问题驱动的中学数学课堂教学

代数与几何卷

曹广福　王海青　张蜀青　吕松涛　著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书基于数学内容的思想性针对高中代数与几何内容为中学数学教师和大学师范生以及数学教育研究生提供了建设性意见。对代数与几何的历史做了一番梳理，本着尊重历史与突出数学思想的原则设计了大量案例，其设计源于教材又不拘泥于教材。

本书有别于传统的数学教育理论书籍，作者融数十年数学研究经验与教学经验于数学教育研究中，提出了一些新颖的见解，直接面向一线教学提出具体的教学建议，不失为一本具有重要指导意义的一线教师教学参考书。

本书适合大学师范生作为教法教材或参考书，也适合中学一线教师作为培训用书或教学指导用书及中学生的参考读物，还适合数学教育研究工作者作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

问题驱动的中学数学课堂教学. 代数与几何卷/曹广福等著. —北京：清华大学出版社，2022.4

ISBN 978-7-302-60275-0

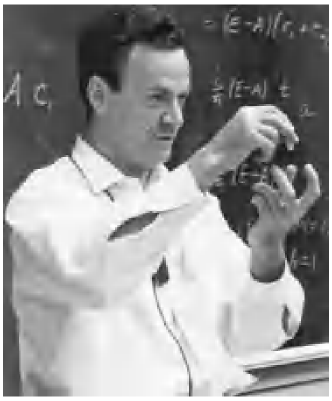
Ⅰ. ①问… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①中学数学课—课堂教学—教学研究 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 036843 号

责任编辑：刘 颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮 编：100084
社 总 机：010-83470000　　邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市东方印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170mm×240mm　　印 张：14.5　　字 数：201 千字
版 次：2022 年 4 月第 1 版　　印 次：2022 年 4 月第1 次印刷
定 价：54.00 元

产品编号：096338-01

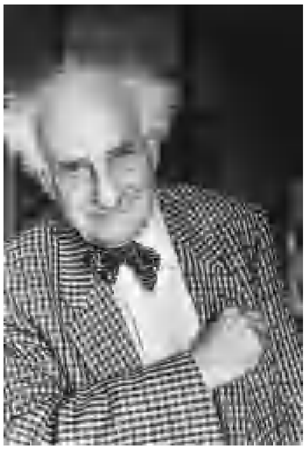


理查德·费曼

我不能创造的,我也无法理解

——费曼

许多人认为,理查德·费曼(Richard Feynman,1918 年 5 月 11 日—1988 年 2 月 15 日)是 20 世纪诞生于美国的最伟大的物理学家,一个独辟蹊径的思考者、超乎寻常的教师、尽善尽美的演员,1965 年,他因在量子电动力学方面作出的卓越贡献,获得诺贝尔物理学奖。费曼认为他对物理学最重要的贡献不是量子电动力学或超流理论,而是根据他 20 世纪 60 年代在加州理工学院授课录音整理而成的三卷教材《费曼物理学讲义》。费曼有一种特殊能力,他能把复杂的观点用简单的语言表述出来,这使得他成为一位硕果累累的教育家。在获得的诸多奖项中,他自豪的是 1972 年获得的奥尔斯特教育奖章。



汉斯·弗赖登塔尔

数学教育是数学的再创造

——弗赖登塔尔

汉斯·弗赖登塔尔(H. Freudenthal,1905—1990)是国际上极负盛名的荷兰数学家和数学教育家。他是著名数学家布劳威尔的学生,早年从事纯粹数学研究,以代数拓扑学和李群研究方面的杰出工作进入国际著名数学家的行列。作为著名的数学家,弗赖登塔尔非常关注教育问题,他很早就把数学教育作为自己思考和研究的对象,在这一点上弗赖登塔尔与其他科学家有所不同,其他高水平的科学家开始关注和投入研究教育问题时往往是在他们年老之后,而弗赖登塔尔被教育问题所吸引从很早就开始了。他本人对此有一个解释:我一生都是做教师,之所以从很早就开始思考教育方面的问题,是为了把教师这一行做好。弗赖登塔尔指导、推动和亲身参与了荷兰的数学教育改革实践,并对20世纪国际数学课程的改革与发展作出了重大贡献。弗赖登塔尔一生发表关于数学教育的著述达几百篇(部),其中三本著作《作为教育任务的数学》《播种和除草》《数学结构的教学现象》用多种文字出版,在国际上产生了很大的影响。

总 / 序

介入中学数学教育已有若干年,我时常在思考一个问题:“数学教育的本质到底是什么?我们该教给学生什么?”其实很多人都在思考这个问题,也都有自己的认识,有一种“高大上”的说法:“教学生如何思考,如何学习。”可我们真的知道怎么教学生思考吗?我们真的知道怎么指导学生学习吗?我们把很多问题都归咎于应试教育,问题是,我们能进行什么样的教育?

