第 2 章　典型的数学建模案例

数学建模是把实际问题变为数学问题后来寻找解决实际问题的方法或答案的. 为了让读者了解并学习用数学建模解决问题的方法和过程，本章将详细介绍有代表性的 7 个典型案例，这些案例虽然难度不大，但能很好地体现数学建模的过程和方法.

2.1　双层玻璃的功效问题

北方城镇有些建筑物的窗户玻璃是双层的，这样做的目的是使室内保温，试用数学建模的方法给出双层玻璃减少热量损失的定量分析结果.

1. 模型准备

该问题与热量的传播形式、温度有关. 检索有关的资料得到与热量传播有关的一个结果——热传导物理定律：厚度为 d 的均匀介质，两侧温度差为 ΔT，则单位时间内由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 Q 与 ΔT 成正比，与 d 成反比，即

$$Q=\lambda\,\frac{\Delta T}{d}$$

其中，λ 为热导率.

2. 模型假设

根据以上定律做以下假设：

① 室内的热量传播只有传导形式（不考虑对流、辐射）；

② 室内温度与室外温度保持不变（单位时间通过窗户单位面积的热量是常数）；

③ 玻璃厚度一定，玻璃材料均匀（热导率是常数）.

3. 模型构成

如图 2-1 所示，其中的符号表示为：

d——单层玻璃厚度；

T_1——室内温度；

T_2——室外温度；

T_a——靠近内层玻璃的温度；

T_b——靠近外层玻璃的温度；

L——两层玻璃之间的距离；

λ_1——玻璃热导率；

λ_2——空气热导率.

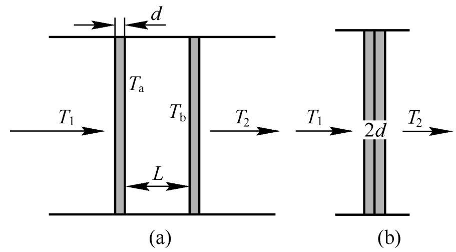

图 2－1

对中间有缝隙的双层玻璃，由热量守恒定律应有：穿过内层玻璃的热量等于穿过中间空气层的热量，等于穿过外层玻璃的热量. 所以根据热传导物理定律，得

$$Q=\lambda_1 \frac{T_1-T_a}{d}=\lambda_2 \frac{T_a-T_b}{L}=\lambda_1 \frac{T_b-T_2}{d}$$

消去不易测量的 T_a、T_b，有

$$Q=\lambda_1 \frac{T_1-T_2}{d(s+2)}$$

其中

$$s=h\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\quad h=\frac{L}{d}$$

对中间无缝隙的双层玻璃，可以视作厚度为 $2d$ 的单层玻璃，故根据热传导物理定律，有

$$Q'=\lambda_1 \frac{T_1-T_2}{2d}$$

而

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{2}{s+2}$$

即有

$$Q<Q'$$

此式说明双层玻璃比厚度为“2 层”的单层玻璃保温，当然比单层玻璃更保温.

为得到定量结果，考虑 s 的值，查资料有

常用玻璃　$\lambda_1=0.4\sim0.8$ W/(m·K)

静止的干燥空气　$\lambda_2=0.025$ W/(m·K)

若取最保守的估计，有

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=16,\quad \frac{Q}{Q'}=\frac{1}{8h+1},\quad h=\frac{L}{d}$$

由于$\frac{Q}{Q'}$可以反映双层玻璃在减少热量损失的功效，在最保守的估计下，它是 h 的函数. 下面从图形考察它的取值情况.

从图 2－2 中可知，此函数无极小值，且当 h 从零变大时，$\frac{Q}{Q'}$迅速下降，但 h 超过 4 后下降变慢.

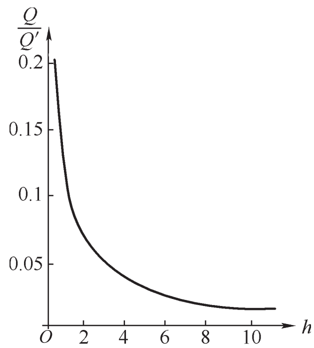

图 2-2

从节约材料方面考虑，h 不宜选择过大，以免浪费材料. 如果取$h\approx4$，有

$$\frac{Q}{Q'}\approx3\%$$

这说明在最保守的估计下，玻璃之间的距离约为玻璃厚度的 4 倍时，双层玻璃比单层玻璃避免热量损失可达 97%.

简评 该问题给出的启示是：对于不太熟悉的问题，可以从实际问题涉及的概念着手，搜索有利于进行数学建模的结论来建模，此时建模中的假设要以所用结论成立的条件给出. 此外，该题通过对减少热量损失功效的处理给出了对没有函数极值的求极值问题的一个解决方法.

2.2 搭积木问题

将一块积木作为基础，在它上面叠放其他积木，问上下积木之间的“向右前伸”可以达到多少?

1. 模型准备

这个问题涉及重心的概念. 关于重心的结果有：设 xOy 平面上有 n 个质点，它们的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，对应的质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，则该质点系的重心坐标（$\bar{x}$，$\bar{y}$）满足的关系式为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

此外，每个刚性的物体都有重心. 重心的意义在于：当物体 A 被物体 B 支撑时，只要它的重心位于物体 B 的正上方，A 就会获得很好的平衡；如果 A 的重心超出了 B 的边缘，A 就会落下来. 对于均匀密度的物体，其实际重心就是几何中心.

