

第 1 章

函数及其初步知识

教学说明

- 本章概述：本章属于中学与大学的衔接内容。通过对函数基础知识的概括、总结和归类,引出基本初等函数和初等函数的概念,以及复合函数的概念。补充了 3 个三角函数和 4 个反三角函数,初步建立起高等数学微积分与初等数学之间的简单联系。考虑到相关专业和专升本的需求,本章补充了向量和复数的相关知识。同时,为了配合教学改革的实际需求,本章也增设了 MATLAB 初步知识。
- 本章主要内容：集合的概念与运算、函数的概念与性质、基本初等函数与初等函数的概念、复合函数的概念、向量的概念、复数的概念以及 MATLAB 初步知识。
- 本章重点：基本初等函数。
- 本章难点：初等函数的复合表述。

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

把研究的对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫作集合。集合三要素是确定性、互异性、无序性。只要构成两个集合的元素是一样的,就称这两个集合相等。集合的表示方法有列举法、描述法。

常见集合有：正整数集合,用 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$ 表示;整数集合,用 $\mathbf{Z}$ 表示;有理数集合,用 $\mathbf{Q}$ 表示;实数集合,用 $\mathbf{R}$ 表示。

例 1-1 试用列举法表示集合 $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y < 2; x, y \in \mathbf{Z}\}$ 。

解：集合元素是点,要求列举满足条件的点。

答案：该集合用列举法表示为 $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$ 。

例 1-2 已知 $A = \{1, 2\}$, $B = \{x | x \in A\}$, 则集合 A 与 B 的关系为_____。

解：由集合 $B = \{x | x \in A\}$ 知 $B = \{1, 2\}$ 。

答案： $A = B$ 。

1.1.2 集合间的基本关系

一般地,对于两个集合 A 、 B ,如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集,记作: $A \subseteq B$ 。如果集合 $A \subseteq B$,但存在元素 $x \in B$,且 $x \notin A$,

则称集合 A 是集合 B 的真子集,记作: $A \subsetneq B$ 。把不含任何元素的集合叫作空集,记作: $\emptyset$ 。并规定:空集是任何集合的子集。

如果集合 A 中含有 n 个元素,则集合 A 有 m_1 个子集和 $2^n - 1$ 个真子集。

例 1-3 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 则()。

A. $A \subsetneq B$ B. $B \subsetneq A$ C. $A = B$ D. $A \cap B = \emptyset$

解: 本题主要考查一元二次不等式解法与集合间的关系,是简单题。

答案: B。

例 1-4 若全集 $U = \{0, 1, 2, 3\}$ 且 $C_U A = \{2\}$, 则集合 A 的真子集共有()个。

A. 3 B. 5 C. 7 D. 8

解: $A = \{0, 1, 3\}$, 真子集有 $2^3 - 1 = 7$ (个)。

答案: C。

1.1.3 集合间的基本运算

一般地,由所有属于集合 A 或集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作: $A \cup B$ 。由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作: $A \cap B$ 。

全集、补集: $C_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A\}$ 。

例 1-5 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, 则 $(C_U A) \cup B$ 为()。

A. $\{1, 2, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{0, 2, 4\}$ D. $\{0, 2, 3, 4\}$

解: $C_U A = \{0, 4\}$, $(C_U A) \cup B = \{0, 2, 4\}$ 。

答案: C。

例 1-6 设 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap (C_U B) =$ _____。

解: $C_U B = \{x | x \leq 1\}$, 所以 $A \cap (C_U B) = \{x | 0 < x \leq 1\}$ 。

答案: $\{x | 0 < x \leq 1\}$ 。

1.2 函 数

1.2.1 函数的概念

设 A, B 是非空的数集,如果按照某种确定的对应关系 f ,使对于集合 A 中的任意一个数 x ,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 与它对应,那么就称“ $f: A \rightarrow B$ ”为集合 A 到集合 B 的一个函数,记作: $y = f(x) (x \in A)$ 。一个函数的构成要素为:定义域、对应关系、值域。如果两个函数的定义域相同,并且对应关系完全一致,则称这两个函数相等。函数的三种表示方法分别是解析法、图像法、列表法。



