取为相似中心。我们再取一个极限,相似比趋向于 1,

那么这类边框三角形质心为

$$z'_c = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2} z_c = \frac{3}{2} z_c$$

这种三角形的三个边框宽度虽然都趋向于零,但是宽度是不一样的。可以证明,边框宽度为 $h_i = (1 - \alpha)H_i$, 其中 H_i 是相似中心(原点)到第 i 个点对边的距离。当取相似点(原点)为三角形的内心 I 时,三边框架的宽度一样。第二类边框三角形是框架宽度一致等于零的三角形。可以把边框看作没有粗细的线,这个三角形的质心是

$$\mathbf{r}_c = \frac{(l_2 + l_3)\mathbf{r}_1 + (l_1 + l_3)\mathbf{r}_2 + (l_1 + l_2)\mathbf{r}_3}{2(l_1 + l_2 + l_3)}$$

其中, l_1 是顶点 1 对边的边长, l_2 是顶点 2 对边的边长, l_3 是顶点 3 对边的边长。边框三角形质心就是奈格尔(Nagel)点 N , 三角形顶点与对边上旁切圆切点连线的交点。当取相似点(原点)为三角形的内心 I 时,三边框架的宽度一样。当宽度趋向于零时,这两类边框三角形的质心重合,就是原来三角形的奈格尔点 N 。这也从物理上纠正了《近代欧式几何学》198 页的定理“三角形的重心 M , 内心 I , 奈格尔点 N 共线, 并且 $\overline{2MN} = \overline{IM}$ ”。

5. 空腔四面体的质心

空腔四面体由外面四面体里面挖去一个小的四面体而来。由质心的线性组合原理,空腔四面体的质心为

$$\mathbf{r}'_c = \frac{V_{\text{外}} \mathbf{r}_{c\text{外}} - V_{\text{内}} \mathbf{r}_{c\text{内}}}{V_{\text{外}} - V_{\text{内}}}$$

其中,符号 V 表示四面体的体积。为方便考虑,设内部的四面体是由外部四面体缩放而来,其相似比为 α 。以相似中心为原点,仿照以上做法,空腔四面体的质心为

$$\mathbf{r}'_c = \frac{1 - \alpha^4}{1 - \alpha^3} \mathbf{r}_c = \frac{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3}{1 + \alpha + \alpha^2} \mathbf{r}_c$$

这说明从原点(相似中心)出发,由内到外,内部四面体、外部四面体、空腔四面体的三个质心在同一直线上,内部和空腔四面体质心距离与外部和空腔四面体质心距离之比为

$$\frac{|\mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c|}{|\mathbf{r}'_c - \mathbf{r}''_c|} = \frac{1}{\alpha^3}$$

定义四面体的内切球心为内心 I , 四面体顶点与它正对面旁切球切点的 4 条连线交点为奈格尔点 N 。那么以内心 I 为原点,第一类边框四面体的质心为

$$\mathbf{r}'_c = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1 - \alpha^4}{1 - \alpha^3} \mathbf{r}_c = \frac{4}{3} \mathbf{r}_c$$

第二种边框四面体的质心为

$$\mathbf{r}_c = \frac{(A_2 + A_3 + A_4)\mathbf{r}_1 + (A_1 + A_3 + A_4)\mathbf{r}_2 + (A_1 + A_2 + A_4)\mathbf{r}_3 + (A_1 + A_2 + A_3)\mathbf{r}_4}{3(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)}$$

其中, A_1 是顶点 1 正对面的面积,以此类推。这是四面体奈格尔点 N 的矢量表达式。物理上讲,这两类边框四面体的质心肯定重合,且重合于四面体的奈格尔点。由此得到《近代欧氏几何学》198 页定理的三维推广“四面体的重心 M , 内心 I , 奈格尔点 N 共线, 并且 $\overline{3MN} = \overline{IM}$ ”。