因为该问题主要与重心的水平位置（重心的 x 坐标）有关，与垂直位置（重心的 y 坐标）无关，所以只要研究重心的横坐标即可.

2. 模型假设

① 所有积木的长度和重量均为一个单位；

② 参与叠放的积木足够多；

③ 每块积木的密度都是均匀的，密度系数相同；

④ 最底层的积木可以完全水平且平稳地放在地面上.

3. 模型构成

1）考虑两块积木的叠放情况

对只有两块积木的叠放，注意到此时叠放后的积木平衡主要取决于上面的积木，而下面的积木只起到支撑作用. 假设在叠放平衡的前提下，上面的积木超过下面的积木右端的最大前伸距离为 x_1，选择下面的积木的最右端为坐标原点，建立如图 2－3 所示的坐标系. 因为积木是均匀的，所以它的重心在其中心位置，且其质量可以认为是集中在重心的，于是每个积木可以认为是质量为 1 且其坐标在重心位置的质点. 因为下面的积木总是稳定的，要想上面的积木与下面的积木离开最大的位移且不掉下来，则上面的积木重心应该恰好在下面的积木的最右端位置. 因此可以得到上面的积木在位移最大且不掉下来的位置为$\frac{1}{2}$（因为积木的长度是 1），于是上面的积木可以向右前伸的最大距离 x_1 为$\frac{1}{2}$.

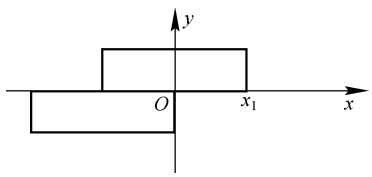

图 2－3

2）考虑 $n+1$ 块积木的叠放情况

两块积木的情况解决了，如果再加一块积木，叠放情况如何呢？如果增加的积木放在原来两块积木的上面，那么此积木是不能再向右前伸了（为什么），除非再移动下面的积木，但这样会使问题复杂化，因为这里讨论的是建模问题，不是怎样搭积木的问题. 为了便于问题的讨论，把前两块搭好的积木看作一个整体且不再移动它们之间的相对位置，而把增加的积木插入在最底下的积木下方，于是问题又归结为两块积木的叠放问题，不过这次是质量不同的两块积木的叠放问题. 这个处理可以推广到 $n+1$ 块积木的叠放问题，即假设已经叠放好$n(n>1)$ 块积木后，再加一块积木的叠放问题.

下面就 $n+1(n>1)$ 块积木的叠放问题来讨论. 假设增加的一块积木插入最底层，选择底层积木的最右端为坐标原点建立坐标系（见图 2－4）. 考虑上面的 n 块积木的重心关系. 把上面的 n 块积木分成两部分：从最高层开始的前$n-1$块积木，记它们的水平重心为 x_1，总质量为 $n-1$；与最底层积木相连的第 n 块积木，记它的水平重心为 x_2，质量为 1.

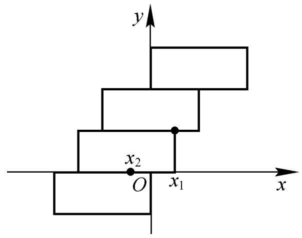

图 2-4

此外，把上面的 n 块积木看作一个整体，并记它的重心水平坐标为 $\bar{x}$，显然 n 块积木的质量为n. 那么，在保证平衡的前提下，上面 n 块积木的水平重心应该恰好在最底层积木的右端，即有 $\bar{x}=0$. 假设第 n 块积木超过最底层积木右端的最大前伸距离为 z，同样在保证平衡的前提下，从最高层开始的前 $n-1$ 块积木总重心的水平坐标为 z，即有 $x_1=z$，而第 n 块积木的水平重心在距第 n 块积木左端的$\frac{1}{2}$处，于是在图 2-4 的坐标系下，第 n 块积木的水平重心坐标为 $x_2=z-\frac{1}{2}$. 故由重心的关系，有

$$\bar{x}=\frac{x_1\cdot(n-1)+x_2\times 1}{n}=\frac{z\cdot(n-1)+\left(z-\frac{1}{2}\right)}{n}=0$$

$$z\cdot(n-1)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow z=\frac{1}{2n}$$

于是对 3 块积木（$n=2$）的叠放，第 3 块积木的右端到第 1 块积木的右端距离最远可以前伸

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

对 4 块积木（$n=3$）的叠放，第 4 块积木的右端到第 1 块积木的右端距离最远可以前伸

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$$

对 $n+1$ 块积木的叠放，设从第 $n+1$ 块积木的右端到第 1 块积木的右端最远距离为 d_{n+1}，则有

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

所以当 $n\to\infty$时，有 $d_{n+1}\to\infty$. 这说明随着积木数量的无限增加，最顶层的积木可以前伸到无限远的地方.

简评 该问题给出的启示是：当问题涉及较多对象时，对考虑的问题进行合理的分类往往会使问题变得清晰. 此外，一些看似不可能的事情其实并非不可能.

2.3　圆杆堆垛问题

把若干不同半径的圆柱形钢杆水平地堆放在一个长方体箱子里，若已知每根杆的半径和最底层各杆的中心坐标，怎样求出其他杆的中心坐标?

1. 模型准备

该问题是一个解析几何问题，利用解析几何的有关结论即可求解.