思考：对于函数的概念，需注意什么呢？

例 1-7 求下列函数的定义域。

$$(1) f(x) = \frac{3}{5x^2 + 2x}$$

$$(2) f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

$$(3) f(x) = \lg(4x - 3)$$

解：(1) 在分式 $\frac{3}{5x^2 + 2x}$ 中，分母不能为零，所以 $5x^2 + 2x \neq 0$ ，解得 $x \neq -\frac{2}{5}$ ，且 $x \neq 0$ ，即定义域为 $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ 。

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于或等于零，所以有 $9 - x^2 \geq 0$ ，解得 $-3 \leq x \leq 3$ ，即定义域为 $[-3, 3]$ 。

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x - 3 > 0$ ，解得 $x > \frac{3}{4}$ ，即定义域为 $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 。

例 1-8 下列各组中的两个函数是同一函数的为()。

$$(1) y_1 = \frac{(x+3)(x-5)}{x+3}, y_2 = x-5$$

$$(2) y_1 = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}, y_2 = \sqrt{(x+1)(x-1)}$$

$$(3) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(4) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, F(x) = x \sqrt[3]{x-1}$$

$$(5) f_1(x) = (\sqrt{2x-5})^2, f_2(x) = 2x-5$$

A. (1)(2)

B. (2)(3)

C. (4)

D. (3)(5)

解：(1)定义域不同；(2)定义域不同；(3)对应法则不同；(4)定义域相同，且对应法则相同；(5)定义域不同。

答案：C。



思考：能举出非函数关系的例子吗？

1.2.2 函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在正数 M ，使得 $|f(x)| \leq M$ (或 $-M \leq f(x) \leq M$)，则称 $f(x)$ 在 I 上有界。既有上界又有下界方可称有界，否则都称为无界。

函数 $f(x)$ 在 I 上有界,如图 1-1 所示;函数 $f(x)$ 在 I 上无界,如图 1-2 所示。

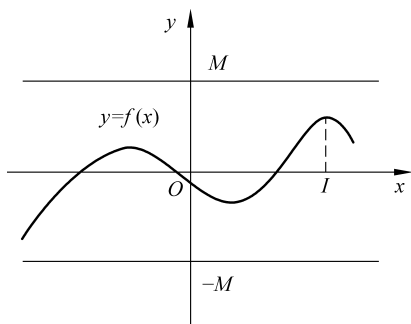


图 1-1

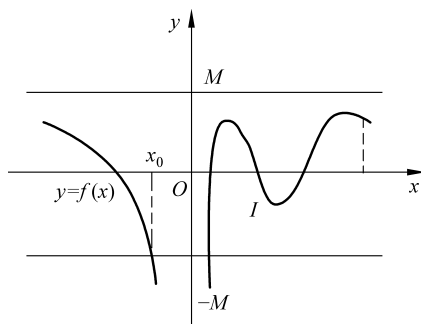


图 1-2

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义,对于区间内的任意两点 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是增函数,区间 I 称为单调增区间;若 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是减函数,区间 I 称为单调减区间。单调增函数与单调减函数统称为单调函数。



单调增函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的(见图 1-3);单调减函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的(见图 1-4)。

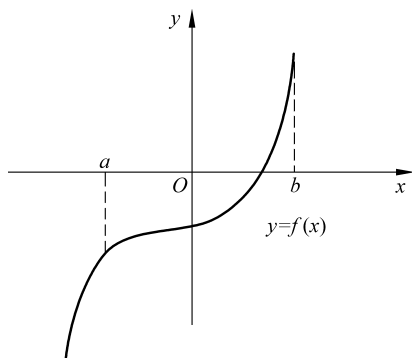


图 1-3

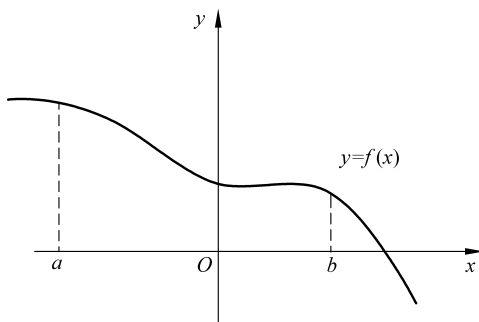


图 1-4

步骤：取值→作差→变形→定号→判断。

例 1-9 验证函数 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的。

解：在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任取两点 $x_1 < x_2$ ，于是 $f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 - 2) - (3x_2 - 2) = 3(x_1 - x_2) < 0$ ，即 $f(x_1) < f(x_2)$ ，所以 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的。