诺贝尔物理学奖获得者、著名物理学家、加州理工学院教授理查德·费曼(Richard Feynman)最后一次住院治疗前,在其办公室的黑板上写下:“我不能创造的,我也无法理解”(What I cannot Create, I do not understand)。从教育的角度说,这句话是很有道理的。很多人都读过弗赖登塔尔的《作为教育任务的数学》,我以为,概括起来,《作为教育任务的数学》表述了两个基本观点:①数学教育应该结合学生的生活体验与数学现实;②数学教育是数学的“再创造”。虽然我对于弗赖登塔尔在《数学教育再探》《除草与播种》等论著中的一些观点持保留意见,但我相信,无论是数学教育工作者还是数学教育研究者乃至教材编写者,大概都会认同弗赖登塔尔的这两个观点。然而,如何结合学生的生活体验与数学现实?实际操作时往往会出现问题。中学数学教材无论是引入一个概念还是建立一个定理,通常都会创设一些问题情境,其目的也正是为了体现与学生的生活体验相结合。问题是,我们为什么要创设这样的问题情境?它真的能反映出我们所建立的概念或定理的科学本质吗?以复数的引入为例,几乎所有的教材都是以 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解所以需要扩充数域作为复数导入的问题情境。有些人认为,从代数的角度看,无非是定义一些抽象的运算使之成为

一个代数或域，对抽象代数耳熟能详的人来说，这的确是一件自然的事情。可如果一个中学生问你："老师，为什么要研究 $x^2+1=0$ 这样的方程？它有意义吗？"教师该如何回答？如果你无法回答学生的问题，你又如何让学生相信这个概念是重要的？学生又如何知道该怎样使用这套理论？结合学生的生活体验与数学现实的具体体现是创设合适的问题情境，但这个问题情境应该是有价值的真实情境，而不是虚无缥缈、不着边际的虚假或毫无意义的情境，与其这样，还不如直截了当地引入数学概念。

说到真实的问题情境，必然涉及另一个本质问题，什么叫数学的"再创造"？如果教师自己都不知道数学是怎么被创造出来的，他（她）又如何引导学生去"再创造"？教师或数学教育研究工作者固然有别于数学研究工作者，教师与数学教育研究工作者可以不必做具体的数学研究，但至少应该懂数学，具备数学的鉴赏能力，否则他（她）的教育或研究必然是空中楼阁，甚至不知所云，缺少实际的可操作性。

小学数学教育属于启蒙教育，需要教育学、心理学的指导，一个小学数学教师如果对教育学、心理学一无所知，那他一定是个不合格的教师。但从中学开始，数学内容的思想性上升为数学教育的核心，应该将数学的"再创造"作为数学教育的灵魂。这就给数学教师与数学教育研究工作者提出了一个严肃的问题："我们真的懂数学吗？我们具备数学鉴赏能力吗？我们到底该从事或研究什么样的数学教育？"如果我们不懂数学，不具备数学的鉴赏能力，我们又如何引领学生进行数学的"再创造"？除了依样画葫芦，还能干什么？

任何数学概念与定理都不是数学家或物理学家头脑中的臆想物，都有其产生的背景，有些概念甚至经过了数百年的考验才最终登堂入室得到广泛的认同，还有些理论曾让数学家与物理学家们争论不休，甚至引起了极度的恐慌。如果数学只是数学家的游戏，那么它就不会被科学家们深究不放，不弄清楚其真面目誓不罢休。可以说，直至微积分，一切的数学都离不开现实与自然科学，即使是现代数学，追根溯源起来，也与自然科学有着千丝万缕、述说不清的渊源。数学课堂怎么引导学生"再创造"？有一种观点

认为越简单越好，不要把简单问题复杂化，果真如此，最简单的做法是单刀直入、开门见山地告诉学生一个数学概念或定理，就如前面提到的复数那样。如果是这样，我们从事的还是数学教育吗？恐怕充其量不过是数学知识的传授，而且其中夹杂着很多虚假的成分使学生难辨真伪。

要做好数学教育研究，首先需要了解数学，懂得鉴赏数学。这就好比音乐教师给学生分析一首歌，如果教师不清楚音乐表达的是一种什么样的情感，不知道词曲作者创作该曲的背景，甚至连乐曲是什么调、什么节拍都不甚了解，他(她)又怎么向学生剖析？从这个意义上说，无论是搞数学教育还是做数学教育研究，有必要先学好数学，学会鉴赏数学。

数学教育该以什么样的方式进行？这本无一定之规，课堂是教学的最基本形式，少数有天赋的学生也可能自学成才或者因为特定的环境脱颖而出，就大众而言，通常都需要经过课堂教学这样的特定形式。数学教育是否需要改革？答案是肯定的。问题是改什么？为什么要改？