2. 模型假设

① 箱中最底层的钢杆接触箱底或紧靠箱壁；

② 除最底层外，箱中的每一根圆杆都恰有两根杆支撑；

③ 箱中的钢杆至少有两层以上.

3. 模型构成

对于该问题，如果把箱中所有钢杆一起考虑会带来较多不便，现把问题分解为已知三个圆杆的半径和两根支撑杆的坐标来求另一个被支撑杆坐标的三杆堆垛问题. 如果三杆堆垛问题解决了，则可以利用它依次求得箱中其他所有圆杆的坐标了. 虽然涉及的是空间物体，但可以用其堆垛的横截面图化为平面问题来解决.

设三个圆杆中两根支撑杆的半径分别为 R_l，R_r，对应的中心坐标为（x_l，y_l），（x_r，y_r），被支撑杆的半径和中心坐标分别为 R_t 和（x_t，y_t）. 连接三根圆杆的中心得到一个三角形，用 a，b，c 表示三条边. 另用两个支撑圆杆的中心作一个直角三角形，如图 2－5 所示，则由几何知识和三角公式，有

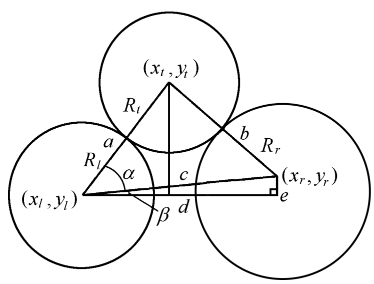

图 2－5

$$x_t=x_l+a\cos(\alpha+\beta)=x_l+a(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$y_t=y_l+a\sin(\alpha+\beta)=y_l+a(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

这里计算公式中涉及的数据由以下公式获得

$$a=R_l+R_t,\quad b=R_r+R_t,\quad d=x_r-x_l$$

$$e=y_r-y_l,\quad c=(d^2+e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\beta=\frac{d}{c},\quad \sin\beta=\frac{e}{c},\quad \cos\alpha=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\sin\alpha=(1-\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

在编程计算支撑钢杆中心的坐标时，为了能快速求出（x_t，y_t），可以按以下顺序编程计算求解：

$$a=R_l+R_t$$
$$b=R_r+R_t$$
$$d=x_r-x_l$$
$$e=y_r-y_l$$
$$c=(d^2+e^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\mathrm{csb}=\frac{d}{c}$$
$$\mathrm{snb}=\frac{e}{c}$$
$$\mathrm{csa}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\mathrm{sna}=(1-\mathrm{csa}^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$x_t=x_l+a(\mathrm{csa}\cdot\mathrm{csb}-\mathrm{sna}\cdot\mathrm{snb})$$
$$y_t=y_l+a(\mathrm{sna}\cdot\mathrm{csb}+\mathrm{csa}\cdot\mathrm{snb})$$

有了以上三杆问题的求解，对多于三杆的问题就可以按支撑关系及先后顺序依次求出所有其他杆的坐标. 例如，如果长方体箱子中有 6 根圆杆，已知 1、2、3 号圆杆在箱底，4 号圆杆由 1、2 号圆杆支撑，5 号圆杆由 2、3 号圆杆支撑，6 号圆杆由 4、5 号圆杆支撑，则可以调用以上三杆问题的算法，先由 1、2 号圆杆算出 4 号圆杆中心的坐标，接着再用 2、3 号圆杆算出 5 号圆杆中心的坐标，最后用 4、5 号圆杆算出 6 号圆杆中心的坐标.

简评　该题建立模型的关键是把原问题分解为一组等价的子问题，使问题简化，然后通过讨论子问题的求解来获得原问题的解决. 这种处理问题的方法可以使复杂问题变得简单、有效，是处理一些有规律复杂问题的常用方法.

2.4　公平的席位分配问题

席位分配在社会活动中经常遇到，如人大代表或职工、学生代表的名额分配，其他物质资料的分配等. 通常分配结果的公平与否以每个代表席位所代表的人数是否相等或接近来衡量. 目前沿用的惯例分配方法为按比例分配方法，即

某单位席位分配数＝某单位人数比例×总席位

按上述公式进行分配，如果一些单位的席位分配数出现小数，则先按席位分配数的整数分配席位，余下席位按所有参与席位分配单位中小数的大小依次进行分配，这种分配方法公平吗？下面来看一个学院在分配学生代表席位中遇到的问题.

某学院有甲、乙、丙三个系并设 20 个学生代表席位，其最初学生人数及学生代表席位如表 2－1 所示.

表 2-1　学生人数及学生代表席位情况

系　　名	甲	乙	丙	总　　数
学　生　数	100	60	40	200
学生人数比例	$\frac{100}{200}$	$\frac{60}{200}$	$\frac{40}{200}$	
学生代表席位分配	10	6	4	20

后来由于出现学生转系情况，各系学生人数及学生代表席位有所变化，如表 2-2 所示.

表 2-2　转系后学生人数及学生代表席位情况

系　　名	甲	乙	丙	总　　数
学　生　数	103	63	34	200
学生人数比例	$\frac{103}{200}$	$\frac{63}{200}$	$\frac{34}{200}$	
按比例分配学生代表席位	10.3	6.3	3.4	20
按惯例分配学生代表席位	10	6	4	20

由于总代表席位为偶数，使得在解决问题的表决中有时会出现表决平局现象而不能达成一致意见. 为了改变这一情况，学院决定再增加一个代表席位，总代表席位变为 21 个. 表 2-3 为重新按惯例分配席位的情况.