例 1-10 下列函数 $f(x)$ 中，满足“对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ”的是_____。

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ (2) $f(x) = (x-1)^2$ (3) $f(x) = e^x$ (4) $f(x) = \ln(x+1)$

解：(1) 因为对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数。

(2)、(3)、(4) 均不符合。

答案：(1)。

思考：根据函数的单调性，对函数分类。



3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义， I 为关于原点对称的区间，若对于任意的 $x \in I$ ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数。偶函数的图像是对称于 y 轴的（见图 1-5），奇函数的图像是对称于原点的（见图 1-6）。

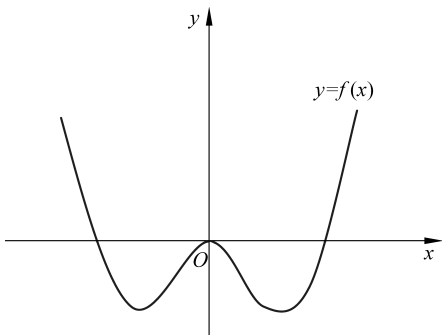


图 1-5

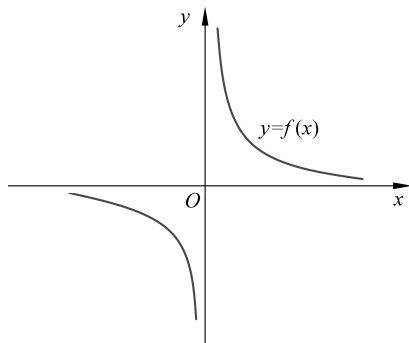


图 1-6

思考：根据函数的奇偶性，对函数分类。

例 1-11 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x) = 2x^2 + \sin x$

(2) $f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) (a > 0, a \neq 1)$

解: (1) 因为 $f(-x) = 2(-x)^2 + \sin(-x) = 2x^2 - \sin x \neq f(x)$, 同样可以得到 $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x) = 2x^2 + \sin x$ 既非奇函数, 也非偶函数。

(2) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2}[a^{-(-x)} - a^{-x}] = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) \\ &= -\frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) = -f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x)$ 是奇函数。

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义, 若存在不为零的数 T , 使得对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数。通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期, 但并非每一个函数都有最小正周期。

思考: 周期函数中, 是否所有函数都有最小正周期? 如不是, 请举例说明。



1.3 基本初等函数

1.3.1 常值函数

常值函数 $y=c$ (c 是常数), 其图像是一条平行于 x 轴且截距为 c 的直线(见图 1-7), $x \in \mathbf{R}$ 。

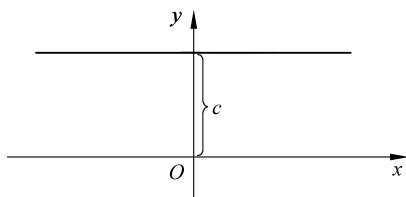


图 1-7



1.3.2 幂函数

1. 幂函数的定义

形如 $y = x^a$ (a 为实数) 的函数称为幂函数。

几种幂函数的图像如图 1-8 所示。

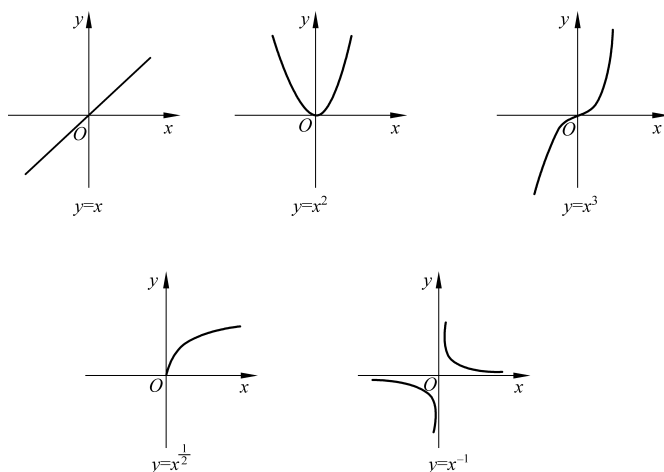


图 1-8

2. 幂函数的性质

这里我们只讨论 $x \geq 0$ 的情形。

当 $\alpha > 0$ 时, 函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加且无界 (见图 1-9)。



