

第 1 章 数列

1.1 数列简史

1.1.1 古巴比伦与古埃及关于数列的研究

数列与级数(数列的和)是密不可分的,其历史可以追溯到古巴比伦时代,其中等差数列和等比数列是数学史上最早出现的两类数列。等比数列比等差数列出现得更早。大约公元前 3000 年,巴比伦人就已经总结出等比数列 $1, 2, 2^2, \dots, 2^9$ 的求和公式:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1。$$

据说古埃及国王拉阿乌斯有位能干的文书阿默斯,他用象形文字写了一部《算书》,记录了公元前 2000—前 1700 年间数学研究的一些成果。书中记录了这样一道题,题中画了一个阶梯,其各级阶梯上的数依次为 7, 49, 343, 2401, 16807, 在数字的旁边依次画了房屋、猫、老鼠、麦穗和量器(见图 1.1)。原书并未作出任何注解,这道题成了数学史上的难解之谜,2000 多年过去了,竟无一人能解释。

1	2801	房屋	7
2	5602	猫	49
4	11204	老鼠	343
	<u>19607</u>	麦穗	2401
		量器	16807
		总数	19607

图 1.1

意大利数学家斐波那契于 1202 年发表了《算盘全书》，书中有这样一道题：

今有七老妇人同往罗马，每人有七骡，每骡负七袋，每袋盛有七个面包，每个面包有七小刀随之，每小刀配有七鞘，问列举之物全数共有几何？

与阿斯默的问题相比，这道题要容易理解得多，很容易看出这是一个等比数列求和问题，这道题似乎解开了阿默斯之谜，其意思是：今有 7 间房屋，每间房屋有 7 只猫，每只猫食 7 只老鼠，每只老鼠食 7 棵麦穗，每棵麦穗可长成大麦 7 量器，由此所得各物全数之和如何？

约公元前 1650 年的纸草上，记载有这样两个等差数列问题：

1. 五人按等差数列分 100 片面包，最少的两份之和是另外 3 份的 $1/7$ 。

这道题的意思是：已知等差数列的项数 n ，和 S_n 以及 $a_1 + a_2 = \frac{1}{7}(a_3 + a_4 + a_5)$ ，求各项。纸草上所给答案是 $1\frac{2}{3}, 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$ 。

2. 10 人分 10 斗玉米，从第二人开始，各人所得依次比前一人少 $1/8$ 。

显然这也是个等差数列问题，纸草上给出的解法是：取 10 人所得的平均值 1，从 10 中减去 1，得 9。取差数的一半 $\frac{1}{16}$ ，再乘以 9，得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ 。加平均值 1，然后依次从各份中减去差数 $\frac{1}{8}$ ，直到最后一份。于是得到 10 份依次为： $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{16}, \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ 。

读者或许觉得有些奇怪，缘何如此麻烦地弄成若干个分数之和？这里需要说明，古埃及人习惯于使用分子为 1 的分数（称为单分数），只有一个分数除外，这就是 $\frac{2}{3}$ 。上面的问题相当于已知等差数列的项数 $n=10$ ，和

S_n ，公差 $d = -\frac{1}{8}$ ，求通项。纸草书的解法具有一般性，用现在的记号表

示即

$$a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1) \frac{d}{2}.$$

据说高斯在 5 岁的时候便已经懂得如何计算 1~100 的连续自然数之和。高斯将这 100 个数分为 50 组,第一个数与最后一个数分到一组,第二个数与倒数第二个数分到一组,第三个数与倒数第三个数分到一组,以此类推,每组数的和都等于 101,恰好有 50 个 101,故总和等于 5050。高斯的算法将加法问题转化为乘法运算,迅速、准确地得到了结果。

1.1.2 中国古代关于数列的研究

我国古代也有数学家研究过等比数列与等差数列,例如《庄子·天下篇》中说:“一尺之棰,日取其半,万世不竭。”按照这个方法可以得到一个等比数列。晋初(公元 4 世纪)《孙子算经》中有一道题,谓之“出门望九堤”:“今有出门重九堤,堤有九木,木有九枝,枝有九巢,巢有九禽,禽有九雏,雏有九毛,毛有九色,问各几何?”显然,这也是个等比数列。