表 2-3　增加一个席位后的学生代表席位分配情况

系　　名	甲	乙	丙	总　　数
学　生　数	103	63	34	200
学生人数比例	$\frac{103}{200}$	$\frac{63}{200}$	$\frac{34}{200}$	
按比例分配学生代表席位	10.815	6.615	3.57	21
按惯例分配学生代表席位	11	7	3	21

这个分配结果导致丙系比增加席位前少一个席位，这让人觉得席位分配明显不公平. 这个结果也说明按惯例分配席位的方法有缺陷，请尝试建立更合理的分配席位方法解决上面席位分配中出现的不公平问题.

1. 模型构成

先讨论由两个单位公平分配席位的情况，具体如表 2-4 所示.

表 2-4　单位 A、B 分配席位情况

单　　位	人　　数	席　位　数	每个席位代表人数
单位 A	p_1	n_1	$\frac{p_1}{n_1}$
单位 B	p_2	n_2	$\frac{p_2}{n_2}$

要满足公平，应该有

$$\frac{p_1}{n_1}=\frac{p_2}{n_2}$$

但这一般不成立. 注意到等式不成立时，有

若$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$，则说明单位 A“吃亏”（对单位 A 不公平）；

若$\frac{p_1}{n_1}<\frac{p_2}{n_2}$，则说明单位 B“吃亏”（对单位 B 不公平）.

因此，可以考虑用 $p=\left|\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}\right|$ 来衡量分配不公平程度，不过此公式有不足之处（绝对数的特点）. 例如，某两个单位的人数和席位为 $n_1=n_2=10$，$p_1=120$，$p_2=100$，算得 $p=2$；另两个单位的人数和席位为 $n_1=n_2=10$，$p_1=1\ 020$，$p_2=1\ 000$，算得 $p=2$. 虽然在两种情况下都有 $p=2$，但显然第二种情况比第一种情况公平.

下面采用相对标准对公式给予改进. 定义席位分配的相对不公平标准公式如下：

若$\frac{p_1}{n_1}>\frac{p_2}{n_2}$，定义

$$r_{\mathrm{A}}(n_1,\ n_2)=\frac{\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_2}{n_2}}$$

为对单位 A 的相对不公平值；

若$\frac{p_1}{n_1}<\frac{p_2}{n_2}$，定义

$$r_{\mathrm{B}}(n_1,\ n_2)=\frac{\frac{p_2}{n_2}-\frac{p_1}{n_1}}{\frac{p_1}{n_1}}$$

为对单位 B 的相对不公平值.

由定义知，对某单位的不公平值越小，该单位在席位分配中越有利. 因此，可以用使不公平值尽量小的分配方案来减少分配中的不公平.

下面讨论通过使用不公平值的大小来确定分配方案.

设单位 A 的人数为 p_1，已经有席位数为 n_1，单位 B 的人数为 p_2，已经有席位数为 n_2. 再增加一个席位，分别分配给单位 A 和单位 B 时，有以下不公平值

$$r_{\mathrm{B}}(n_1+1,\ n_2)=\frac{\frac{p_2}{n_2}-\frac{p_1}{n_1+1}}{\frac{p_1}{n_1+1}}=\frac{(n_1+1)p_2}{p_1 n_2}-1$$

$$r_{\mathrm{A}}(n_1,\ n_2+1)=\frac{\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2+1}}{\frac{p_2}{n_2+1}}=\frac{(n_2+1)p_1}{p_2 n_1}-1$$

对于新的席位分配，若有

$$r_B(n_1+1,\ n_2)<r_A(n_1,\ n_2+1)$$

则增加的席位应给 A，此时对不等式 $r_B(n_1+1,\ n_2)<r_A(n_1,\ n_2+1)$ 进行简化，可以得出不等式

$$\frac{p_2^2}{(n_2+1)n_2}<\frac{p_1^2}{(n_1+1)n_1}$$

引入公式

$$Q_k=\frac{p_k^2}{(n_k+1)n_k}$$

于是知道增加的席位分配可以由 Q_k 的最大值决定，它可以推广到多个组的一般情况.

用 Q_k 的最大值决定席位分配的方法称为 Q 值法.

对多个组（m 个组）的席位分配 Q 值法可以描述为：

① 先计算每个组的 Q 值，即 Q_k（$k=1,2,\cdots,m$）；

② 求出其中最大的 Q 值 Q_i（若有多个最大值任选其中一个即可）；

③ 将席位分配给最大值 Q_i 对应的第 i 组.

这种分配方法很容易编程处理.

2. 模型求解

先按应分配的整数部分分配，余下的部分按 Q 值分配. 该问题的整数名额共分配了 19 席，具体为：

甲	10.815	$n_1=10$
乙	6.615	$n_2=6$
丙	3.570	$n_3=3$

对第 20 席的分配，计算 Q 值为

$$Q_1=\frac{103^2}{10\times11}\approx96.45,\quad Q_2=\frac{63^2}{6\times7}=94.5,\quad Q_3=\frac{34^2}{3\times4}\approx96.33$$

因为 Q_1 最大，所以第 20 席应该给甲系.

对第 21 席的分配，计算 Q 值为

$$Q_1=\frac{103^2}{11\times12}\approx80.37,\quad Q_2=\frac{63^2}{6\times7}=94.5,\quad Q_3=\frac{34^2}{3\times4}\approx96.33$$

因为 Q_3 最大，所以第 21 席应该给丙系.