当 $\alpha < 0$ 时, 图像不过原点, 但仍通过点 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少、无界, 曲线以 x 轴和 y 轴为渐进线 (见图 1-10)。

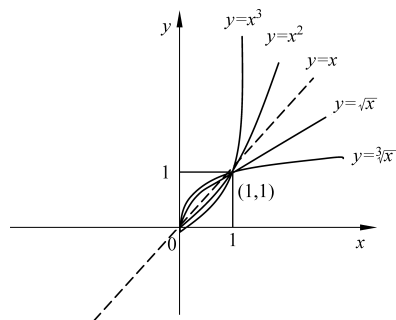


图 1-9

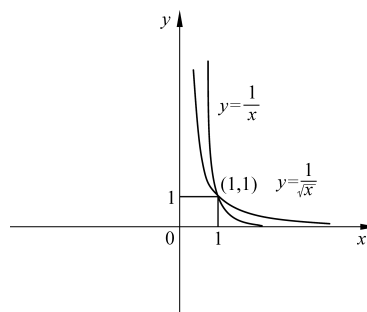


图 1-10

例 1-12 如图 1-11 所示的图像中,表示 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的是_____。

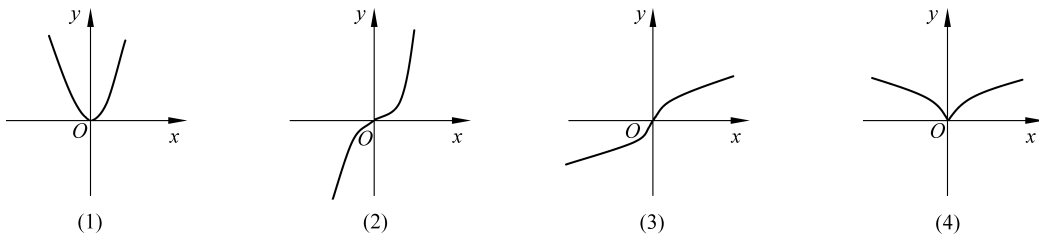


图 1-11

解: $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$ 是偶函数,所以排除(2)和(3);当 $x>1$ 时,而 $\frac{x}{x^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{1}{3}}>1$,所以 $x>x^{\frac{2}{3}}$,故排除(1)。

答案: (4)。

例 1-13 函数 $y=x^3$ ()。

- A. 是奇函数,且在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数
- B. 是奇函数,且在 $\mathbf{R}$ 上是单调减函数
- C. 是偶函数,且在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数
- D. 是偶函数,且在 $\mathbf{R}$ 上是单调减函数

解: $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ 为奇函数且为增函数。

答案: A。

1.3.3 指数函数

1. 指数函数的定义

形如 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的函数,称为指数函数。

一般地,如果 $x^n=a$,那么 x 叫作 a 的 n 次方根,其中, $n>1, n\in\mathbf{N}^+$ 。当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n}=a$;当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ 。

我们规定: ① $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0; m, n\in\mathbf{N}^*; m>1$); ② $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ ($n>0$)。

运算性质:

- (1) $a^r a^s = a^{r+s}$ ($a>0; r, s\in\mathbf{Q}$)
- (2) $(a^r)^s = a^{rs}$ ($a>0; r, s\in\mathbf{Q}$)
- (3) $(ab)^r = a^r b^r$ ($a>0, b>0, r\in\mathbf{Q}$)

2. 指数函数的性质

指数函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 它的图像全部在 x 轴上方, 且通过点 $(0, 1)$ (见图 1-12)。

