第3章 拉普拉斯变换与传递函数

3.1 线性微分方程

我们在第2章中建立了多种系统的线性微分方程,要了解各系统在确定的输入函数下的输出函数,就需要解微分方程。本节简要介绍线性微分方程解的性质和解法。在经典控制中很少直接去解微分方程,主要需要了解微分方程的解的性质。

正规形 n 阶线性微分方程可写为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=q(x) \tag{3-1}$$

初始条件可写为

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{3-2}$$

定理3-1(解的存在唯一性定理) 设 n 阶线性微分方程(3-1)中的 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $q(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,则对任意给定的 $x_0\in[a,b]$及 $y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$,初值问题(3-1)、(3-2)存在唯一的定义在整个区间$[a,b]$上的解。

若方程(3-1)中 $q(x)\equiv 0$,则微分方程变为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \tag{3-3}$$

称方程(3-3)为 n 阶线性齐次微分方程。

若方程(3-1)中 $q(x)$不恒为0,则称方程为 n 阶线性非齐次微分方程。

3.1.1 线性齐次微分方程的一般理论

1. 叠加原理

如果 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$是齐次微分方程(3-3)的 m 个解,则它们的线性组合

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_my_m(x) \tag{3-4}$$

也是方程的解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 是任意常数。

2. 线性齐次微分方程解的线性相关性

设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是定义在区间 I 上的一个函数组,如果存在一组不全为零的常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得对所有的 $x\in I$,都有

$$a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\cdots+a_ny_n(x)\equiv 0 \tag{3-5}$$

则称此函数组在区间 I 上线性相关;否则称此函数组在区间 I 上线性无关。

3. 线性齐次微分方程解的结构

定理 3-2　n 阶线性齐次微分方程(3-3)一定存在 n 个线性无关解。

定理 3-3(通解结构定理)　设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是齐次微分方程(3-3)的 n 个线性无关解,则

(1) 线性组合

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \tag{3-6}$$

是微分方程的通解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数。

(2) 微分方程(3-3)的任一解 $y(x)$ 均可表示为解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 的线性组合。

3.1.2　常系数线性齐次微分方程的解

对微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{3-7}$$

若其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实常数,则称之为 n 阶常系数线性齐次微分方程。

1. 复值函数与复值解

设 $z(x)=\varphi(x)+\mathrm{i}\psi(x)$,其中 x 是实变量,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位,$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是区间 I 上的实值函数,称 $z(x)$ 为区间 I 上的复值函数。如果实函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 I 上是可微的,则称 $z(x)$ 在区间 I 上是可微的,且规定其导数为

$$z'(x)=\varphi'(x)+\mathrm{i}\psi'(x) \tag{3-8}$$

对于 $z(x)$ 的高阶导数也作类似的定义。

设 $k=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是任一复数,其中 α、β 是实数。设 x 为实变量,定义复指数函数为

$$\mathrm{e}^{kx}=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x) \tag{3-9}$$

如果实变量的复值函数 $y=z(x)(x\in I)$ 满足齐次微分方程(3-3),则称 $y=z(x)$ 是其复值解。

定理 3-4　若 $z(x)=\varphi(x)+\mathrm{i}\psi(x)$ 是齐次微分方程(3-3)的复值解,则当 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实值函数时,$z(x)$ 的实部 $\varphi(x)$ 和虚部 $\psi(x)$ 都是齐次微分方程(3-3)的解。

2. 待定指数法解常系数线性齐次微分方程

常系数线性齐次微分方程(3-7)的左侧为函数 $y(x)$ 各阶导数的线性组合,方程右侧为 0,故可设方程的解具有指数函数形式:

$$y=\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{3-10}$$

其中 λ 为待定常数,可以是实数,也可以是复数。将 $y'=\lambda\mathrm{e}^{\lambda x},y''=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x},\cdots,y^{(n)}=\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}$,代入微分方程,有

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)=0 \tag{3-11}$$

因为 $\mathrm{e}^{\lambda x}\neq0$,所以当且仅当 λ 是一元 n 次方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{3-12}$$

的根,$y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是微分方程(3-7)的解。

称方程(3-12)为微分方程(3-7)的**特征方程**,称它的根为微分方程的**特征根**,称特征方

程等号左边的 λ 的多项式为**特征多项式**。

1）特征根是单根的情形

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程(3-12)的 n 个互不相同的根，则微分方程(3-7)相应地有如下 n 个解：

$$y_1 = e_1^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x} \tag{3-13}$$

由于这 n 个解线性无关，所以它们构成微分方程的一个基本解组。如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数，则解组(3-13)为实值基本解组。如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有复数，则因为特征方程的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数，复数根必然以共轭形式成对出现。