数学对于数学教师与数学教育研究者而言应该是个"白箱"，换言之，数学教师与数学教育研究者应该对数学有透彻的了解，这种了解并非指你是否懂得某个概念与定理，知道怎么用它们，更重要的是，你要清楚概念与定理产生的背景以及它们的科学价值。我们常常把数学文化放在嘴上，可我们真的了解什么是数学文化吗？数学文化不等于介绍一些数学史，或者开展一些课外数学兴趣活动，更重要的是，数学文化体现在每一节数学课的教学过程中。打个比方，一幅画摆在你的面前，如果你是个普通的观赏者，你可能朦胧地觉得这幅画好不好看，至于怎么个好看法，你就说不出所以然来了，如果你面对的是一幅抽象派的画作，你可能压根就无法判定它是好还是不好。但如果你是个专业的鉴赏家(不一定是画家)，那么你可能不仅了解作者是谁，是在什么背景下画的这幅画(历史)，可能还知道这幅画表达了作者什么样的情感，并能解读出画中的每一个细节(文化)。当然，光线、构图、色彩等则是画家与鉴赏家的基本功(内容)。任何一个高水平解说员对你解说一幅画作的时候一定不会仅仅停留在作者是怎么用光的，构图如何，用了什么色彩，而是向你解释，如此用光是为了表达什么样

的意境，构图为什么精巧，色彩表达了什么样的感情，包括远近高低、清晰模糊等都传递了什么信息，这就是文化。数学也是如此，只不过与绘画相比，它更为抽象，需要具备与众不同的鉴赏能力才能读懂，我们有多少数学课堂传递了数学文化？如果教师做不到，还奢谈什么数学文化？

数学对于学生而言好比“黑箱”，数学教师与数学教育研究工作者不仅应该了解数学知识，更应该了解数学文化，知道数学在表达什么，它缘何产生，对数学乃至自然科学产生了什么影响，它的重要性体现在哪里？我们如何判断一个数学结果的好坏？好在哪里？不好在哪里？只有这样才能引导学生一步一步地揭开“黑箱”的秘密。

课堂教学的最高境界是什么？是自由王国，还是无招胜有招。

很多人认为教师讲课应该好好写备课笔记，讲什么、重点难点是什么应该做到心中有数。这些自然有一定的道理，但知道重点难点就算备好课了吗？假如让你在不同的时间里给两个班上同样内容的课，你第一次上课与第二次上课有没有差别？差别在哪里？对于新教师来说，也许两次课基本没有什么差别，因为他或者照着讲义（PPT）读，或者把讲义熟记了下来，可以一字不漏地把讲义内容背出来。这样的课成功与否取决于你讲义的水平如何，但不管如何成功，这样的课都算不上高水平的授课。那什么是高水平的授课？无论你重复讲多少次同样内容的课，你使用的语言都可能各不相同，但意思却是一样的，也就是说，你抓住的是课程的精髓与思想，至于用什么样的语言来表达则是次要的。尤其是有了多媒体之后，很多东西完全可以通过屏幕展示，无须教师费事书写。说到底，语言与文字只是知识的载体，知识又是思想的载体，教师的任务是通过语言将知识所承载的思想传递给学生，而要达到这种境界，绝不是站在与所传授的知识同一水平线上能够做到的，教师需要站在更高的层面上才能真正看清楚知识所承载的思想，否则他（她）只能是照本宣科、依样画葫芦。

教师的教学有层次上的差别。如果教师的课堂教学仅仅停留在就知识论知识上，没有对知识的独立见解，也没有对知识的主客观评判，那么，他的教学就仅仅停留在传授知识的层面上。如果教师的课堂教学具有对

概念、原理的深入剖析，而且这种剖析蕴含着自己对知识的独到见解，这种见解也许基于对历史的了解，也许基于自身的研究积累，那么他的教学就有了文化内涵。这就是课堂教学中知识与文化的差别。

很多人认为教学水平取决于教学经验的积累，此言大谬。教学经验的积累的确可以让教师的教学变得更加成熟，但未必能决定他教学的高度，换句话说，经验的积累可以在同一层面上使他的教学更完善，例如教态、语言、板书等都可以通过经验的积累逐步规范与提高。然而，决定教师教育高度的根本因素则是教师的眼界与素养。如果一个教师能够抓住问题的本质，有对问题的独到见解，哪怕他的语言不够规范，仪表不够端庄，板书不够工整，他的教学也是高水平的。反之，如果教师缺少把握本质问题的能力，教学只是停留在细枝末节上，无论他的举止多么高雅，语言多么幽默，板书多么工整，他的教学也是低水平的。

有人说："教育的关键是教会学生如何学习。"问题是如何教会学生学习？这是个值得探讨的问题。学会学习的根本在于掌握基本的思维方法，能否掌握思维方法与思想取决于你对相关学科的鉴赏力。教师传授思想的过程就是教会学生如何学习、如何鉴赏的过程。

本书着眼于高中数学内容的思想性，为教师们的教学和大学师范生以及数学教育研究生的教育实习提供了建设性意见，书中针对教材内容与课堂教学给出了大量案例分析，同时设计了部分高中数学内容的教案供一线教师参考。