02 转动惯量

1. 燃烧蜡烛的转动惯量

一根蜡烛,两头燃烧,中间用钉子穿过并搭在两个酒杯之间。蜡烛会摇摆晃动起来,如图 1 所示。



图 1

最简单的模型是把燃烧的蜡烛看作复摆,其立体几何模型如图 2 所示。

蜡烛原先是圆柱体,半径为 r 。钉子通过其中心作为原点。然后把蜡烛的两头各切一刀,切面法线与圆柱体对称轴线的夹角是 ψ 。求质心位置,图 2 中横的虚线是原来圆柱体的对称轴线。再求通过钉子(原点,不是质心)的转动惯量。为计算方便,可以取蜡烛质量密度为 1 个单位。设 $k = R/r$ 。以圆柱体对称轴线为 z 轴,垂直纸面为 y 轴,图 2 中向下虚线为 x 轴,那么这个物体的立体解析几何描述(坐标区域)是

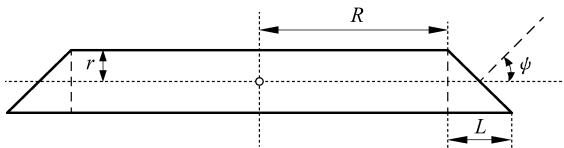


图 2

$$x^2 + y^2 < r^2$$

$$-R - \tan\psi(x + r) < z < R + \tan\psi(x + r)$$

采用柱坐标系,则

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta$$

体积元是

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

先对 z 积分,得到

$$V = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho (R + \tan\psi(\rho \cos\theta + r)) d\rho$$

然后对 ρ 积分,得到

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{R + r \tan\psi}{2} r^2 + \frac{r^3}{3} \tan\psi \cos\theta \right) d\theta$$

再对 θ 积分,得到

$$V = 2\pi(R + r \tan\psi)r^2$$

或者

$$V = 2\pi(k + \tan\psi)r^3$$

由对称性,质心坐标满足

$$z_c = y_c = 0$$

由质心定义

$$Vx_c = \iiint x dV = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^2 \cos\theta (R + \tan\psi(\rho\cos\theta + r)) d\rho$$

先对 ρ 积分,得到

$$Vx_c = 2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \left(\frac{R + r\tan\psi}{3} r^3 + \frac{r^4}{4} \tan\psi \cos\theta \right) d\theta$$

再对 θ 积分得到

$$Vx_c = \frac{\pi}{4} r^4 \tan\psi$$

所以

$$\frac{x_c}{r} = \frac{\tan\psi}{8(k + \tan\psi)}$$

接下来计算相对 y 轴的转动惯量,由其定义,有

$$I = \iiint (x^2 + z^2) dV$$

先对 z 积分,得到

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho \left(\frac{(R + \tan\psi(\rho\cos\theta + r))^3}{3} + \rho^2 \cos^2\theta (R + \tan\psi(\rho\cos\theta + r)) \right) d\rho$$

再对角度 θ 积分,由对称性,只保留余弦函数的偶次方,即

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho \left(\frac{1}{3} (R + \tan\psi r)^3 + \rho^2 \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\psi} (R + \tan\psi r) \right) d\rho$$

耐心地仔细计算,得到

$$I = \frac{1}{2\cos^2\psi} \pi r^4 (R + \tan\psi r) + \frac{2}{3} \pi r^2 (R + \tan\psi r)^3$$

所以

$$\frac{I}{m} = \frac{1}{4\cos^2\psi} r^2 + \frac{1}{3} (R + \tan\psi r)^2$$

或者

$$\frac{I}{mr^2} = \frac{1}{4\cos^2\psi} + \frac{1}{3} (k + \tan\psi)^2$$

2. 相交圆柱体和球体的转动惯量

为拓展视野,下面给出相交圆柱体和球体的棱长、表面积、体积和转动惯量的解析表达式。具体计算过程细节,此处不展开。

(1) 四个相同的实心圆柱体沿着正四面体对称轴放置,它们的交集如图 3 所示。

设圆柱的半径是 R ,这个物体的体积和对其对称轴的转动惯量分别是

$$V = 12\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})R^3$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{\sqrt{2}}{5}(31 - 16\sqrt{3})\rho R^5$$