最后的席位分配为：甲系 11 席，乙系 6 席，丙系 4 席.

简评　该题给出的启示是对涉及较多对象的问题，可以先通过研究两个对象来找出所考虑问题的一般规律，这也是科学研究的常用方法.

注：该题若以 $n_1=n_2=n_3=1$ 开始，逐次增加一席用 Q 值法分配，也可以得到同样的结果.

2.5　中国人重姓名问题

由于中国人口的增加和中国姓名结构的局限性，中国人姓名相重的现象日渐增多，特别

是单名的出现，使重姓名问题更加严重. 重姓名现象引起的误会与带来的弊端是众所周知的. 伴随着我国经济文化的高速发展和对外交往的扩大，重姓名引起的问题将更加突出，可以说有效地克服重姓名问题即中国人姓名改革是迫在眉睫的. 因此，用合理的方法对中国人姓名进行改革非常必要. 请尝试提出一个合理且可以有效解决此问题的中国人取名方案.

1. 模型准备

首先研究中国人姓名的结构和取名习惯. 中国人的姓名是由姓和名组成的，姓在前名在后，目前姓大约有 5 730 个，但常用姓只有 2 077 个左右，名通常由两个字组成，较早时名的第一个字体现辈分，由一个家族的族谱决定，后一个字可任选. 随着家族观念的淡化，名中已经无辈分之意，人们为方便记忆，只有一个字的单字名日渐增多.

组合数学中的乘法原理和鸽笼原理可以非常简单地解释中国的重名现象. 姓名是由汉字排列而成的，构成姓名的汉字多，则姓名总数就多. 要想有效地克服重姓名问题，就应增加姓名的汉字数，因此该问题可以用排列组合理论来解决.

2. 模型假设

① 中国的所有姓名共有 N 个，其中姓有 S 个；

② 取名的方法和习惯不改变，即姓名中父亲姓氏在姓名首位.

3. 模型构成

靠机械地增加名字的个数解决重姓名问题或完全改变现有的姓名是不明智的，也是不可取的. 为扩大姓名集合并考虑到中国姓名的特色和兼顾原有取名习惯，利用排列组合的理论，提出如下体现父母姓的复姓名方式来解决重姓名问题. 引入的中国姓名取名方法称为 FM 取名方法，其中“F”和“M”分别是中文“父”（fù）和“母”（mǔ）二字的拼音首字母，同时也是英语“父”（father）和“母”（mother）二词的首字母，它表示父母之意，即“FM 姓名”是与父母有关的姓名. 一个“FM 姓名”的结构为

主姓名 · 辅姓名

其中，主姓名就是现在的人们所用的姓名，而辅姓名可以只是母亲的姓，也可以是用母亲姓取的另一个姓名，不过这个姓名要求名在前、姓在后，以区别于主姓名，中间的“·”是间隔号，如果用“$?$”和“$\overline{?}$”分别表示父母姓，“$*$”和“$\overline{*}$”表示对应的两个名字，则“FM 姓名”可表示为

$$? \ * \cdot \overline{*}\,\overline{?} \text{或} ? \ * \cdot \overline{?}$$

取一个“FM 姓名”是很简单的，只要按以前的习惯，用父、母姓各取一个姓名，然后按“FM 姓名”结构的要求就得到“FM 姓名”. 例如，父亲姓王，母亲姓孙，给孩子取的名字是东风和靖，则孩子的“FM 姓名”为

王东风 · 靖孙

如果只取一个名字，则孩子的“FM 姓名”为

王东风 · 孙

显然，这种“FM 姓名”对原姓名改动较小，也无须重新翻字典去找新的名字，易于在

人口普查时对全国公民的姓名做统一改动.

在一般场合或不易引起混淆的情况下，直接使用主姓名或原来的姓名即可，但是在正式场合，如译写著作、论文及发明创造、申请专利等署名时应填写完整的“FM 姓名”，这有利于中国人姓名向正规化、合理化的多字姓名过渡.

4. 模型分析

把“FM 姓名”结构和其使用规定称为“FM 姓名”体系. 由假设①，按排序原则，在“FM 姓名”体系下，“FM 姓名”集合中姓名总数变为

$$N \cdot S + N \cdot N = N \cdot (S + N)$$

其中，$N \cdot S$ 为辅姓名只有姓的“FM 姓名”总数，$N \cdot N$ 是辅姓名有姓和名的“FM 姓名”总数. 这表明“FM 姓名”体系将原来的姓名集合增加了 $S+N$ 倍. 注意到 N 是很大的，因而这种扩充较显著，而且原来的重姓名（主姓名重名）个数在“FM 姓名”体系中会减少，而“FM 姓名”样本空间又扩大了 $S+N$ 倍，由概率论知识可知，重姓名的概率将变得比原来的 $\dfrac{1}{S+N}$ 还小. 可见“FM 姓名”体系对解决重姓名问题是非常有效的.

“FM 姓名”体系具有以下优点：

① 可以有效地解决中国人重姓名问题.

② 使姓名表示更加合理. 因为按遗传学的观点，一个人最直接的血缘关系是父母，但现在的姓名中没有体现母亲这一部分，姓名中含有父母姓才是最科学的，“FM 姓名”正好体现了这点.