本人非数学教育专业出身，无非是凭借多年从事数学研究与数学教学的经验发表一些粗浅的认识，行文素喜信马由缰，不专业之处在所难免，也算是为中国数学教育研究添一块另类的砖头。谬误之处，恭请专家批评指正。

曹广福

2018年4月

本 / 卷 / 序

与前三卷相比，本卷的完成颇不容易，如今终于付梓，也算是了却了又一桩心愿。与前三卷不同的是，本卷内容涉及面较宽，在高考中亦占据了比较重的分量，篇幅的控制是个难题，这就需要有所取舍，所幸最终控制在与前几卷篇幅相当的范围内。

高中学段的代数与几何包括“不等式”“向量”“立体几何”以及“圆锥曲线”，这些内容都是中学传统内容，一线教师耳熟能详。新版教材的体系有所变化，例如不等式的要求有所降低，立体几何在必修与选修中皆有所涉及，这些问题老师们自然一清二楚，此处无须赘述。

与前几卷的写作风格类似，每个部分均力图将相关历史进行一番梳理，以方便读者了解其脉络，这里想针对这个问题稍微展开谈一谈。众所周知，教材是课堂教学的重要参考，但它不同于教案，更不可能把本该教师课堂上做的事一并做完。如果把教材比喻成小说的话，教师的教案则是根据小说改编的剧本，课堂则是根据剧本拍出来的电影或电视剧。剧本不可能是小说的重复，电影或电视剧也不完全是剧本的可视化再现，其中均包含了编剧与导演的再创作元素。与影视不同的是，教师既是编剧又是导演，同时还是演员，担任了三重角色。教材受篇幅限制，很难面面俱到地将某个知识模块的前因后果梳理清楚。然而实际教学过程中如果不把问题的来龙去脉交代清楚，学生也只能熟记知识却不知这些知识缘何产生，其中蕴藏着何种奥妙，所谓的核心素养也就无从谈起了。

数学教育与数学教学是两个不同的概念，一个人只要站在讲台上教数学，他就是在从事数学教学工作，但他的数学能否称之为教育，则要看他教给了学生什么。课程标准说得很清楚，数学教育要培养学生的数学素养，

而且还归纳出了六大核心素养。问题是数学课堂如何落实这些核心素养？如何使得核心素养不再成为改革的口号？恐怕关键在教师。教师要培养学生的素养，自己首先要具备这种素养。至于怎么将这种素养传递给学生，那是个教法问题。数学教育的本质是什么？这是个比较大的哲学问题，但有一点是众所周知的，无论是什么学科，都是在不断发现问题、分析问题、解决问题的过程中慢慢形成的，无一例外。正如希尔伯特所说："一个学科，如果能不断的提出问题，那么它就充满活力。"既然数学教育是数学的再创造，当然是引导学生完成这种再创造，而"问题"则是完成再创造的根本。"再创造"依赖于我们的"直觉""思辨""逻辑演绎与计算"能力。知识本身不是教育的目标，而是完成教育的载体，教师最终需要教给学生的是创造这些知识的方法与手段，也可以说是知识背后的思想方法。数学直觉与思辨能力需要在日常的教学过程中不断熏陶，通过对特例或低一级事物的感知、概括过渡到对一般性与高一级事物的直觉。

不等式的历史十分悠久，等式的历史有多长，不等式的历史便有多长。然而，我们发现，试图将不等式的历史做一个完整的梳理几乎是不可能的。不等式的著作很多，但似乎没有任何一部数学史书专门谈及这个方面。之所以如此，或许与不等式缺少系统性有关，它遍及数学的每个领域，作为重要的技巧，它被所有人日常使用，却不能自立门户。有人说数学是工具学科，数学是不是工具学科姑且不论，但不等式的确是任何领域使用得极其频繁的工具。中学阶段介绍的不等式不过是不等式之沧海一粟。目前的教材对不等式进行了一些压缩，鉴于不等式在各种估计、估算中确实很重要，所以本书还是保留了传统的内容，对现行教材做了适当补充，供需要的读者参考。

相比于古老的不等式与欧几里得几何，系统的向量理论则相对年轻一些，它对数学产生的影响甚为深远，从有限维向量空间（也叫线性空间），到无穷维向量空间，直到微分几何中的切丛、拓扑学中的向量丛、李群中的李代数等无不体现了向量空间的重要性。

对几何的历史梳理主要是圆锥曲线部分，欧几里得几何的历史是大家

耳熟能详的,本书并未浓墨重彩地介绍。鉴于圆锥曲线的发展比较复杂,先后经历了三个历史时期,涉及纯几何、光学以及坐标几何,如果不把历史梳理清楚,便很难找到合适的教学切入点。就圆锥曲线的教学而言,课堂最难处理的部分也许是概念课,很多人都是根据“动点到两定点的距离之和为常数”直接引入椭圆的定义。问题是怎么想到找两个定点的?又是怎么发现动点到两个定点距离之和为常数的?不熟悉圆锥曲线的历史恐怕很难向学生解释清楚上述问题,课堂上只能照本宣科。了解历史的目的不是为了课堂上介绍历史,而是帮助我们寻找合适的教学切入点,找到概念产生的本原性问题,从而引导学生在分析问题的过程中重建圆锥曲线的概念。

