

体 系 结 构

从他创造的内在证据看,这位宇宙的伟大建筑师现在开始以一个纯粹的数学家的形象出现。

——詹姆斯·吉恩斯爵士,《神秘宇宙》

现在我们已经掌握了数学和物理的初步成果,可以继续讨论量子计算的具体细节。经典计算机的核心是位的概念,量子计算机的核心是称为量子位的概念的推广,这将在 5.1 节中讨论。在 5.2 节中,操作位的经典(逻辑)门是从一个新的不同的角度呈现的。从这个角度看,很容易形成量子门的概念,它操作量子比特。正如第 3 章和第 4 章所提到的,量子系统的演化是可逆的,也就是说,可以完成的操作也必须能够撤销。这种“撤销”转化为可逆的门,在 5.3 节中将会讨论。在 5.4 节中会继续讨论量子门。

读者提示: 关于量子比特和量子门的实际物理实现将在第 11 章中讨论。

5.1 比特和量子比特

定义 5.1.1 位是描述二维经典系统的信息单位。

位的示例有很多:

- 位是电流是否通过电路(高和低)。
- 位是表示“真”或“假”的一种方式。
- 位是打开或关闭的开关。



所有这些例子都在说同样的事情:一位是描述一个系统的方式,其状态集的大小为 2。通常将这两种可能的状态写为 0 和 1,或者 F 和 T 等。

由于我们已经精通矩阵,因此可以使用它们作为表示一位的方式。通常将 0(或者更好的是,状态 $|0\rangle$)表示为 2×1 的矩阵,其中 1 在 0 行中,0 在 1 行中

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

我们表示一个 1 或称状态 $|1\rangle$,如

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

因为这是两种不同的表示(实际上是正交的),所以可以使用简单的位操作。5.2节将会探讨如何操作这些位。

一个位可以处于状态 $|0\rangle$,也可以位于状态 $|1\rangle$,这对于经典世界来说已足够了。电力要么通过电路运行,要么不通过。一个命题要么是正确的,要么是错误的。开关要么是打开的,要么是关闭的。但是,在量子世界中,非此即彼是不够的。在那个世界里,有些情况下,我们处于一种状态,同时处于另一种状态。在量子领域,有些系统中,开关可以同时打开和关闭。一个量子系统可以同时处于状态 $|0\rangle$ 状态和状态 $|1\rangle$ 。因此,我们引出量子比特的定义。

定义 5.1.2 一个量子比特(qubit)是描述二维量子系统的信息单位。

我们将量子位表示为具有复数的 2×1 矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

其中 $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ 。注意,经典位是一种特殊类型的量子位。 $|c_0|^2$ 被解释为该量子位被测量后,将在状态 $|0\rangle$ 中找到的概率; $|c_1|^2$ 被解释为该量子位被测量后,它将在状态 $|1\rangle$ 中找到的概率。每当测量一个量子位时,它会自动变成一个位。因此,我们永远不会“看到”一个通用的量子比特。然而,它们确实存在,并且是我们故事中的主要角色。我们可能会将量子位的这种“坍缩”想象成一位。

$$\begin{matrix} & & [1, 0]^T \\ & \nearrow^{|c_0|^2} & \\ [c_0, c_1]^T & & \\ & \searrow_{|c_1|^2} & \\ & & [0, 1]^T \end{matrix} \quad (5.4)$$

很容易看出,位 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的规范基础。因此,任何量子位都可以写成

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \quad (5.5)$$

练习 5.1.1 将 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 4-2i \end{bmatrix}$ 表示为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的和。

按照在4章中学到的规范化过程, $\mathbb{C}^2$ 的任何非零元素都可以转换为量子位。

例 5.1.1 向量

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5+3i \\ 6i \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

有规范

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{[5-3i, -6i] \begin{bmatrix} 5+3i \\ 6i \end{bmatrix}} = \sqrt{34+36} = \sqrt{70} \quad (5.7)$$

因此, $\mathbf{v}$ 描述了与量子位相同的物理状态。

$$\frac{\mathbf{V}}{\sqrt{70}} = \begin{bmatrix} \frac{5+3i}{\sqrt{70}} \\ \frac{6i}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} = \frac{5+3i}{\sqrt{70}} |0\rangle + \frac{6i}{\sqrt{70}} |1\rangle \quad (5.8)$$