古代有关等差数列和等比数列的内容十分丰富,见诸各种文物或文献中。《周髀算经》将日行轨道按季节不同分成七个同心圆,称为“七衡图”。已知内衡直径 $a_1 = 238\,000$ 里^①,两衡间距为 $\frac{d}{2} = 19\,833\frac{1}{3}$ 万里,则其余各衡的直径依次为

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_1 + 2d, \\ &\vdots \\ a_7 &= a_1 + 6d. \end{aligned}$$

从中可归纳出一般等差数列的通项公式。

利用梯形面积公式便于记忆等差数列前 n 项的求和公式,通过图形的

① 1 里=500 米。

割与补两种方法对应着等差数列前 n 项和的两个公式(见图 1.2)。

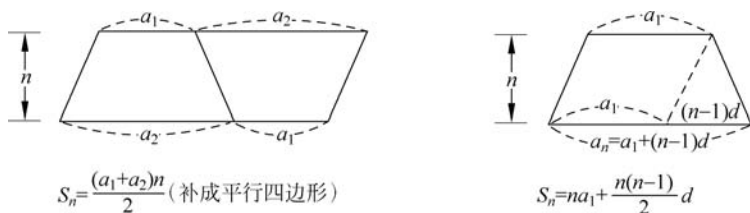


图 1.2

东汉时期的《九章算术》中也有不少涉及等差数列与等比数列的问题，该书第 4 题说道：“今有女子善织，日增五尺，五日织五丈，问日织几何？”用现代数学的语言叙述便是：已知等差数列的公差为 $d=0.5$ ，项数为 $n=5$ ，前 n 项和为 $S_n=5$ ，通项是什么？

《孙子算经》对数列也有涉及，其中有一道题说：“今有方物一束，外周一匝三十二枚，问积几何？”这是一道等差数列求和问题。南北朝(公元 5 世纪)时期的《张邱建算经》中有三道等差数列题，分别关于求公差、总和及项数：“今有女子善织，日益功疾，初日织五尺，今一月织九丈三尺，问日益几何？”“今有女子不善织，日益功迟，初日织五尺，末日织一尺，今三十日织纆，问织几何？”“今有与人钱，初一人与三钱，次一人与四钱，次一人与五钱，以次与之转多一钱，与纆还敛聚与均分之人得一百钱，问人几何？”《张邱建算经》中还给出了等差数列求和公式：

$$S_n = \frac{1}{2}(a + l)n$$

和求公差公式：

$$d = \frac{1}{n-1} \left(\frac{2S_n}{n} - 2a \right)。$$

公元 8 世纪，唐代数学家僧一行又给出了另一种形式的求和公式：

$$S_n = n \left(a + \frac{n-1}{2}d \right)。$$

宋代很多数学家运用等差数列研究“堆垛”问题，沈括在其著作《梦溪笔谈》中提出酒店里将酒瓶层层堆积，底层排成长方阵，往上依次逐层长、

宽各减少一个,共堆 n 层,堆成长方台的形状。这个问题无法运用长方台体积公式计算,沈括给出了一个正确的计算方法,称为“隙积术”。他的工作激发了此后两三百年中人们对堆垛问题的研究热情。南宋数学家杨辉在其著作《详解九章算术》及《算法通变本末》中丰富并发展了沈括的“隙积术”,得到了诸如

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

及方垛等求和公式。

13 世纪末,元代数学家朱世杰所著《四元玉鉴》被美国科学家萨顿 (G. Sarton) 誉为“中国数学著作中最重要的一部,同时也是中世纪最杰出的数学著作之一。”这本书对堆垛问题使用了更复杂的称为“招差术”的解法,给出了一系列重要公式,比欧洲同类工作早数百年。19 世纪的清代数学家李善兰继承并推广了朱世杰的三角垛求和方法与公式,研究了更复杂的垛积形状,得到了一系列重要公式。李善兰的《垛积比类》是关于级数与组合问题的重要著作,这本著作中有一个著名的“三角自乘垛”求和公式,国际上称为“李善兰恒等式”。由此可见,我国古人在数列与级数方面的研究堪与当时的欧洲数学家比肩。