需要特别说明的是,书中部分图片并非我们的原创,而是直接复制过来的,特向原作者表示感谢!对教材内容的处理是否合适也需要实践检验,欢迎读者提出宝贵意见。

曹广福

2021 年 11 月

目 / 录

第1章　不等式

1.1　不等式简介

1.1.1　不等式概述

本节并非介绍不等式的历史，试图梳理出不等式的详细历史可能是一件困难的事情，事实上，各种数学史图书中极少有不等式的专门介绍。究其原因，也许是不等式作为实用工具，自身并无系统的理论所致。

虽然有关不等式的历史少有详细介绍，但其产生不仅源远流长，而且贯穿古今数学的几乎所有领域，从最古老的数的大小比较，到后来的代数式比较，以及近现代的最大、最小值问题，优化问题，各种估计，无不体现出不等式的重要性与强大威力。

不等式内容之庞杂，远非中学阶段一两个章节的内容所能概括，无论是初等不等式还是微分、积分不等式乃至变分不等式，几乎每一个部分都可以写成一本书。实际上专门介绍不等式的书籍已经有很多，例如哈代、利特尔伍德、波利亚合著 *Inequalities*[1] 就是关于不等式的大部头著作。至于针对中学数学所涉及不等式的各种参考书更是数不胜数，这里就不一一列举了。

不等式的技巧性极强，或许正因为如此，很多不等式均以人的名字命名，这些不等式不仅著名，而且在处理很多问题时发挥着非常重要的作用，有些不等式还有着很强的几何背景。新版教材将不等式内容弱化是个值得斟酌的问题，即使到了大学高年级课程，虽然涉及的大多是微分、积分不等式，但其基本技巧离不开初等不等式。例如函数空间 L^p 中赫尔德

(Hölder)不等式的证明虽然有一定的技巧性,但其技巧的本质依然是初等不等式。由此可见,初等不等式是未来进行各种估计必备的基本工具,即使不以数学研究为目标,也不宜弱化,这与三角公式不宜弱化是一个道理。

1.1.2 几类著名的不等式

这里拟介绍几类常用的不等式及其拓展,这些不等式不仅其证明方法具有代表性,而且使用的频率也比较高。

1. 算术—几何平均不等式

算术—几何平均值最早出现在欧几里得(Euclid)的《几何原本》中,中学教材仅限于两个量的情形,称为基本不等式,即

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

这里 a,b 都是非负数。基本不等式的证明方法有很多种,但在证明之前,首先需要理解这个不等式的重要性。从现代的角度看,这个不等式反映的是线性运算(数乘与加法)与非线性运算(乘法)之间的转换,化非线性运算为线性运算的思想自古有之,例如为了计算大数乘除法而产生的对数运算便是如此。从实用的角度看,算术—几何平均不等式可以帮助我们通过代数式的缩放完成代数式的简化与估计,包括最大值、最小值的计算。

基本不等式的证明并非一件复杂的事,将不等式

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

展开便可以完成证明。这个不等式也有几何化的证明,但有些证明显得颇为生硬,有霸王硬上弓之嫌,需要仔细观察才能看清楚几何图形面积之间的关系。证明大意为,以长为 $a+b$,宽为 b 作矩形,取 $a+b$ 的一半$\frac{a+b}{2}$为边作正方形,如图 1.1 所示放置,通过这个图不难找到基本不等式的证明。

另一个几何化证明则直观自然了许多,以 $a+b$ 为斜边任作一个直角三角形,从直角顶点引斜边的垂线,即斜边上的高,记垂线的长为 c,则该

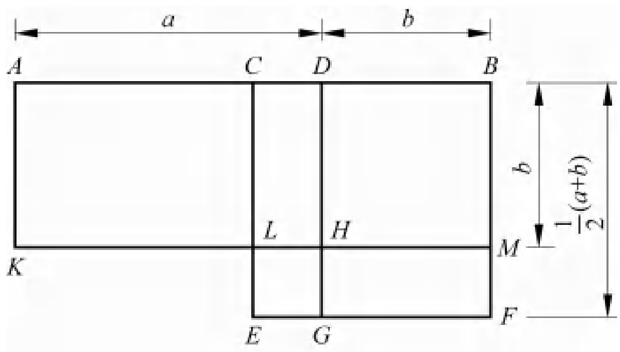


图 1.1

垂线将直角三角形分成了两个小的相似直角三角形,根据相似比很容易证明 $c=\sqrt{ab}$。至于 c 为什么不会超过$\frac{a+b}{2}$,估计一般学生也不难看出来,因为只要以 $a+b$ 为直径作一个圆,便知道 c 是垂直于直径的弦的一半,它自然不会超过直径的一半。