设 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\lambda_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 是特征方程的一对共轭复根，则微分方程(3-7)有一对共轭复值解

$$\begin{cases} y_1 = e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\cdot\sin\beta x) \\ y_2 = e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - \mathrm{i}\cdot\sin\beta x) \end{cases} \tag{3-14}$$

根据前文关于复值解的定理 3-4，y_1 和 y_2 的实部和虚部都是微分方程(3-7)的解。显然这两个实值解线性无关。因此，相应于一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 的一对共轭复值解 y_1 和 y_2 可以换成一对线性无关的实值解

$$\begin{cases} y_1^* = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2^* = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases} \tag{3-15}$$

所以在特征方程有复根的情况下仍可得到微分方程的一个实值基本解组。

2）特征根是重根的情形

设 $\lambda=\lambda_1$ 是特征方程(3-12)的 k_1 重根，则它们对应微分方程(3-7)的 k_1 个解：

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \tag{3-16}$$

如果特征方程还有其他重根，则其对应的微分方程的解类似于(3-16)。如果存在复数重根，则可作类似于复数单根情形的处理，把复值解替换为实值解。

总之，形如式(3-13)和式(3-16)的 n 个解构成常系数线性齐次微分方程的一个基本解组。

3.1.3 高阶线性非齐次微分方程的解

1. 解的性质

非齐次微分方程(3-1)和它对应的齐次微分方程(3-3)的解有如下性质：

(1) 若 $\tilde{y}_1(x),\tilde{y}_2(x)$ 均为非齐次方程(3-1)的解，则 $\tilde{y}_1(x)-\tilde{y}_2(x)$ 为齐次方程(3-3)的解；

(2) 若 $y_1(x)$ 为齐次方程(3-3)的解，$\tilde{y}(x)$ 为非齐次方程(3-1)的解，则 $y_1(x)+\tilde{y}(x)$ 为非齐次方程(3-1)的解；

(3) 叠加原理：若 $\tilde{y}_i(x)$ 为方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q_i(x), \quad i=1,2,\cdots,m$$

的解，则 $\sum_{i=1}^{m} c_i\tilde{y}_i(x)$ 为方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=\sum_{i=1}^{m}c_iq_i(x),\quad i=1,2,\cdots,m$$

的解，其中 $c_i(i=1,2,\cdots,m)$为任意常数。

2．通解结构定理

设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是齐次微分方程(3-2)的一个基本解组，$\tilde{y}(x)$是非齐次微分方程(3-1)的一个特解，则：

(1) 齐次微分方程的通解与非齐次微分方程的特解之和

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)+\tilde{y}(x)\tag{3-17}$$

是非齐次微分方程(3-1)的通解，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数；

(2) 非齐次微分方程(3-1)的任一解均可由式(3-17)表示。

3．几种线性非齐次微分方程的特解

求线性非齐次微分方程的特解一般可用常数变易法。常数变易法计算过程烦琐，而且往往有积分运算的困难。以下给出几种特殊 $q(x)$对应的特解形式。

1) $q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$

若 0 不是特征根，则特解形式为

$$\tilde{y}=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m\tag{3-18}$$

若 0 是 k 重特征根，则特解形式为

$$\tilde{y}=x^k(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m)\tag{3-19}$$

2) $q(x)=(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m)e^{\alpha x}$

若 α 不是特征根，则特解形式为

$$\tilde{y}=(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\alpha x}\tag{3-20}$$

若 α 是 k 重特征根，则特解形式为

$$\tilde{y}=x^k(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\alpha x}\tag{3-21}$$

3) $q(x)=[A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$

若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，则特解形式为

$$\tilde{y}=[P_m(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}\tag{3-22}$$

若 $\alpha\pm i\beta$ 是 k 重特征根，则特解形式为

$$\tilde{y}=x^k[P_m(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}\tag{3-23}$$

其中

$$\begin{cases}P_m(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m\\R_m(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m\end{cases}\tag{3-24}$$

例 3-1　求解二阶常系数线性微分方程 $x''+2x'+2x=t$，初始条件为 $x(0)=0,x'(0)=0$。

解：此方程对应的齐次微分方程为

$$x''+2x'+2x=0$$

齐次微分方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

特征根为

$$\lambda=-1\pm i$$

特征根对应的共轭复值解为

$$\begin{cases} x_{c1} = e^{-t} e^{it} = e^{-t}(\cos t + i\sin t) \\ x_{c2} = e^{-t} e^{-it} = e^{-t}(\cos t - i\sin t) \end{cases}$$