1.1.3 数列的部分和与无穷级数

从前面关于数列的研究可以看出,研究数列的目的通常是为了求数列的和,尤其是有无穷多项的数列的和,即无穷级数。换个角度看,数列与级数是等价的,数列的和称为级数。反之,如果记 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ (称之为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和), 则 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 即数列前 n 项和与前 $n-1$ 项和的差即为数列的通项(也叫级数的通项)。早期出现的无穷级数是公比小于 1 的几何级数,也就是公比小于 1 的等比数列的和。古希腊时期的亚里士多

德(Aristoteles, 前 384—前 322)便已意识到这种级数是可求和的。中世纪后期,无穷级数常被数学家们用来计算变速运动的物体所走过的路程。那时甚至研究过更复杂的级数,例如奥雷姆(Nicole Oresmo)在其《欧几里得几何问题》(1360 年)中研究了调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

并证明这个级数是发散的。他所使用的方法正是现在所用的,即采用级数比较的方法。他用下面的级数从下方控制调和级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots。$$

可以看出,上面的级数中括号内每一项的和都是 $\frac{1}{2}$,可见它是发散的,进而比它大的调和级数也发散。对于学习过简单级数理论的人来说,对这个问题并不陌生。但那时候的数学家们对于级数的认识并不透彻,他们还没有识别级数收敛与发散的一般方法。

韦达也研究过无穷级数,他在《各种各样的解答》(1593 年)中给出了一个无穷几何级数的求和公式。记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,韦达利用《几何原本》中的公式

$$\frac{S_n - a_n}{S_n - a_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

得到

$$S_n = \frac{\frac{a_1^2}{a_2} - a_n}{\frac{a_1}{a_2} - 1}。$$

如果 $\frac{a_1}{a_2} > 1$,则通项 a_n 随着 n 增大趋于 0,于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2}。$$

古希腊有一个名叫阿吉里斯的英雄,它很善跑,芝诺悖论之一说的就

是这个英雄与乌龟赛跑的故事：“在与乌龟的竞赛中，阿吉里斯的速度是乌龟的 10 倍，乌龟在前面 100 米处起跑，阿吉里斯在后面追，但他不可能追上乌龟。因为在竞赛中，追者首先必须到达被追者的出发点，当阿吉里斯追到 100 米时，乌龟已经又向前爬了 10 米，于是，一个新的起点产生了。阿吉里斯必须继续追，而当他追到乌龟爬的这 10 米时，乌龟又已经向前爬了 1 米，阿吉里斯只能再追向那个 1 米。就这样，乌龟会制造出无穷个起点，它总能在起点与自己之间制造出一个距离，不管这个距离有多小，但只要乌龟不停地奋力向前爬，阿吉里斯就永远也追不上乌龟。”

阿吉里斯当然不可能追不上乌龟，但如何解释这一悖论？17 世纪中叶，格雷戈里在他的《几何著作》中利用无穷级数的求和问题解决了阿吉里斯的追龟问题。级数收敛（和是有限的）说明阿吉里斯可以在一个确定的时间与地点追上乌龟。格雷戈里第一次明确了收敛的无穷级数表示一个数，即级数的和，他称这个数为级数的极限。他说：“过程的结束就是级数的终点，即使延伸到无穷，过程也永远达不到这个终点，但是它能够趋向于它并接近到任何给定的程度”（见文献[1] p57）。

1.1.4 正项级数的收敛问题

伯努利兄弟在级数方面做了不少工作，詹姆斯·伯努利 (James Bernoulli) 关于级数求和的方法在当时是很重要的。为了证明调和级数是发散的，他考虑这样的项：