从基本不等式到一般的算术—几何平均不等式需要著名的数学归纳法,这个重要工具来自莫洛克斯(Morlocks,1494—1575)、帕斯卡(Pascal,1623—1662)、伯努利(Bernoulli,1654—1705)及柯西(Cauchy,1789—1857)等人。《不等式》[1]一书中便使用了数学归纳法。

所谓算术—几何不等式指的是对任意 n 个非负数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}。$$

$n=2$ 时便是基本不等式,有些中学数学拓展材料中也包含了算术—几何不等式的一般情形。学生只要熟悉数学归纳法,对算术—几何不等式的证明便不难理解。

对于 $n=2$,前面已经证明。假设 $n=k$ 时,有

$$\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},$$

需要证明 $n=k+1$ 时,有

$$\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}。$$

比较自然的想法是分离出其中一项从而转换成 $n=k$ 的情形，但简单的分解是完不成证明的，这里需要一点技巧。不妨记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},$$

则

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\\&=\frac{(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\\&=\frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\dfrac{a_{k+1}+A_{k+1}+\cdots+A_{k+1}}{k}}{2}\\&\geqslant\frac{\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}\cdots A_{k+1}}}{2}\\&\geqslant\sqrt{\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\ \sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}\cdots A_{k+1}}}\\&=\sqrt[2k]{a_1\cdots a_k a_{k+1}A_{k+1}\cdots A_{k+1}}。\end{aligned}$$

这说明

$$A_{k+1}^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_{k+1}A_{k+1}^{k-1},$$

即

$$A_{k+1}^{k+1}\geqslant a_1a_2\cdots a_{k+1},$$

两边开 $k+1$ 次方便得证明。

上述证明告诉我们一个事实，数学归纳法的运用是灵活多样的，其关键在于寻找到合适的降维方法将 $k+1$ 的情形转化为 k 的情形。

算术—几何平均不等式的证明方法也不是唯一的，例如还可以利用不等式 $e^x\geqslant x+1(x\geqslant-1)$进行证明。这个方法的思路是比较自然的，因为加法运算移到指数上就变成了数的乘法运算，只需要选择合适的 x 便可。也有些相关问题可以利用对数的性质，因为对数可以化乘积为和，这是比较和与积大小关系时常用的手段，有兴趣的读者不妨尝试一下。

2. 柯西不等式

柯西(Cauchy)不等式有很多种形式,也有很多推广,其意义已经远远超出了不等式本身,尤其是将其与几何相结合时,便与另一个重要概念紧密相连,那就是向量的内积。

柯西不等式的最早形式是纯初等的,它是说对任意两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)。$$

这个不等式的证明并不难,至少可以找到两种方法,一种方法是利用拉格朗日(Language)恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

导出(这个等式的证明是平凡的,两边展开即可)。由上述等式中右端第二项 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$ 非负立得证明,从拉格朗日恒等式还可以看出,当且仅当两组数对应成比例时,柯西不等式成为等式。

另一种方法是设一个参数 λ,由于

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\lambda b_i)^2\geqslant 0,$$

将左边展开,得到一个关于参数 λ 的一元二次不等式,由一元二次式非负可知其判别式

$$4\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\leqslant 0,$$

由此便得柯西不等式。如果上述不等式成为等式,意味着关于 λ 的二次函数与坐标轴有唯一交点,即

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\lambda b_i)^2=0$$

有解,换言之,存在 λ_0,使得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\lambda_0 b_i)^2=0,$$

即两组数对应成比例。反之,如果两组数对应成比例,柯西不等式成为等

式是显而易见的。

如果将上述两组数分别记为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可视为 n 维欧几里得空间中的向量,其内积恰好是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的长度分别为

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2},\quad \|\boldsymbol{b}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}。$$

于是柯西不等式可以写成

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|。$$

中学不介绍高维空间中的内积概念,但可以在二维或三维空间中将两者联系起来看。由内积的定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha(\alpha\text{ 是 }\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{b}\text{ 的夹角})$$

知不等式

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

是自然的,等式成立当且仅当两向量平行,即对应分量成比例。正是因为柯西不等式与向量内积之间的这种联系,使得在高维空间中有了定义向量夹角的可能,例如在 n 维欧几里得空间中,如果两个向量的内积等于 0,则称它们相互垂直。这一思想还可以推而广之,引入到函数空间甚至更一般的抽象空间中,傅里叶(Fourier)分析理论正是基于这一思想。不妨回顾一下微积分中的傅里叶级数:如果 f 是黎曼(Riemann)可积的周期函数(不妨设周期为 2π),则 f 有傅里叶展开

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

上述展式中的"$\sim$"不能简单地改成等号。事实上,何时可以划等号是个迄今悬而未决的问题,这个问题最初由鲁津(Luzin)提出来,它不仅是傅里叶分析的重要研究课题,也因此产生了一门新的学科——调和分析。然而,如果给 f 一些约束条件,这个问题可以得到完美的解决。例如,假设 f 在