实值解则为

$$\begin{cases} x_{r1} = e^{-t} \cos t \\ x_{r2} = e^{-t} \sin t \end{cases}$$

齐次方程的通解可写为

$$\bar{x} = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

设非齐次方程的特解为

$$\tilde{x} = B_0 t + B_1$$

则

$$\tilde{x}' = B_0, \quad \tilde{x}'' = 0$$

把特解及其导数代入原方程，有

$$2B_0 + 2B_0 t + 2B_1 = t$$

可解得

$$B_0 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = -\frac{1}{2}$$

因此原方程的通解为

$$x = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{1}{2}(t - 1)$$

对通解求 1 次导数，把初始条件 $x(0)=0$，$x'(0)=0$ 代入，可解得

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = 0$$

故原方程在给定的初始条件下的解为

$$x = \frac{1}{2}(e^{-t} \cos t + t - 1)$$

3.2 拉普拉斯变换

控制环节的数学模型一般是以其微分方程表示的，控制环节的动态特性体现于微分方程的解。然而即使是对常系数线性微分方程，求其齐次方程的通解、非齐次方程的特解以及确定符合初始条件的常系数的过程也是比较繁复的。而拉普拉斯变换可以作为一种求解线性定常微分方程的工具。

3.2.1 拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换是一种积分变换，另一种与拉普拉斯变换有关系的积分变换是傅里叶(Fourier)变换。傅里叶变换可由傅里叶级数引出。

一个以 T 为周期的函数 $x_T(t)$，如果在$[-T/2, T/2]$上满足狄利克雷(Dirichlet)条件(函数连续或只有有限个第一类间断点，即在间断点处函数的左、右极限都存在；且只有有

限个极值点)，则可以展成傅里叶级数

$$x_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_T(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}\tag{3-25}$$

其中 $\omega_n=2n\pi/T(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为角频率。

一个非周期函数 $x(t)$可以看成是某个周期函数 $x_T(t)$当 $T\to+\infty$时转化而来的，则频率间隔 $\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=2\pi/T\to0$，应用式(3-25)，有

$$x(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_T(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}\Delta\omega_n\tag{3-26}$$

上式可改写为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\tag{3-27}$$

式(3-27)即函数 $x(t)$的傅里叶积分公式，但前提是满足充分条件：$x(t)$在$(-\infty,+\infty)$上任一有限区间上满足狄利克雷条件；$x(t)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积$\left(\text{即积分}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\mathrm{d}t\right.$ 收敛$\left.\right)$。令

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\tag{3-28}$$

$X(\omega)$即为 $x(t)$的傅里叶变换式。

绝对可积的条件是比较强的，很多简单的函数(如正弦函数)都不满足这个条件。另外傅里叶变换要求函数在包括负数的整个数轴上有定义，但在控制上一段把当前时刻作为时间原点，$t<0$ 时的函数值是无意义或不需要考虑的。因此傅里叶变换的应用范围很受限制。

定义**单位阶跃函数**为

$$u(t)=\begin{cases}0,t<0\\1,t>0\end{cases}\tag{3-29}$$

其图形如图 3-1 所示。

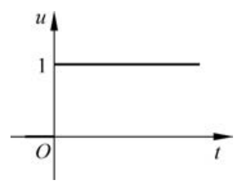

图 3-1　单位阶跃函数

以时间为自变量的任一函数 $\varphi(t)$，乘以单位阶跃函数 $u(t)$，则作傅里叶变换的时间区间可以由$(-\infty,+\infty)$换成$[0,+\infty)$。如果$\varphi(t)$不绝对可积，那么它乘以指数衰减函数 $\mathrm{e}^{-\sigma t}(\sigma>0)$后则可能变得绝对可积。对函数 $\varphi(t)u(t)e^{-\sigma t}(\sigma>0)$进行傅里叶变换，得

$$\Phi_\sigma(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

其中 $x(t)=\varphi(t)u(t)$，$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$。