测量量子比特 $\frac{\sqrt{V}}{70}$ 后, 在状态 $|0\rangle$ 找到它的概率是 $\frac{34}{70}$, 在状态 $|1\rangle$ 找到它的概率是 $\frac{36}{70}$ 。

 **练习 5.1.2** 规范化 $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 15-3.4i \\ 2.1-16i \end{bmatrix}$

让我们看一下表示不同量子位的几种方法。 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.9)$$

同样, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.10)$$

重要的是要认识到

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.11)$$

这两种方式都可以表示 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 。相比之下,

$$\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \neq \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.12)$$

左状态向量是 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 右状态向量是 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 。但是, 这两个状态向量是相关的:

$$\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = (-1) \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.13)$$

量子比特是如何实现的? 在第 11 章中, 我们将会探讨几种不同的方法。这里只是简单地陈述一些实现的例子。

- 原子中的电子可能处于两个不同能级(基态和激发态)之一。
- 电子可能处于围绕原子核的两个不同轨道(基态和激发态)之一。

- 光子可能处于两种偏振状态之一。
- 亚原子粒子可能具有两个自旋方向之一。

在所有这些系统中,将有足够的量子不确定性和量子叠加效应来表示量子比特。

我们对只有一位存储空间计算机不感兴趣。同样,我们将需要具有多个量子位的量子设备。考虑 1 字节或 8 字节。典型的字节可能是

$$01101011 \quad (5.14)$$

如果按照前面的描述位的方法,我们将按如下方式表示位:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

我们之前了解到,为了组合量子系统,应该使用张量积;因此,可以将等式(5.14)中的字节描述为

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \quad (5.16)$$

作为一个量子比特,这是

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad (5.17)$$

此向量空间可以表示为 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 8}$ 。这是一个维数为 $2^8 = 256$ 的复向量空间。因为这个维度基本上只有一个复向量空间,所以这个向量空间同构于 $\mathbb{C}^{256}$ 。

可以用另一种方式描述字节为 $2^8 = 256$ 行向量。

$$\begin{array}{r} 00000000 \\ 00000001 \\ \vdots \\ 01101010 \\ 01101011 \\ 01101100 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

 **练习 5.1.3** 将三位 101 或 $|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 表示为 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} = \mathbb{C}^8$ 中的向量。

对 011 和 111 执行相同的操作。

这对古典世界来说很好。然而,对于量子世界来说,为了允许叠加,需要一般化:八量子位系统的每个状态都可以写成

$$\begin{array}{r} 00000000 \\ 00000001 \\ \vdots \\ 01101010 \\ 01101011 \\ 01101100 \\ \vdots \\ 11111110 \\ 11111111 \end{array} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{106} \\ c_{107} \\ c_{108} \\ \vdots \\ c_{254} \\ c_{255} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

其中, $\sum_{i=0}^{255} |c_i|^2 = 1$ 。八个量子位合在一起称为一个**量子字节**。在经典世界中,有必要指示字节的每个位的状态。这相当于写入八位。在量子世界中,通过写入 256 个复数给出八个量子位的状态。正如 3.4 节中所说,这种指数增长是研究人员开始考虑量子计算概念的原因之一。如果要模拟具有 64 量子位寄存器的量子计算机,则需要存储 $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$ 个复数。这远远超出目前的存储能力。下面练习用 ket 符号编写两个量子位。量子位对可以写成

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \quad \text{或} \quad |0 \otimes 1\rangle \quad (5.20)$$

这意味着第一个量子位处于状态 $|0\rangle$, 第二个量子位处于状态 $|1\rangle$ 。因为张量积是可以理解的,所以也可以省略张量积符号,把这些量子位表示为 $|0\rangle|1\rangle$, $|0,1\rangle$ 或 $|01\rangle$ 。将这两个量子位视为 4×1 矩阵的另一种方法是

$$\begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

 **练习 5.1.4** 哪个向量对应状态 $3|01\rangle + 2|11\rangle$?

 **例 5.1.2** 对应于

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

量子比特可以写成

$$\frac{1}{\sqrt{3}} |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |11\rangle = \frac{|00\rangle - |10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{3}} \quad (5.23)$$