(2) 六个相同的实心圆柱体沿着正方体的六个面对角线放置, 它们的交集如图 4 所示。

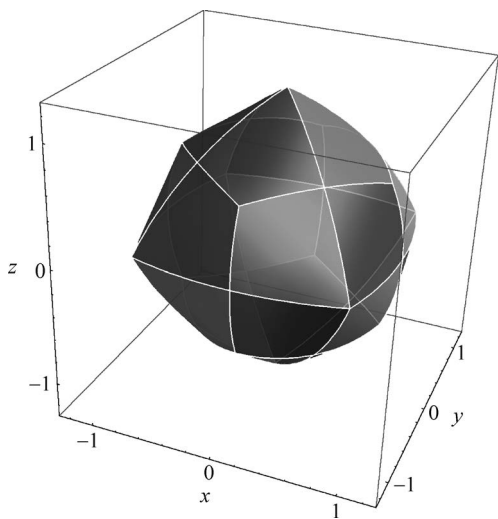


图 3

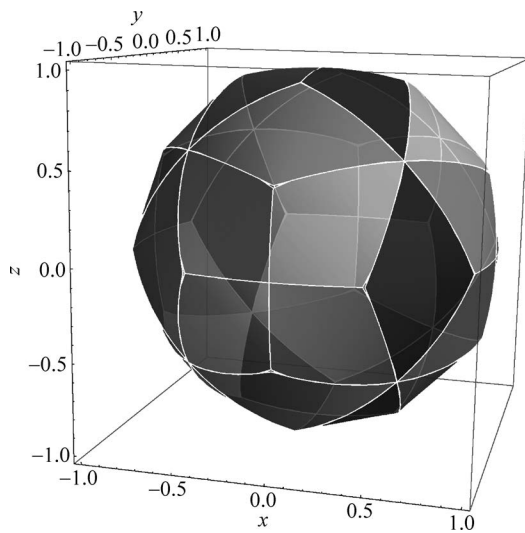


图 4

设圆柱的半径是 R , 这个物体的体积和对其对称轴的转动惯量分别是

$$V = \frac{16}{3}(3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2})R^3$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{32}{1215}(147 - 186\sqrt{2} + 86\sqrt{3})\rho R^5$$

(3) 六个相同的实心圆柱体沿着正十二面体面心连线方向放置, 它们的交集如图 5 所示。

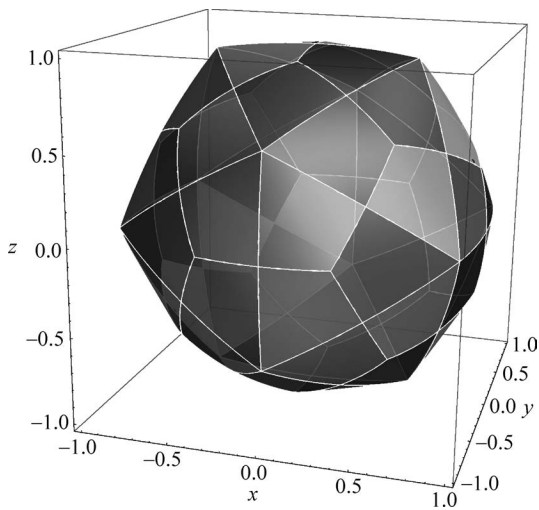


图 5

设圆柱的半径是 R , 这个物体的体积和对其对称轴的转动惯量分别是

$$V = 10(5 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}})R^3$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{9}(49\sqrt{5} + 5 - 13\sqrt{10(5 + \sqrt{5})})\rho R^5$$

(4) 以正四面体四个顶点为球心,边长为半径的四个球的交集部分,称为莱洛四面体。一个简单的物理实现是正四面体框架内的肥皂泡,如图 6 所示。

设球半径为 R ,莱洛四面体有 6 条棱,其中一条棱的棱长为

$$\frac{L}{R} = \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

它有 4 个面,其中一个面的面积为

$$\frac{A}{R^2} = 6 \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

体积为

$$\frac{V}{R^3} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{8}{3}\pi - \frac{27}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

绕任意通过中心轴的转动惯量的关系为

$$\frac{I}{\rho R^5} = \frac{1}{120} \left(\frac{93}{\sqrt{2}} + 208\pi - 1161 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