$[-\pi,\pi]$上平方可积,则有

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)。$$

不熟悉勒贝格(Lebesgue)积分的读者不妨把上面提到的可积性理解成黎曼积分。

傅里叶展开式与柯西不等式有何关系?要说清楚这个问题,就需要涉及上述级数的收敛性了。如果把$[-\pi,\pi]$上所有平方可积的函数放在一起,就构成了一个集合,通常记为$L^2([-\pi,\pi])$,即

$$L^2([-\pi,\pi])=\left\{f\mid\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x<+\infty\right\}。$$

为便于理解,这里依然淡化积分的内涵,只要不涉及完备性,不妨理解成黎曼积分。我们可以在$L^2([-\pi,\pi])$中引入内积概念:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}fg\,\mathrm{d}x,\quad f,g\in L^2([-\pi,\pi])。$$

不难验证,$\langle\cdot,\cdot\rangle$满足内积的所有性质。我们把它称为$L^2([-\pi,\pi])$中的内积,$L^2([-\pi,\pi])$称为内积空间。

为什么把$L^2([-\pi,\pi])$称为空间?它与欧几里得空间之间有什么相似之处吗?欧几里得空间中的点与向量是对应的,所以也把它称为向量,指的是原点为始点,该点为终点的向量,欧几里得空间中的向量具有线性运算,其线性运算与内积之间满足通常的运算法则(可以类比数的加法与乘法运算法则)。那么$L^2([-\pi,\pi])$中的点是否具有与欧几里得空间中的点类似的性质呢?例如,$L^2([-\pi,\pi])$中两个函数的和是不是还在其中?这个问题并不那么平凡,要验证这件事,即要验证两个平方可积函数的和是不是还是平方可积的,证明的关键恰恰是下面的不等式:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}fg\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}g^2\mathrm{d}x\right)。$$

事实上,只需要把$(f+g)^2$展开成f^2+g^2+2fg便不难明白。这个不等式也称为柯西不等式,可见柯西不等式在研究内积空间中的作用有多么大。实际上,柯西不等式是内积空间中向量固有的特征。

既然把 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的点称为向量，它有“长度”吗？回顾一下欧几里得空间中向量的长度，类比到 $L^2([-\pi,\pi])$ 中，不难找到长度的定义，似乎应该定义为

$$\| f \| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。$$

如果以此作为长度的定义，函数 1 的长度是多少？直接计算不难得知 $\| 1 \| = \sqrt{2\pi}$，这有点不合常理，问题出在积分区间的长度并不等于 1，合理的做法是把区间的长度抹去，即定义

$$\| f \| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。$$

在上述定义之下，显然有

$$\langle f, g\rangle \leqslant \| f \| \| g \|。$$

现在不妨重新审视一下傅里叶级数，微积分教材中通常会有下面一组积分式：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = 0,\quad n, m \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = 0,\quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = 0,\quad n \neq m。$$

如果用内积的符号来表示即

$$\langle \sin nx, \cos mx\rangle = 0,\quad n, m \in \mathbf{N},$$

$$\langle \sin nx, \sin mx\rangle = 0,\quad n \neq m,$$

$$\langle \cos nx, \cos mx\rangle = 0,\quad n \neq m。$$

再算一算 $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 \mathrm{d}x$ 及 $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 \mathrm{d}x$ 会发现，这些函数都是单位向量，于是 $\{\sin nx, \cos mx\}$ 构成了一组标准正交的序列。

费了如此多笔墨到底为了什么？为的是那个傅里叶展开式与函数是不是相等！要知道是不是相等，首先要搞清楚是何种意义下的相等，这就涉及级数的收敛性，既然在空间里看，当然是按照空间里的某种“度量”收

敛。前面已经定义了向量的长度，最自然的收敛方式便是按向量的长度(也叫范数)收敛。记级数的前 m 项和为

$$S_m=\sum_{n=0}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

需要考察的是对于 $f\in L^2([-\pi,\pi])$，是否有

$$\| S_m-f\| \to 0?$$

如果善用柯西不等式便不难回答上述问题，而且会得到另一个有趣又很著名的不等式(贝塞尔(Bessel)不等式)，有兴趣的读者不妨自己寻找答案，如果能把上述问题搞清楚，抽象的可分(也有不可分)希尔伯特(Hilbert)空间(完备的内积空间)中的正交基(直角坐标系)问题就不是什么疑难事了(有兴趣者不妨参看任何一本泛函分析教材，例如曹广福，严从荃编写的《实变函数论与泛函分析》[2])。

柯西不等式也可以推广到序列空间 $l^2=\left\{\{x_n\}\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\right\}$，对应地有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\right)^2\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2\right),$$

其中 $\{x_n\},\{y_n\}\in l^2$，其证明与经典柯西不等式大同小异。

柯西不等式的另一个推广方向是通过“长度”(范数)的变化得到新的不等式，这就是所谓的赫尔德不等式：对任意两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p,q>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。类似地，也可以引入序列空间

$$l^p=\left\{\{x_n\}\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\right\},$$