双量子位系统的一般状态可以写为

$$|\psi\rangle = c_{0,0} |00\rangle + c_{0,1} |01\rangle + c_{1,0} |10\rangle + c_{1,1} |11\rangle \quad (5.24)$$

两种状态的张量积不是可交换的:

$$|0 \otimes 1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = |0,1\rangle = |01\rangle \neq |10\rangle = |1,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = |1 \otimes 0\rangle \quad (5.25)$$

左边的 ket 描述了第一个量子位处于状态 0, 而第二个量子位处于状态 1。右边的 ket 表示第一个量子位处于状态 1, 而第二个量子位处于状态 0。下面再次简要地回顾一下纠缠的概念。如果系统处于以下状态:

$$\frac{|11\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle \quad (5.26)$$

那么这意味着这两个量子位是纠缠在一起的。也就是说,如果测量第一个量子位,并且它的状态为 $|1\rangle$,那么我们会自动知道第二个量子位的状态是 $|1\rangle$ 。类似地,如果测量第一个量子位,并发现它处于 $|0\rangle$ 状态,那么我们会知道第二个量子位也处于 $|0\rangle$ 状态。

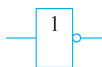
5.2 经典的逻辑门

经典逻辑门是位操作的方法。位进入和退出逻辑门,我们将需要量子比特操作的方法,并将从矩阵的角度研究经典门。如第 5.1 节所述,将 n 个输入位表示为 $2^n \times 1$ 的矩阵,将 m 个输出位表示为 $2^m \times 1$ 的矩阵。我们应该如何表示逻辑门? 当将 $2^m \times 2^n$ 的矩阵与 $2^n \times 1$ 的矩阵相乘时,结果是 $2^m \times 1$ 的矩阵,用符号表示为

$$(2^m \times 2^n) \times (2^n \times 1) = (2^m \times 1) \quad (5.27)$$

因此,位将由列向量表示,逻辑门将由矩阵表示。

下面来看一个简单的例子。考虑一下非(**NOT**)门。



非门输入一位或一个 2×1 的矩阵,并输出一位或一个 2×1 的矩阵。 $|0\rangle$ 的非等于 $|1\rangle$ 且 $|1\rangle$ 的非等于 $|0\rangle$ 。考虑矩阵

$$\mathbf{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

此矩阵满足

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

这正是我们想要的。其他的门呢? 考虑与(**AND**)门。与门与非门不同,因为与门接受两个位并输出一个位。



因为与门有两个输入和一个输出,所以需要一个 $2^1 \times 2^2$ 的矩阵。考虑矩阵

$$\mathbf{AND} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

此矩阵满足

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

可以把它写成:

$$\mathbf{AND} |11\rangle = |1\rangle \quad (5.32)$$

相反,请考虑另一个 4×1 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

可以把它写成

$$\mathbf{AND} |01\rangle = |0\rangle \quad (5.34)$$

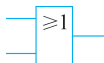
 **练习 5.2.1** 计算 $\mathbf{AND} |10\rangle$ 。

如果在 $\mathbf{AND}$ 的右侧任意放置一个 4×1 的矩阵,会发生什么情况?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2 \\ 0 \\ -4.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ -4.1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

这显然是无稽之谈。我们只允许将这些经典门乘以表示经典状态的向量,即具有单个元素 1 和所有其他元素 0 的列向量。在经典世界中,比特位一次只处于一种状态,并由这样的向量描述。只有后来,当深入研究量子门时,我们才会有更多的空间和更多的乐趣。

或(**OR**)门



可以用矩阵表示为

$$\mathbf{OR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

 **练习 5.2.2** 显示此矩阵执行 **OR** 运算。

与非(**NAND**)门

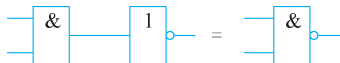


特别重要的是,每个逻辑门都可以由 **NAND** 门组成。下面尝试确定哪个矩阵对应 **NAND**。一种方法是考虑两位(00,01,10,11)的四种可能的输入状态中的哪一种使 **NAND** 输出 1(答案: 00,01,10),以及哪种状态使 **NAND** 输出 0(答案: 11)。