(5) 六个球,球心在正方体的三个对称轴上,其交集称为莱洛正方体。一个简单的物理实现是正方体框架内的肥皂泡,如图 7 所示。

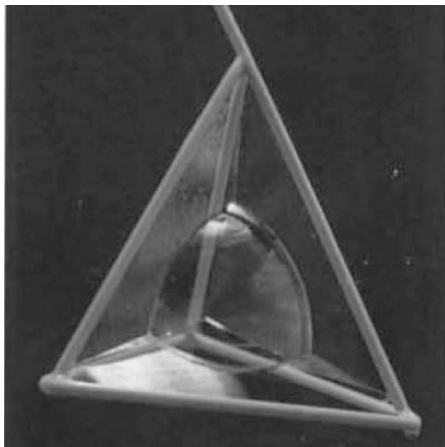


图 6

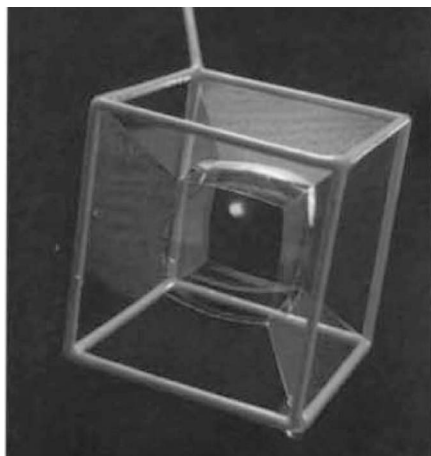


图 7

设球心到气泡中心的距离是 1 个单位,那么正方形的边长是 $a = 2/3$ 。

莱洛正方体两个顶点之间的棱长为

$$L = \sqrt{6} \left(3 \arctan(1/\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2} \right)$$

莱洛正方体有六个面,其中之一的面积是

$$A = 8 \left(\pi - 5 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

莱洛正方体的体积为

$$V = 19\sqrt{2}\pi - 98\sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{4}{3}$$

设物体密度为 1 个单位,莱洛正方体对任意对称轴的转动惯量为

$$I = 16 \left(\frac{7}{27} + \frac{59}{30} \sqrt{2} \pi - \frac{31}{3} \sqrt{2} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

03 打孔球体的引力自能

质量均匀分布的球体,在里面任意位置挖出两个不相交的球体,求剩余部分的引力自能。

一般物体的引力自能定义为

$$E = \frac{1}{2} G \int d^3 r \int d^3 r' \frac{\rho(r) \rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

或者写为

$$E = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(r) \Phi(r)$$

其中, $\Phi(r)$ 是万有引力势。对于质量均匀分布的球体,距离球心 r 处的引力大小为

$$F(r) = \frac{4\pi}{3} \rho G r, \quad r < R$$

$$F(r) = \frac{4\pi}{3} \rho G \frac{R^3}{r^2}, \quad r > R$$

设无穷远的引力势能为零,那么距离球心 r 处的引力势为

$$\Phi(r) = - \int_r^R F(r) dr - \int_R^\infty F(r) dr$$

计算得到

$$\Phi(r) = - \frac{2\pi}{3} \rho G (3R^2 - r^2), \quad r < R$$

代入球体的引力自能公式,得到

$$E = - \frac{4\pi^2}{3} \rho^2 G \int_0^R (3R^2 - r^2) r^2 dr$$

计算得到质量均匀分布球体的引力自能为

$$E = - \frac{16\pi^2}{15} G \rho^2 R^5$$

先考虑大球体内挖去一个小球体,小球的半径为 r ,小球和大球球心距离是 l 。

把球体分为两部分,那么

$$E = E_1 + E_2 + E_{12}$$

其中,小球体的引力自能为

$$E_1 = - \frac{16\pi^2}{15} G \rho^2 r^5$$

E_{12} 是两部分的引力自能。我们直接计算两部分的引力自能,以小球球心为原点,小球的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

大球的球面方程为

$$x^2 + y^2 + (z + l)^2 = R^2$$

其中, l 表示两个球的球心距离。大球挖去小球剩余部分的球坐标描述是

$$r < r' < r_1(\theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

其中

$$r_1^2 + 2r_1 l \cos\theta + l^2 = R^2$$

由此解得

$$r_1 = \sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \theta} - l \cos \theta$$

$$r_1^2 = R^2 - l^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta - 2l \cos \theta \sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \theta}$$

由于剩余部分在小球体外, 它的微元与小球体的引力势能, 等于与质量集中在小球体球心质点的引力势能, 即

$$E_{12} = -Gm_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_r^{r_1} r' dr'$$