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

这个和有 $n^2 - n$ 项，故

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n) \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n},$$

可见

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

将级数按照这种方式分成若干组,使得每一组的和大于 1,所以级数是发散的。他的弟弟约翰·伯努利(Johann Bernoulli)给出了调和级数发散的另一种证明方法。首先将调和级数变形为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{3}{3 \times 4} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots \right) + \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots \right) + \\ &\quad \left(\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots \right) + \left(\frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots \right) + \cdots. \end{aligned}$$

括号中的和依次为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$, 于是

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots.$$

如果级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ 收敛到一个有限的数,不妨记极限为 S ,则有 $S = 1 + S$,这是不可能的,所以级数发散。

18 世纪关于级数的研究多少有些随意,例如拉格朗日在早期的研究中并没有注意到级数的收敛与发散的区分,即使到了 18 世纪末,他在研究泰勒级数时也没有考虑收敛性问题。一些数学家并没有意识到如今看来并不收敛的级数(例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$)的存在性,事实上,那个时候大家并未对级数的收敛与发散给予足够的关注。直到 19 世纪,人们才开始注意到这个问题。对收敛性的第一个严格证明是高斯在 1812 年的论文《无穷级数的一般研究》中给出的。柯西给出了正项级数一些特殊的收敛性判别法,他指出,收敛级数的通项必须趋于零。他也给出了比值判别法与根值判别法,不过那时还没有上下极限的概念,柯西证明了如果根值极限中的最大值小于 1,则级数收敛,如果大于 1,则级数发散。这两个判别法的基础是比较判别法,即如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的通项满足

$$a_n \leq b_n,$$



则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散;当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。比较判别法的证明几乎是平凡的。根值判别法与比值判别法用今天的语言表述即为下面的结论。

定理 1(根值判别法) 如果 $a_n \geq 0$,则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数。记

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}。$$

则:

- (1) 若 $\rho < 1$, 则级数收敛;
- (2) 若 $\rho > 1$, 则级数发散。

定理 2(比值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,记

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}。$$

则:

- (1) 若 $\rho < 1$, 则级数收敛;
- (2) 若 $\rho > 1$, 则级数发散。

上述两个定理的证明并不困难,将级数分别用那两个极限值为公比的等比级数控制就可以了。

1.1.5 一般数项级数的收敛问题

所谓一般数项级数指的是级数的通项不一定为正,最典型的级数便是交错项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 。这些级数通常是在研究函数项级数时出现的,例如函数 $\frac{1}{1-x}$ 有展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

当 $x = -1$ 时便有

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots.$$

正是这个展式愚弄了傅里叶, 他以为这个交错级数的和就是 $\frac{1}{2}$ 。

柯西给出了一般数项级数收敛性的判别原理, 即今天大家熟知的柯西原理。如前所述, 数列与级数是可以相互转换的, 所以柯西原理既适用于数列也适用于级数。

定理 3(柯西原理) 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当

$$|a_n - a_m| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)。$$

如果记 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 则级数形式的柯西原理可以叙述为如下形式。

定理 4(柯西原理) 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛当且仅当

$$|S_n - S_m| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)。$$

数列只是函数序列的特例, 同样, 数项级数也是函数项级数的特例。很多数项级数均来自对函数项级数的研究, 通过对函数项级数取特殊值得到数项级数。所以, 要系统了解数项级数, 就有必要了解函数项级数, 但这个问题已经远远超出了中学数学所涵盖的范围, 此处不作详论。

一般数项级数收敛性的判别是个很复杂的问题, 如果对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项取绝对值, 则得到正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, 所以一般数项级数的收敛性有两个概念: 条件收敛与绝对收敛。如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛的。如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛(即部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛到某个确定的数 S), 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是条件收敛的。

试图给出一般数项级数收敛性的判别法是徒劳的, 通常只能对一些具有特殊结构的级数给出收敛性的判定。例如对乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ 的收