定义 3-1　设函数 $x(t)$，当 $t\geqslant0$ 时有定义，且积分 $\int_0^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ (s 为一个复参量)在 s 的某一域内收敛，则由此积分所确定的函数可写为

$$X(s)=\int_0^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\tag{3-30}$$

称式(3-30)为函数 $x(t)$的拉普拉斯(Laplace)变换式，记为

$$X(s)=L[x(t)]\tag{3-31}$$

称 $X(s)$为 $x(t)$的**拉普拉斯变换**，或像函数；称 $x(t)$为 $X(s)$的拉普拉斯逆变换，或像原函

数，记为

$$x(t)=L^{-1}[X(s)] \tag{3-32}$$

定理 3-5（拉普拉斯变换的存在定理） 若函数 $x(t)$满足下列条件：

（1）在 $t\geqslant 0$ 的任一有限区间内分段连续；

（2）当 $t\to+\infty$时，$x(t)$的增长速度不超过某一指数函数，即存在常数 $M>0$ 及 $c\geqslant 0$，使得在 $0\leqslant t<+\infty$范围内$|x(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{ct}$ 成立（满足此条件的函数，称它的增长是不超过指数级的）。则 $x(t)$的拉普拉斯变换在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上存在。

拉普拉斯变换有其发展历史，法国数学家、天文学家皮埃尔-西蒙·拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749—1827）在 19 世纪初期将其进行了严格化定义。

3.2.2 常用函数及其拉普拉斯变换

在控制系统的分析中经常用到几种函数，以下分别介绍并对其作拉普拉斯变换。由拉普拉斯变换的定义可知，这些函数在 $t<0$ 部分的定义与其拉普拉斯变换无关，因此可不特别声明 $t<0$ 时的定义，或默认 $t<0$ 时函数值为 0。

1. 阶跃函数

式(3-29)为单位阶跃函数，“单位”是指 $t>0$ 后函数值为 1。阶跃函数常用来表示从某时刻起作用于系统的恒定的量。它的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} L[u(t)] &= \int_0^{+\infty} u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s)>0 \end{aligned} \tag{3-33}$$

其中 $\mathrm{Re}(s)>0$ 为积分的收敛域。

2. 指数函数

自然指数函数 $x(t)=\mathrm{e}^{at}$，其中 a 为复常数。常系数线性微分方程的解一般包含自然指数函数。它的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} L[\mathrm{e}^{at}] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{(a-s)t}}{s-a}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}, \quad \mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(a) \end{aligned} \tag{3-34}$$

3. 斜坡函数

斜坡函数为

$$x(t)=at \tag{3-35}$$

其中 a 为实常数。若 $a=1$，则称之为“单位斜坡函数”。斜坡函数常用来表示以恒定速度变化的量，比如一个直线位移工作台以恒定速度运动时，它的位移为斜坡函数。

单位斜坡函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} L[at] &= \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}t\mathrm{e}^{-st}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right)\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathrm{Re}(s)>0 \end{aligned} \tag{3-36}$$

4. 正弦和余弦函数

对正弦函数

$$x(t)=\sin\omega t \tag{3-37}$$

由欧拉公式 $e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$，有

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$$

利用式(3-34)，得

$$L[\sin(t)]=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{3-38}$$

对余弦函数 $x(t)=\cos\omega t$，有

$$L[\cos(t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{3-39}$$

5. 单位脉冲函数

为了描述瞬间或空间几何点上的物理量，如瞬时的冲击力、脉冲电流和质点的质量分布，英国物理学家狄拉克(Paul Adrien Maurice Dirac)在 20 世纪 20 年代提出一种“δ 函数”。在工程上可将它定义为

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0, t>\varepsilon\end{cases}$$

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}+\infty, t=0\\ 0, t\neq0\end{cases} \tag{3-40}$$

脉冲持续的时间趋于 0，幅值趋于无穷大，但面积保持为 1，如图 3-2 所示。单位脉冲函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}L[\delta(t)]&=\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{\varepsilon}\left(\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-st}\,dt\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^{\varepsilon}\right)=\frac{1}{s}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon}=1\end{aligned} \tag{3-41}$$

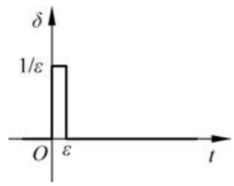

图 3-2　单位脉冲函数

以上推导各种函数的拉普拉斯变换时，都指出了积分的收敛域。那么在收敛域外，这些拉普拉斯变换式是否还有效？在数学上可以用解析延拓的方法扩大函数的定义域，从而令拉普拉斯变换式的定义域延拓到整个复平面上。因此以下不再考虑拉普拉斯变换的收敛域。

对比较简单和常用的函数，已经建立了拉普拉斯变换表，可以查表直接得到其像函数，或由像函数查到像原函数。本书附录中给出了常用函数的拉普拉斯变换表。

3.2.3　拉普拉斯变换的性质

1. 线性性质

若 α、β 为常数，$L[x_1(t)]=X_1(s)$，$L[x_2(t)]=X_2(s)$，则有

$$L[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha X_1(s)+\beta X_2(s) \tag{3-42}$$