积分得到

$$E_{12} = -Gm_1 \pi \int_0^\pi \sin\theta (R^2 - l^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta - 2l \cos \theta \sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \theta} - r^2) d\theta$$

做变量代换 $t = \cos\theta$, 得到

$$E_{12} = -Gm_1 \pi \int_{-1}^1 (R^2 - l^2(1-t^2) + l^2 t^2 - 2dt \sqrt{R^2 - l^2(1-t^2)} - r^2) dt$$

计算得到

$$E_{12} = -8G\rho^2 \pi^2 r^3 (R^2 - r^2 - l^2/3) / 3$$

代入到

$$E = E_1 + E_2 + E_{12}$$

计算得到剩余部分的引力自能为

$$\frac{-E_2}{G\rho^2 \pi^2} = \frac{16}{15} R^5 - \frac{16}{15} r^5 - \frac{8}{3} r^3 (R^2 - r^2 - l^2/3)$$

为方便计算, 只考虑引力势能的大小, 并设 $G\rho^2 \pi^2$ 为 1 个单位。设大球半径为 R , 小球半径为 r_1 , 球心距离是 l_1 , 那么小球与其余部分的引力自能为

$$E_{12} = \frac{8}{3} r_1^3 (R^2 - r_1^2 - l_1^2/3)$$

再在其余部分中挖出一个半径为 r_2 的球, 那么半径为 r_1 的小球与大球挖去两个不相交小球之后的剩下部分的引力自能是以上表达式减去两个小球的引力势能, 即

$$E_{13} = \frac{8}{3} r_1^3 (R^2 - r_1^2 - l_1^2/3) - \frac{16}{9} \frac{r_1^3 r_2^3}{L_{12}}$$

其中, L_{12} 是两个小球的球心距离。同样, 半径为 r_2 的小球与剩下部分的引力自能为

$$E_{23} = \frac{8}{3} r_2^3 (R^2 - r_2^2 - l_2^2/3) - \frac{16}{9} \frac{r_1^3 r_2^3}{L_{12}}$$

其中, l_2 为大球与半径为 r_2 的小球的球心距离, 半径为 r_1 的小球与半径为 r_2 的小球的引力自能为

$$E_{12} = \frac{16}{9} \frac{r_1^3 r_2^3}{L_{12}}$$

总的引力自能为

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_{12} + E_{13} + E_{23}$$

计算得到大球中间挖去两个小球, 剩余部分的引力自能为

$$\frac{-E_3}{G\rho^2 \pi^2 R^5} = \frac{8}{3} R^2 \left(\frac{2R^3}{5} - r_1^3 - r_2^3 \right) + \frac{16}{9} \frac{r_1^3 r_2^3}{L_{12}} + \frac{8}{5} (r_1^5 + r_2^5) + \frac{8}{9} (r_1^3 l_1^2 + r_2^3 l_2^2)$$

04 椭球的引力自能

太空中旋转的理想星球是椭球, 在转动参考系下, 星球稳定的形状使得椭球的引力自能和转动势能极小, 即角速度是偏心率的函数。先考虑椭球的引力自能, 椭球表面是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

假设椭球内部质量均匀分布, $G\rho$ 为 1 个单位。椭球内部任意一点处的引力势(大小)是

$$\Phi(x', y', z') = \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r$$

以此点 (x', y', z') 为原点, 那么

$$\Phi = \iiint \frac{1}{R} R^2 dR \sin\theta d\theta d\varphi$$

积分得到

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

其中, $R(\theta, \varphi)$ 满足

$$\frac{(x' + R \sin\theta \cos\varphi)^2}{a^2} + \frac{(y' + R \sin\theta \sin\varphi)^2}{b^2} + \frac{(z' + R \cos\theta)^2}{c^2} = 1$$

由此得到

$$R^2 \left(\frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} \right) + 2R \left(\frac{\sin\theta \cos\varphi}{a^2} x' + \frac{\sin\theta \sin\varphi}{b^2} y' + \frac{\cos\theta}{c^2} z' \right) + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 = 0$$

令

$$A = \frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} > 0$$

$$B = \frac{\sin\theta \cos\varphi}{a^2} x' + \frac{\sin\theta \sin\varphi}{b^2} y' + \frac{\cos\theta}{c^2} z'$$

$$C = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 < 0$$