“FM 姓名”把辅姓名采用姓和名颠倒的方法，这样可以不被误认为是两个人的姓名或两个名字生硬搭配，从而巧妙地把主、辅姓名合成了一个名字. 虽然辅姓名不像传统的中国姓名，但它和西方国家的名在前、姓在后的姓名表示相一致，还是可以自成一体的.

另外，“FM 姓名”采用了父姓、母姓，使得姓名不能轻易改动. 因为原姓名是开放型的（只要在名字后面加上或减去一个字就得到另一个姓名），而“FM 姓名”是紧凑型的，任何改动都会留下痕迹.

③ 能有效地缓解家庭矛盾. 长期以来，家庭中孩子的姓名只反映出父姓，而对母亲姓氏则没有反映.“FM 姓名”体系有效地解决了这一矛盾，使家庭关系更加巩固，且对提高妇女的地位起到了积极作用.

④ 能有效地破除“重男轻女”的封建思想. 一直以来，孩子的姓都是沿用父姓，姓名的这种选择方式客观上支持了“重男轻女”的不良思想. “FM 姓名”体系用了父母双姓，彻底解决了孩子姓的确定问题，使男女受到平等的对待，这对于从根源上消除重男轻女的思想也起着积极的作用.

⑤ 是可行的最佳方案. 要想在中国有效地消除重姓名现象，首先要扩展足够大的姓名集合；其次新姓名要实施方便，且易被人们接受，这正是“FM 姓名”体系所具有的优点. 因为“FM 姓名”体系不改变现有的姓名称呼习惯，又具有母亲姓，将会得到广大家庭的支持，从而使它可行. 而且一个现有的姓名改为“FM 姓名”，修改工作量较小，不论是把现有的姓名变为一个“FM 姓名”，还是给新生儿取“FM 姓名”都是很简单方便的.

简评　“FM 姓名”体系虽然简单且在建模中只使用了较简单的重复排列和组合的数学方法，但作者对模型的说明解释非常到位，使得模型很有特点. 该问题给出的启示是：在完

成一个数学建模问题时，要遵循在保证解决问题的前提下尽量使用简单的数学方法建模. 另外，对所得模型的令人信服的科学解释也是非常必要的.

2.6 实物交换问题

甲有玉米若干千克，乙有山羊若干只，因为各自的需要，甲、乙想交换彼此的东西，问怎样做才能完成交换活动?

1. 模型准备

实物交换问题在个人之间或国家之间的各类贸易活动中经常遇到. 通常，交换的结果取决于交换双方对所交换物品的偏爱程度. 由于偏爱程度是一个模糊概念，较难给出一个确切的定量关系，此时可以采用图形法的建模方式来描述双方该如何交换物品才能完成交换活动.

2. 模型假设

① 交换不涉及其他因素，只与交换双方对所交换物品的偏爱程度有关;

② 交换按等价交换原则进行.

3. 模型构成

设交换前甲有玉米 X 千克，乙有山羊 Y 只，交换后甲有玉米 x 千克、山羊 y 只，则在交换后乙有玉米 $X-x$ 千克、山羊 $Y-y$ 只. 于是可以用一个平面坐标中的二维点坐标 (x, y)来描述交换方案，而这些坐标点满足 $0\leqslant x\leqslant X$，$0\leqslant y\leqslant Y$，即交换只在这个平面矩形区域内发生. 引入二维点坐标后，把所考虑的范围限制在一个有限的平面区域中，从而使问题简化. 但这还不够，因为交换只是在其中的一个点发生. 为了找到这个点，由假设①，引入如下衡量偏爱程度的无差别曲线概念.

注意到对甲方来说，交换后其对占有不同数量的玉米和山羊满意度是不同的，显然其满意度是 x，y 的函数 $f(x, y)$. 由于交换后某方认为同样满意的情况一般不只一种，如对甲来说，占有 x_1 数量的玉米、y_1 数量的山羊与占有 x_2 数量的玉米、y_2 数量的山羊可以达到同样的满足感 c_1，因此有 $f(x_1, y_1)=f(x_2, y_2)=c_1$，这说明对甲方来说交换结果在点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是没有差别的，而所有与点 $P_1(x_1, y_1)$ 具有同样满意度的点组成一条对甲满意度无差别的曲线 $f(x, y)=c_1$. 类似地，如果把甲在交换后的满足感 c_1 修改为 c_2，就可以得到另一条对甲无差别的曲线 $f(x, y)=c_2$. 因此甲有无数条无差别曲线，将所有这些无差别曲线表示为 $f(x, y)=c$，式中 c 称为在点 (x, y) 的满意度.

无差别曲线是一条由隐函数确定的平面曲线或可以看成二元函数 $f(x, y)$ 的等高线，虽然 $f(x, y)$ 没有具体的表达式，但仍然可以讨论这族无差别曲线的特点.

无差别曲线 $f(x, y)=c$ 具有以下特点：

① 无差别曲线是彼此不相交的. 因为若两条无差别曲线相交，则在交点处具有两个不同的满意度，这与无差别曲线定义矛盾.

② 无差别曲线是单调递减的. 由交换常识可知，在满意度一定的前提下，交换的两种物品成反比关系.

③ 满意度大的无差别曲线在满意度小的无差别曲线上方. 因为对甲来说，用同样的玉

米换取更多的山羊会更满意.