2. 微分性质

若 $L[x(t)]=X(s)$，则有

$$L[x'(t)]=sX(s)-x(0) \tag{3-43}$$

证明：根据拉普拉斯变换的定义，有

$$L[x'(t)]=\int_0^{+\infty}x'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

对右端积分用分部积分法，可得

$$\int_0^{+\infty}x'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=x(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=sL[x(t)]-x(0)$$

所以

$$L[x'(t)]=sX(s)-x(0) \tag{3-44}$$

对于 $x(t)$的高阶导数的拉普拉斯变换，有

$$L[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x'(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0) \tag{3-45}$$

如果初值 $x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-1)}(0)=0$，则有

$$L[x^{(n)}(t)]=s^nX(s) \tag{3-46}$$

3. 积分性质

若 $L[x(t)]=X(s)$，则

$$L\left[\int_0^t x(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}X(s) \tag{3-47}$$

证明：设

$$h(t)=\int_0^t x(t)\mathrm{d}t$$

则有 $h'(t)=x(t)$，且 $h(0)=0$。由拉普拉斯变换的微分的性质，有

$$L[h'(t)]=sL[h(t)]-h(0)=sL[h(t)]$$

即

$$L\left[\int_0^t x(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}L[x(t)]=\frac{1}{s}X(s)$$

显然，$x(t)$对时间的 n 重积分的拉普拉斯变换为 $X(s)/s^n$。

4. 位移性质

若 $L[x(t)]=X(s)$，则有

$$L[\mathrm{e}^{at}x(t)]=X(s-a) \tag{3-48}$$

证明：

$$L[\mathrm{e}^{at}x(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t$$

可以看出上式右边只是在 $X(s)$中把 s 换成 $s-a$，所以 $L[\mathrm{e}^{at}x(t)]=X(s-a)$。

5. 延迟性质

若 $L[x(t)]=X(s)$，且 $t<0$ 时 $x(t)=0$，则对于任一非负实数 τ，有

$$L[x(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}X(s) \tag{3-49}$$

证明：

$$L[x(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}x(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\tau}x(t-\tau)e^{-st}dt+\int_{\tau}^{+\infty}x(t-\tau)e^{-st}dt$$

当 $t<\tau$ 时，$x(t-\tau)=0$，因此右端第一个积分为 0。对于第二个积分，令 $u=t-\tau$，则

$$L[x(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}x(u)e^{-s(u+\tau)}du=e^{-s\tau}\int_0^{+\infty}x(u)e^{-su}du=e^{-s\tau}X(s)$$

时间延迟后的函数图形可参考图 2-8。

6. 终值定理

若 $L[x(t)]=X(s)$，且 $sX(s)$的所有奇点（使分母为 0 的 s 的值）全在 s 平面的左半部，则

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s) \tag{3-50}$$

证明：根据拉普拉斯变换的微分的性质

$$L[x'(t)]=sX(s)-x(0)$$

两边取 $s\to 0$ 的极限，得

$$\lim_{s\to 0}L[x'(t)]=\lim_{s\to 0}[sX(s)-x(0)]=\lim_{s\to 0}sX(s)-x(0)$$

根据拉普拉斯变换的定义，有

$$\lim_{s\to 0}L[x'(t)]=\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty}x'(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\lim_{s\to 0}e^{-st}x'(t)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}x'(t)dt=x(t)\Big|_0^{+\infty}=\lim_{t\to\infty}x(t)-x(0)$$

故

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x(+\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)$$

定理要求 $sX(s)$的所有奇点都在 s 平面的左半部是为了保证$x(t)$存在收敛的终值。终值定理的应用意义在于：只要有 $X(s)$，即使不求出 $x(t)$也可以获得它的终值。

7. 初值定理

不作证明地给出：若 $L[x(t)]=X(s)$，且$\lim\limits_{s\to 0}sX(s)$存在，则

$$\lim_{t\to 0}x(t)=\lim_{s\to+\infty}sX(s) \tag{3-51}$$

3.2.4　拉普拉斯逆变换

已知像函数 $X(s)$，求像原函数 $x(t)$的一般公式为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}X(s)e^{st}ds,\quad t>0 \tag{3-52}$$

其中 $s=\beta+j\omega$。

实际求拉普拉斯逆变换时很少直接使用这一公式。一般来说，实际遇到的像函数 $X(s)$是关于 s 的有理分式，即

$$X(s)=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_{m-1}s+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}=\frac{P(s)}{Q(s)} \tag{3-53}$$