赫尔德不等式在此序列空间中依然是成立的：对任意 $\{x_n\}\in l^p$，$\{y_n\}\in l^q$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\right|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p,q>1$ 满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。还可以定义函数空间 $L^p([-\pi,\pi])$，$p\geqslant 1$，对任意 $f\in L^p([-\pi,\pi])$，$g\in L^q([-\pi,\pi])$，有赫尔德不等式

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} fg\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p,q>1$ 满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。上述积分不等式可以换成一般可测集上的勒贝格积分，但为不增加理解难度，姑且仅限于 $[-\pi,\pi]$ 上的黎曼积分。各种情形下的赫尔德不等式证明方法基本是一样的，但与柯西不等式的证明完全不同。事实上，柯西不等式的证明并不适用于赫尔德不等式。

证明赫尔德不等式需要一个看上去很初等但不那么初等的不等式：设 a,b 都是正数，α,β 是满足 $\alpha+\beta=1$ 的两个非负数，则

$$a^{\alpha}b^{\beta}\leqslant\alpha a+\beta b,$$

等式成立当且仅当 $a=b$，α,β 中有一个为 0。之所以说这个不等式不那么初等，是因为其证明需要一点微积分的方法。这个不等式曾经是一道国际奥林匹克数学竞赛题，有兴趣的读者不妨自己尝试着完成其证明，以及如何将这个不等式用于赫尔德不等式的证明。

3. 三角不等式

与柯西不等式（赫尔德不等式）密切相关的不等式是有着浓郁几何背景的三角不等式。顾名思义，三角不等式似乎与三角形有关。事实正是如此，初中生就知道，三角形两边之和大于第三边。倘若将三角形用向量表示，所谓三角不等式即为

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|。$$

如果在平面内建立直角坐标系，将向量用坐标表示，则有

$$\sqrt{(x_1\pm x_2)^2+(y_1\pm y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}。$$

这就是“三角形两边之和大于第三边”的代数表示。将其推而广之，可以得到序列空间及函数空间中的三角不等式。不过，对于无穷维空间，在证明三角不等式之前，首先应该弄清楚，它是不是一个向量空间，换言之，这些

空间对于线性运算是不是封闭的。解决这个问题需要一点初等技巧,这里不妨以一般的函数空间 $L^p([-\pi,\pi])(p\geqslant 1)$ 为例:设 $p\geqslant 1$,对任意 $f,g\in L^p([-\pi,\pi])$,有

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^p &\leqslant 2^p\max\{|f(x)|,|g(x)|\}^p\\ &\leqslant 2^p\max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\}\\ &\leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p),\end{aligned}$$

由此可见 $f+g\in L^p([-\pi,\pi])$,$L^p([-\pi,\pi])$的确是向量空间。序列空间可以类似地证明。于是得一般空间上的三角不等式:

对任意$\{x_n\},\{y_n\}\in l^2$,有

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2};$$

对任意 $f,g\in L^2([-\pi,\pi])$,有

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)\pm g(x))^2\mathrm{d}x}\leqslant\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}g^2(x)\mathrm{d}x}。$$

由柯西不等式很容易得到三角不等式。然而,如果将上述不等式中的 2 换成一般的不小于 1 的 p,证明就远没有这么简单了。这些不等式也有一个响亮的名字“闵可夫斯基(Minkowsiki)不等式”:

(1) 设 $p\geqslant 1$,对任意两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i\pm b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

(2) 设 $p\geqslant 1$,对任意$\{x_n\},\{y_n\}\in l^p$,有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

(3) 设 $p\geqslant 1$,对任意 $f,g\in L^p([-\pi,\pi])$,有

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}。$$

上述不等式的证明远不像 $p=2$ 那样平凡,需要较强的技巧,这些技巧虽然在大学相关课程内容中会有详细介绍,但鉴于目前中学内容中渗透

了大量大学内容，这些很经典的技巧对于中学或许是有用的，何况它们本来就属于初等方法，这里不妨略作介绍供大家参考。

$p=1$ 时结论是平凡的，故不妨设 $p>1$。首先将不等式左边的被积函数变形

$$\begin{aligned}|f(x)\pm g(x)|^p&=|f(x)\pm g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)\pm g(x)|\\&\leqslant|f(x)\pm g(x)|^{p-1}|f(x)|+|f(x)\pm g(x)|^{p-1}|g(x)|,\end{aligned}$$

由前面的证明知 $f+g\in L^p([-\pi,\pi])$，设 q 是满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数（称为 p 的对偶数），则 $p-1=\frac{p}{q}$，可见 $|f(x)\pm g(x)|^{p-1}\in L^q([-\pi,\pi])$，由赫尔德不等式知

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^{p-1}|g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}。$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^p\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\\&\quad\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\pm g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\\&\quad\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right],\end{aligned}$$

将右边第一个因式除到左边得