④ 无差别曲线是下凸的. 因为交换的特点是物以稀为贵. 当某人拥有较少的物品时，他愿意用其较少部分物品换取较多的另一种物品；反之，当他拥有较多的物品时，他愿意用其较多部分物品换取较少的另一种物品. 这在数学上可以描述为当 x 较小时，交换是用较少的 Δx 换取较多的 Δy；当 x 较大时，交换是用较多的 Δx 换取较少的 Δy. 具有这种特点的曲线是下凸的，如图 2－6 所示. 于是可以画出对甲的无差别曲线族图形，如图 2－7 所示.

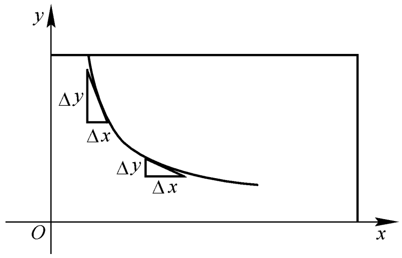

图 2－6

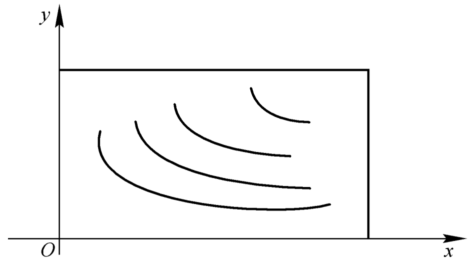

图 2－7

类似地，可以得到对乙的无差别曲线

$$g(x, y) = d$$

由于交换是在甲、乙之间进行的，甲方的物品减少对应乙方物品的增加，反之亦然. 将双方的无差别曲线画在一起可以观察到交换的发生特点，具体画法见图 2－8.

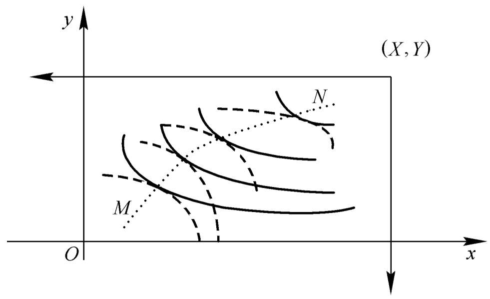

图 2－8

于是在交换区域中，任何一点都有甲和乙各一条无差别曲线通过. 甲、乙两条无差别曲线的交点表示甲、乙交换发生. 两族无差别曲线中的曲线彼此发生相交的情况只有相切于一点或者相交于两点的可能. 如果交点不是切点，则过此点的甲、乙两条无差别曲线还在另一点相交，故由无差别曲线的定义知，在这两条曲线上甲、乙具有同样的满意度，而这是不可能的. 因为这两条曲线中一条是下凸的，另一条是上凸的，过所围区域内任一点的无差别曲线具有与这两条无差别曲线不同的满意度，且一定与其中一条相交，这就导致在同一交点处对某方来说有两种满意度的情况，因此交点不是切点时不发生实际交换. 由简单分析可知，两条无差别曲线相切于一点的点都可以发生实际交换，这些相切于一点的点构成交换区域的一条曲线，记为 MN，称其为交换路径. 这样借助无差别曲线将交换方案从矩形区域缩小为其中的一条交换路径曲线 MN 上.

关于实际交换究竟在交换路径曲线 MN 的哪一点上发生，要借助交换原则来确定. 由假设②，交换按等价交换的原则. 设玉米的价格为每千克 p 元，山羊的价格为每只 q 元，则交换前甲拥有玉米的价值为 pX，乙拥有山羊的价值为 qY. 若交换前甲、乙拥有物品的价值相同，即 $pX=qY$，则交换发生后，甲方拥有玉米和山羊的价值为$px+qy$，乙方拥有玉米和山羊的价值为 $p(X-x)+q(Y-y)$，按等价交换的原则有 $px+qy=p(X-x)+q(Y-y)$. 利用关系 $pX=qY$，可以得出实际交换的点（x，y）满足关系式

$$\frac{x}{X}+\frac{y}{Y}=1$$

此曲线是一条直线，在交换路径坐标系中画出该直线就得到实际交换发生的点（见图 2－9），至此就找到了实际交换的方案.

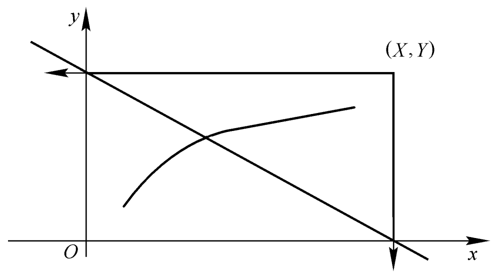

图 2－9

简评 该题巧妙地用图形方法建模解决了涉及不易定量表示的模糊概念建模问题，其中在建模中引入的无差别曲线概念及对无差别曲线的讨论很有特点，它给出了怎样研究和了解没有具体关系式函数特征的一种方法.

2.7 椅子摆放问题

椅子能在不平的地面上放稳吗？下面用数学建模的方法解决此问题.

1. 模型准备

仔细分析该问题的实质，发现该问题与椅子脚、地面及椅子脚和地面是否接触有关. 如果把椅子脚看成平面上的点，并引入椅子脚和地面距离的函数关系就可以将问题与平面几何和连续函数联系起来，从而可以用几何知识和连续函数知识来进行数学建模.