由此,我们意识到 **NAND** 可以写成:

$$\mathbf{NAND} = \begin{matrix} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.37)$$

注意,列名对应输入,行名对应输出。 j 列中的第 1 行和第 i 行表示在元素 j 上,矩阵/门将输出 i 。但是,还有另一种方法可以确定 **NAND** 门。**NAND** 门实际上是 **AND** 门,后跟 **NOT** 门。



换句话说,可以通过首先执行 **AND** 操作,然后执行 **NOT** 操作来执行 **NAND** 操作。用矩阵表示,可以将其写为

$$\mathbf{NOT} \times \mathbf{AND} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{NAND} \quad (5.38)$$

练习 5.2.3 找到一个与 NOR 相对应的矩阵。

NAND 的这种思维方式揭示了一种普遍情况。当执行计算时,经常必须执行一个操作,然后执行另一个操作。

$$\begin{array}{c} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow \boxed{B} \rightarrow \end{array} \quad (5.39)$$

我们将此过程称为执行顺序操作。如果矩阵 A 对应执行一个操作,而矩阵 B 对应执行另一个操作,则矩阵 $B * A$ 对应按顺序执行该操作。注意, $B * A$ 就像从图片的背面看,从左到右依次是 A ,然后是 B 。不要为此感到震惊。这样做的原因是从左到右阅读,因此我们将过程描述为从左到右流动。可以将上面的图表示为

$$\begin{array}{c} \leftarrow \boxed{B} \leftarrow \boxed{A} \leftarrow \end{array} \quad (5.40)$$

这样就不会混淆了^①。我们将遵循计算从左到右流动的惯例,并省略箭头的头部。因此, A 后跟 B 的计算图示应为

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{A} \text{---} \boxed{B} \text{---} \end{array} \quad (5.41)$$

下面正式说明输入数和输出数。如果 A 是具有 m 个输入位和 n 个输出位的运算,则其图示为

$$\begin{array}{c} \text{---}^m \boxed{A} \text{---}^n \end{array} \quad (5.42)$$

矩阵 A 的大小为 $2^n \times 2^m$ 。比如, B 将 A 的 n 个输出作为输入并输出 p 位,即

$$\begin{array}{c} \text{---}^m \boxed{A} \text{---}^n \boxed{B} \text{---}^p \end{array} \quad (5.43)$$

则 B 由 $2^p \times 2^n$ 的矩阵表示,执行一个操作依次后跟另一个操作对应于 $B \times A$,它是一个 $(2^p \times 2^n) \times (2^n \times 2^m) = 2^p \times 2^m$ 的矩阵。

除顺序操作外,还有并行操作。

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{A} \text{---} \\ \text{---} \boxed{B} \text{---} \end{array} \quad (5.44)$$

这里, A 作用于某些位, B 作用于其他位。这将由 $A \otimes B$ 表示(见 2.7 节)。让我们精确地了解输入数和输出数。

$$\begin{array}{c} \text{---}^m \boxed{A} \text{---}^n \\ \text{---}^{m'} \boxed{B} \text{---}^{n'} \end{array} \quad (5.45)$$

A 的大小为 $2^n \times 2^m$ 。 B 的大小为 $2^{n'} \times 2^{m'}$ 。根据 2.7 节中的等式(2.174), $A \otimes B$ 的大小为 $2^{n+n'} \times 2^{m+m'}$ (因为 $2^n 2^{n'} = 2^{n+n'}$, $2^m 2^{m'} = 2^{m+m'}$)。

练习 5.2.4 在练习 2.7.4 中,证明了 $A \otimes B \cong B \otimes A$ 。在对不同位执行并行操作方面,这一事实对应什么?