当 $a>1$ 时, 函数单调增加且无界, 曲线以 x 轴负半轴为渐近线; 当 $0<a<1$ 时, 函数单调减少且无界,

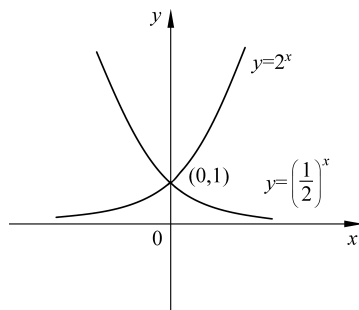


图 1-12

曲线以 x 轴正半轴为渐近线。



例 1-14 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{2}$ 、 $\sqrt[5]{4}$ 、 $\sqrt[8]{8}$ 、 $\sqrt[9]{16}$ 从小到大的排列顺序是_____。

解: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ 、 $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ 、 $\sqrt[5]{4} = 2^{\frac{2}{5}}$ 、 $\sqrt[8]{8} = 2^{\frac{3}{8}}$ 、 $\sqrt[9]{16} = 2^{\frac{4}{9}}$, 而 $\frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ 。

答案: $\sqrt[3]{2} < \sqrt[8]{8} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[9]{16} < \sqrt{2}$ 。

1.3.4 对数函数

1. 对数函数的定义

形如 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的函数称为对数函数。

指数与对数互化式: $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$ 。

对数恒等式: $a^{\log_a N} = N$ 。

基本性质: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ 。

运算性质: 当 $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ 时, 有如下性质。

$$(1) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N。$$

$$(2) \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N。$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M。$$

$$\text{换底公式: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} (a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0)。$$

$$\text{重要公式: } \log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b。$$

$$\text{倒数关系: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)。$$

2. 对数函数的性质

对数函数的定义域是 $(0, +\infty)$, 图像全部在 y 轴右方, 值域是 $(-\infty, +\infty)$ 。无论 a 取何值, 曲线都通过点 $(1, 0)$ (见图 1-13)。



当 $a > 1$ 时, 函数单调增加且无界, 曲线以 y 轴负半轴为渐近线; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少且无界, 曲线以 y 轴正半轴为渐近线。



对数函数 $y = \log_a x$ 和指数函数 $y = a^x$ 互为反函数, 它们的图像关于 $y = x$ 对称(见图 1-14)。

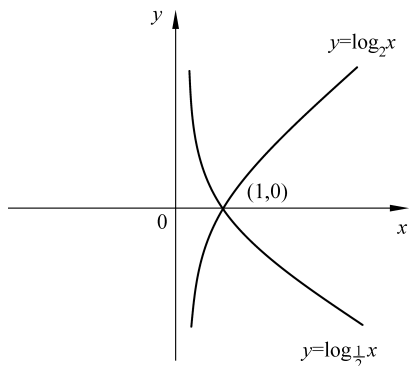


图 1-13

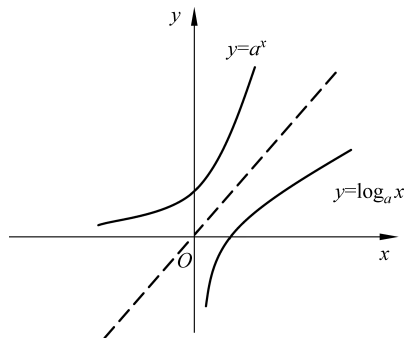


图 1-14

以无理数 $e = 2.7182818 \dots$ 为底的对数函数 $y = \log_e x$ 叫作自然对数函数, 简记作 $y = \ln x$ 。

例 1-15 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是()。

- A. $[1, +\infty)$ B. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ D. $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$

解: $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \geq 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1, 0 < 3x-2 \leq 1, \frac{2}{3} < x \leq 1$

答案: D。

1.3.5 三角函数

1. 任意角

角是一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形, 其中, 顶点、始边、终边称为角的三要素。角可以是任意大小的。角按其旋转方向可分为正角、零角、负角。在直角坐标系中: ①角的顶点在原点, 角的始边在 x 轴的非负半轴上, 角的终边在第几象限, 就说这个角是第几象限的角。②若角的终边在坐标轴上, 就说这个角不属于任何象限, 它叫象限界角。与 α 角终边相同的角的集合为 $\{\beta | \beta = k \times 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$ 。

例 1-16 下列命题中正确的是_____。

- (1) 弧度角与实数之间建立了一一对应的关系 (2) 终边相同的角必相等
(3) 锐角必是第一象限角 (4) 小于 90° 的角是锐角
(5) 第二象限的角必大于第一象限的角