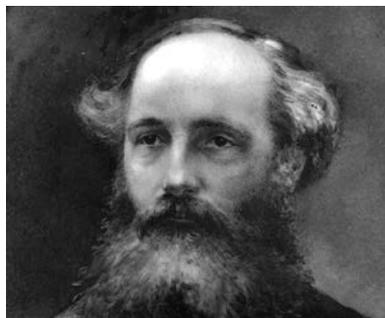


# 第一篇

## 积分篇

2004年,英国的科学期刊《物理世界》举办了一个活动:让读者选出科学史上最伟大的公式。结果,麦克斯韦方程组力压质能方程、欧拉公式、牛顿第二定律、勾股定理、薛定谔方程等“方程界”的巨擘,高居榜首。



麦克斯韦

麦克斯韦方程组以一种近乎完美的方式统一了电和磁,并预言光就是一种电磁波,这是物理学家在统一之路上的巨大进步。很多人都知道麦克斯韦方程组,知道它极尽优美,描述了经典电磁学的一切。但是,真正能看懂这个方程组的人却不多,因为它不像质能方程、勾股定理简单直观,等式两边的含义一眼便知。毕竟,它是用积分和微分的形式写的,而大部分人要到大学才正式学习微积分。

不过大家也不用担心,麦克斯韦方程组虽然在形式上略微复杂,但是它的物理内涵还是非常简单的。而且,微积分也不是特别抽象的数学内容,大家只要跟着长尾君的思路,相信看懂这个最伟大的方程组也不会是什么难事。

# 01

## 电磁统一之路

电和磁并没有什么明显的联系,科学家一开始也是独立研究电现象和磁现象的。这并不奇怪,谁能想到闪电和磁铁之间会有什么联系呢!

1820年,奥斯特在一次讲座上偶然发现通电的导线让旁边的小磁针偏转了一下,这个细微的现象并没有引起听众的注意,但却让奥斯特惊喜万分。他立即针对这个现象进行了3个月的实验和研究,最后发现了电流的磁效应,就是说电流也能像磁铁一样影响周围的小磁针。



电流的磁效应

消息一出,物理学家们集体炸锅,电流居然能产生磁效应,这也太不可思议了吧?于是,他们立即沿着这条路进行深入研究。怎么研究呢?奥斯特只是说电流周围会产生磁场,那这个电流在空间中产生的磁场是怎样分布的呢?比方说,一小段电流在空间某个地方产生的磁感应强度是多大呢?这种思路拓展是很自然的,定性地发现某个规律之后必然要试图定量地把它描述出来。这样我们不仅知道它,还可以精确地计算它,这才算完全了解。

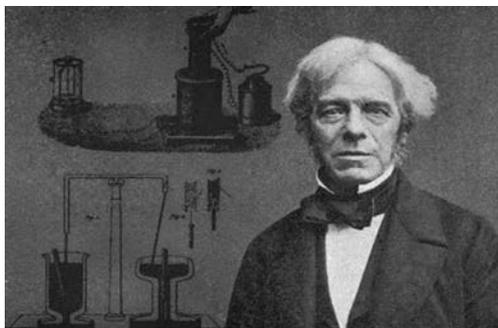
在奥斯特正式发表他的发现仅仅3个月之后,毕奥和萨伐尔在大佬拉普拉斯的帮助下就找到了电流在空间中产生磁场大小的定量规律,这就是著名的毕奥-萨伐尔定律。也就是说,有了毕奥-萨伐尔定律,我们就可以算出任意电流在空间中产生磁场的大小,但是这种方法在实际使用的时候会比较烦琐。

又过了两个月,安培发现了一个更实用、更简单的计算电流周围磁场的方式,这就是安培环路定理。而且,安培还总结了一个很实用的规律来帮助我们判断电流产生磁场的方向,这就是安培定则(也就是高中学的右手螺旋定则)。

至此,电生磁这一路的问题“似乎”基本解决了,我们知道电流会产生磁场,而且能够用安培环路定理(或者更加原始的毕奥-萨伐尔定律)计算这个磁场的大小,用安培定则判断磁场的方向。也就是说,我们现在知道怎么单独描述电和磁,也知道电怎么生磁。乘着对称的思想,我们会想:既然电能够生磁,那么磁能不能生电呢?

由于种种原因,奥斯特在1820年发现了电能生磁,人类直到11年后的1831年,才由天才实验物理学家法拉第发现了磁生电的规律,也就是电磁感应定律。法拉第发现磁能生电的关键就是:静止的磁并不能生电,变化的磁才能生电。

发现电磁感应定律之后,我们知道了磁如何生电,有了安培环



法拉第

路定理,我们又知道电流如何产生磁场。乍一看,有关电磁的东西我们好像都有解决方案了。其实不然,我们知道安培环路定理是从“奥斯特发现了电流周围会产生磁场”推出来的,所以,它只能处理电流周围表示磁场的情况。

但是,如果没有电流呢?如果根本就没有导线可以形成电流,如果仅仅是电场发生了变化,那这样能不能产生磁场呢?大家不要觉得这是胡搅蛮缠,你们想想,根据电磁感应定律,变化的磁场是可以产生电场的。所以,反过来猜想变化的电场能否产生磁场并不奇怪。而这,正好是安培环路定理缺失的部分。

于是,麦克斯韦就对安培环路定理进行了扩充,把变化的电场也能产生磁场这一项添加了进去,补齐了最后一块短板。

到这里,电和磁的统一之路就走得差不多了,麦克斯韦方程组的基本形式也呼之欲出。这里我先让大家考虑一下:我们都知道麦克斯韦方程组描述了经典电磁学的一切,而且它是由4个方程组成的。那么,如果让你选择4个方程来描述电磁里的一切,你大致会选择4个什么样的方程呢?