顺序和并行操作门/矩阵的组合将称为电路。当然,我们将构建一些非常复杂的矩阵,

^① 如果文本是用阿拉伯语或希伯来语写的,那么这个问题甚至不会出现。

但它们都可以分解为简单门的顺序和并行组合。

练习 5.2.5 在练习 2.7.9 中,证明对于适当大小的 A, A', B 和 B' 的矩阵,有以下等式:

$$(B \otimes B') * (A \otimes A') = (B * A) \otimes (B' * A') \quad (5.46)$$

在不同的(量子)位上执行不同的操作,这对应于什么?(提示:请考虑下图)



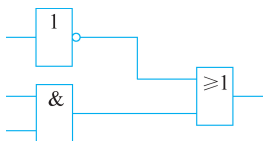
例 5.2.1 设 A 为接受 n 个输入并给出 m 个输出的运算。设 B 获取这些输出中的 $p < m$, 而不考虑其他 $m-p$ 输出。 B 输出 q 位。



A 是一个 $2^m \times 2^n$ 的矩阵。 B 是一个 $2^q \times 2^p$ 的矩阵。由于不需要对 $m-p$ 位执行任何操作,因此可以将其表示为 $2^{m-p} \times 2^{m-p}$ 的单位矩阵 I_{m-p} 。我们没有为单位矩阵绘制任何门。整个电路可以用以下矩阵表示:

$$(B \otimes I_{m-p}) * A \quad (5.49)$$

例 5.2.2 考虑电路:



这表示为

$$OR * (NOT \otimes AND) \quad (5.50)$$

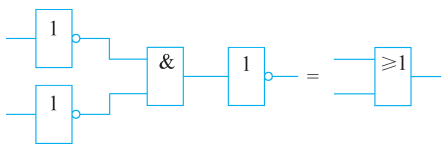
下面看看这些运算作为矩阵的样子。经计算,得到

$$NOT \otimes AND = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

因此,我们得到

$$\begin{aligned} OR * (NOT \otimes AND) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.52)$$

下面看看是否可以用矩阵表述德·摩根定律。其中一条德·摩根定律指出, $\neg(\neg P \wedge \neg Q) = P \vee Q$ 。这是一个图形表示



用矩阵表示, 对应于

$$\text{NOT} * \text{AND} * (\text{NOT} \otimes \text{NOT}) = \text{OR} \quad (5.53)$$

首先, 计算张量积:

$$\text{NOT} \otimes \text{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

这个德摩根定律对应矩阵的以下恒等式:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

 **练习 5.2.6** 乘以这些矩阵并确认同一性。

 **练习 5.2.7** 用矩阵表示另一个德·摩根定律

$$\neg(\neg P \vee \neg Q) = P \wedge Q \quad (5.56)$$

 **练习 5.2.8** 写出对应一位加法器的矩阵。一位加法器将位 x, y 和 c (来自早期加法器的进位) 相加并输出位 z 和 c' (进位到下一个加法器)。有三个输入和两个输出, 因此矩阵的维度为 $2^2 \times 2^3$ 。(提示: 将列标记为 000, 001, 010, ..., 110, 111, 其中列, 例如 101, 对应 $x=1, y=0, c=1$ 。将行标记为 00, 01, 10, 11, 其中行, 例如 10, 对应 $z=1, c'=0$ 。当 $x=1, y=0, c=1$ 时, 输出应为 $z=0$ 且 $c'=1$ 。因此, 在标记为 01 的行中放置一个 1, 在所有其他行中放置一个 0。)

 **练习 5.2.9** 在练习 5.2.8 中, 你确定了对应于一位加法器的矩阵。通过用经典门编写电路, 然后将电路转换为大矩阵来检查结果是否正确。

5.3 可逆门

并非在 5.2 节中处理的所有逻辑门在量子计算机中都有效。在量子世界中, 所有非测量的操作都是可逆的, 并且由酉矩阵表示。**AND** 操作不可逆。给定来自 **AND** 的输出为 $|0\rangle$, 则无法确定输入是 $|00\rangle, |01\rangle$ 还是 $|10\rangle$ 。因此, 从 **AND** 栅极的输出, 人们无法确定输入, 因此 **AND** 是不可逆的。相反, 非门和恒等门是可逆的。事实上, 它们是它们自己的逆:

$$\text{NOT} * \text{NOT} = I_2 \quad I_n * I_n = I_n \quad (5.57)$$

可逆门的历史早于量子计算。日常计算机会消耗能量并产生大量的热量。20 世纪 60 年代, 罗尔夫·兰道尔(Rolf Landauer)分析了计算过程, 并表明擦除信息而不是写入信息是导致能量损失和热量的原因。这个概念被称为兰道尔原理。为了获得现实生活中的直