2. 模型假设

为了讨论问题方便，对问题进行简化，先做出以下三个假设：

① 椅子的四条腿一样长，椅子脚与地面接触可以视为一个点，且四脚连线是正方形（对椅子的假设）；

② 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不出现间断（对地面的假设）；

③ 椅子放在地面上至少有三只脚同时着地（对椅子和地面之间关系的假设）.

3. 模型构成

根据上述假设进行该问题的模型构成. 用变量表示椅子的位置，引入平面图形及坐标

系，如图 2－10 所示. 图中 A、B、C、D 为椅子的四只脚，坐标系原点选为椅子中心，坐标轴选为椅子四只脚的对角线. 于是由假设②，椅子的移动位置可以由正方形沿坐标原点旋转的角度 θ 来唯一表示，而且椅子脚与地面的垂直距离就成为 θ 的函数. 注意到正方形的中心对称性，可以用椅子的相对两个脚与地面的距离之和来表示这对应两个脚与地面的距离关系，这样用一个函数就可以描述椅子两个脚是否着地的情况. 于是引入两个函数即可描述椅子四个脚是否着地的情况.

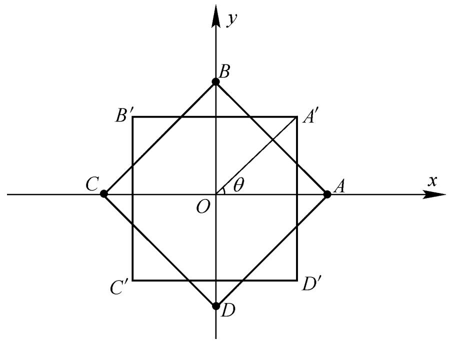

图 2－10

记函数 $f(\theta)$ 为椅子脚 A、C 与地面的垂直距离之和，函数 $g(\theta)$ 为椅子脚 B、D 与地面的垂直距离之和，则有 $f(\theta)\geqslant 0$，$g(\theta)\geqslant 0$，且它们都是 θ 的连续函数. 由假设③，对任意的 θ，$f(\theta)$、$g(\theta)$ 至少有一个为零，不妨设当 $\theta=0$ 时，$f(0)>0$，$g(0)=0$，故问题可以归为证明以下数学命题：

数学命题（问题的数学模型）　已知 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 都是 θ 的非负连续函数，对任意的 θ，有 $f(\theta)g(\theta)=0$，且 $f(0)>0$，$g(0)=0$，则存在 θ_0，使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

4. 模型求解

证明：将椅子旋转 $90°$，对角线 AC 与 BD 互换，故 $f(0)>0$，$g(0)=0$ 变为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.构造函数 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则有 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，且 $h(\theta)$ 也是连续函数. 显然，$h(\theta)$ 在闭区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续. 由连续函数的零点定理知，必存在一个 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $h(\theta_0)=0$，即存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$. 由于对任意的 θ，有 $f(\theta)g(\theta)=0$，特别有 $f(\theta_0)g(\theta_0)=0$，于是 $f(\theta_0)$、$g(\theta_0)$ 至少有一个为零，从而有 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

简评　该问题初看起来似乎与数学没有什么关系，不易用数学建模来解决，但通过以上处理把问题变为一个数学定理的证明，使其可以用数学建模来解决，从中可以看到数学建模的重要作用. 该问题给出的启示是：对于一些表面上与数学没有关系的实际问题也可以用数学建模的方法来解决，此类问题建模的着眼点是寻找、分析问题中出现的主要对象及其隐含的数量关系，通过适当简化与假设将它变为数学问题.

习题与思考

1. 双层玻璃功效问题建模案例可以给出什么启示?

2. 公平席位分配问题的席位公式 $Q_k=\dfrac{p_k^2}{n_k(n_k+1)}$ 是怎样得出的?

3. 中国人重姓名问题数学建模案例中的模型准备、模型假设是什么?该案例给你什么启示?

4. 通过对本章的学习，你对数学建模有哪些新的认识?

5. 请尝试在你学过的知识中找出一个数学建模案例.

6. 用数学建模的方法说明销量极大的易拉罐（如可口可乐饮料罐）设计的合理性.

7. 某学院有 8 个专业的研究生共 148 人，其中各专业的人数分别为：11 人，3 人，8 人，45 人，4 人，40 人，3 人，34 人，假设学校拨给学院奖学金名额的等级及比例为

等级	一等	二等	三等	四等
比例	40%	20%	20%	20%

请用数学建模的方法给该学院设计一个合理的分配奖学金名额的方法和具体的名额分配方案.

8. (道路交通路口车辆、行人停止线位置问题）在道路交叉的每个路口常设有机动车、非机动车和行人停止线来避免车辆和行人穿越路口时出现拥堵和事故发生. 车辆和行人在停止线处是等待还是通行由路口的信号灯控制. 道路通行规定：绿灯亮时，准许通行，但转弯的车辆不得妨碍被放行的直行车辆、行人通行；黄灯亮时，已越过停止线的车辆和行人可以继续通行；红灯亮时，禁止车辆和行人通行.

   如果在兼顾车辆和行人都能比较满意地通过路口的条件下，想使路口通行量尽可能大，那么这些停止线应该怎样画? 画在路口的何处? 请用数学建模的方法解决此问题并给出根据数学模型得出的具体道路交通路口车辆、行人停止线位置. 同时用模型说明目前道路交叉的每个路口的机动车、非机动车和行人停止线位置是否合理.