此处思考一分钟……

不知道大家是怎么考虑的,反正我觉得下面这条思路是很自然的: 如果要用 4 个方程描述电磁的一切,那么我就用第一个方程描述电,第二个方程描述磁,第三个方程描述磁如何生成电,第四个方程描述电如何生成磁。好巧,麦克斯韦方程组就是这样的。

所以,我们学习麦克斯韦方程组,就是要看看它是如何用 4 个方程优雅自如地描述电、磁、磁生电、电生磁这 4 种现象的。接下来我们就一个个地看。

在奥斯特发现电流的磁效应之前,人类已经单独对电研究了好长时间。人们发现电荷有正负两种,而且同性相斥,异性相吸。后来库仑发现了电荷之间相互作用的定量关系,他发现电荷之间的作用力跟距离的平方成反比。也就是说,如果我把两个电荷之间的距离扩大为原来的两倍,那么这两个电荷之间的作用力就会减少为原来的  $1/4$ ,扩大为 3 倍就减少为原来的  $1/9$ 。

这个跟引力的效果是一样的,引力也是距离扩大为原来的两倍,引力的大小减少为原来的  $1/4$ 。为什么大自然这么偏爱“平方反比”规律呢?因为我们生活在一个各向同性的三维空间里。

这是什么意思?我们可以想想:假设现在有一个点源开始向四面八方传播,因为它携带的能量是一定的,那么在任意时刻能量达到的地方就会形成一个球面。球面的面积公式  $S = 4\pi r^2$  ( $r$  为半径),面积跟半径的平方  $r^2$  成正比。这也就是说:同一份能量在不同的时刻要均匀地分给  $4\pi r^2$  个部分,那么每个点得到的能量就自然得跟  $4\pi r^2$  成反比。这就是平方反比定律的更深层次的来源。

如果我们生活在四维空间里,我们就会看到很多立方(三次

方)反比的定律,这也是科学家们寻找高维度的一个方法。许多理论(比如超弦理论)里都有预言高维度,科学家们就去很小的尺度里测量引力,如果引力在一个很小的尺度里不再遵循平方反比定律,那就很有可能是发现了额外的维度。

好了,从更深层次理解了静电力遵循平方反比定律后,要猜出静电力的公式就是很简单的事情了。因为很明显的,两个电荷之间的静电力肯定跟两者的电荷量有关,而且是电荷越大静电力越大,再加上距离平方反比规律,两个电荷之间的静电力大致就是下面这样:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

这就是我们中学学的库仑定律:两个电荷之间的静电力跟两个电荷量的乘积成正比,跟它们距离的平方成反比,剩下的都是常数(图 2.1)。 $q_1$ 、 $q_2$  就是两个电荷的电荷量, $\epsilon_0$  是真空介电常数(先不管它是什么意思,知道是个跟电相关的常数就行了),我们熟悉的球面面积公式  $S = 4\pi r^2$  赫然出现在分母里,这是三维空间平方反比规律的代表。

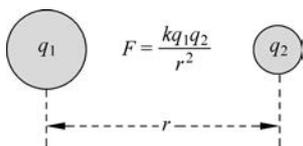


图 2.1 库仑定律

库仑定律是一个实验定律,也就是说,库仑做了很多实验,他发现两个电荷之间确实存在着一个这么大的静电力,但是它并没有告诉你这个静电力是如何传递的。两个并没有接触的物体之间存在某种力,一个常见的想法就是这两个物体之间存在着某种

我们看不见的东西在帮它们传递作用力。那么这种东西是什么呢？有人认为是以太，有人认为是某种弹性介质，但是法拉第说是力线，而且这种力线不是什么虚拟的辅助工具，而是客观的物理实在。它可以传递作用力，也可以具有能量，这些思想慢慢形成了我们现在熟知的场。

# 03

## 电场的叠加

有了场,我们就可以更加细致地描述两个电荷之间的相互作用了。为什么两个电荷之间存在这样一个静电力呢?因为电荷会在周围的空中产生一个电场,这个电场又会对处在其中的电荷产生一个力的作用。这个电场的强度越大,电荷受到的力就越大,正电荷受力的方向就是这点电场的方向。所以,电场具有大小和方向,这是一个矢量。

为了直观形象地描述电场,我们引入了电场线。电场线的密度刚好就代表了电场强度的大小,而某点电场线的切线方向就代表了该处电场的方向。一个正电荷就像太阳发光一样向四周发射电场线,负电荷汇集电场线(图 3.1)。

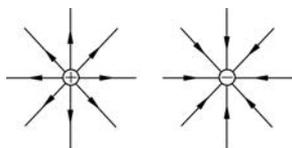


图 3.1 孤立点电荷的电场

这些内容大家在中学的时候应该都学了,我就一笔带过,接下来我们考虑一个稍微复杂一点的问题:库仑定律告诉了我们两个点电荷之间静电力的大小,那我们就可以根据这个求出一个点电