

CHAPTER 1

第 1 章

绪 论

运筹学是一门依照给定条件和目标从众多方案中选择最佳决策方案的应用科学,自诞生以来,在军事、工农业、经济和社会问题等多个领域得到了广泛的重视和应用。在管理学科领域,运筹学为管理理论和管理实践的发展也做出了突出的贡献,到现在,运筹学已成为工商管理学科中的一门重要的基础学科。

运筹学思想方法的起源可追溯到很远。人们发现,在我国先秦时期的诸子著作中,就存在许多朴素的运筹思想,这里“运筹”就是动脑筋想办法,去选择最优方案。“田忌赛马”和“沈括运粮”的故事充分说明我国不仅很早就有了朴素的运筹思想,而且在生产实践中实际运用了运筹方法。但真正被人们公认的运筹学起源于 20 世纪初期。第二次世界大战期间,英、美为了对付德国的空袭,就如何合理运用雷达使防空系统更加有效的问题开始进行一类新问题的研究,最初称为“运作研究”(operational research)。1942 年,美国从事这方面工作的科学家将其命名为“运筹学”(operations research),这个名字一直延用至今。

“二战”期间,为了进行运筹学的研究,在英、美的军队中成立了一些专门小组,开展了诸如护航舰队保护商船队的编队问题和当船队遭受德国潜艇攻击时,如何使船队损失最小的问题的研究;还研究了反潜深水炸弹在各种情况下如何调整其爆炸深度,才能增加对德国潜艇的杀伤力等。通过科学方法的运用,成功地解决了许多复杂的战术问题,使战争后期德国潜艇被摧毁的数量增加了 400%,盟军船只在受敌机攻击时,中弹率由 47% 降到 29%。“二战”后,英、美军队中又相继成立了更为正式的运筹研究小组,以兰德公司(RAND)为首的一些部门开始着重研究未来武器系统的设计及其合理运用方法等战略性问题。到了 20 世纪 60 年代,除军事方面的应用研究外,运筹学在更为广阔的领域得到运用,从事这项工作的许多专家转到了经济部门、民用企业、大学或研究所,继续进行决策的数量方法的研究,运筹学作为一门学科逐步形成并得以迅速发展。这种发展主要表现在以下两个方面。

一是在方法论上形成了运筹学的许多分支,如数学规划(线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等),图论与网络,排队论,存贮论,对策论,决策论,维修更新理论,搜索论,可靠性和质量管理等。

二是计算机科学的发展,新型计算机的出现,为运筹学的运用开辟了新天地,使得运筹学的方法论能成功、及时地解决大量经济管理中的决策问题,并且随着计算机软硬件的发展,运筹学不再只为专家所掌握和使用,也成为广大管理者进行最优决策和有效管理的常用工具之一。

毫无疑问,运筹学是一门应用科学,虽然至今没有统一且确切的定义,但其性质和特点还是很鲜明的。其一,它是一种科学方法,即不单是某种研究方法的分散和偶然的应用,而是可用于整个一类问题上;其二,它强调以量化为基础,必然要用数学,需要建立各种数学模型,为决策者的决策提供定量依据;其三,它具有多学科交叉的特点,如综合运用经济学、

心理学、物理学、系统学等的一些方法;其四,它强调最优决策,但在实际生活中又常常用次优、满意等概念代替最优。

在生活节奏日益加快的今天,运筹学是我们安排工作、学习、娱乐、生活的有效工具。而运筹学的魅力在于,它运用数学模型,如一把梳子,梳理着经济、军事、生活的各个方面,而且把纷繁复杂的现象数学化。运筹学就是研究在实现整体目标的全过程中实现统筹管理的有关理论、模型、方法和手段,在经济研究、经营决策方面被广泛应用。它通过对整体目标的分析,选择适当的模型来描述整体的各个部分,用以分析并求出全局的最优决策。

【课后习题全解】

1.1 简要说明 20 世纪 50 年代后运筹学取得较快发展的主要原因。

主要原因至少有三方面:一是由于 20 世纪 50 年代后很多国家在经济发展和企业经营管理方面对运筹学研究和方法的需求,很多科学家进入运筹学这个领域,将运筹学研究和方法用于经济和社会发展的众多领域,推动了运筹学的发展。二是运筹数学的发展,为运筹学的应用提供了坚实的数学理论,特别是线性规划理论和单纯形方法的提出,解决了很多实际问题,极大推动了运筹学研究和运筹学方法在很多领域的应用。三是电子计算机的出现和快速发展,以及运筹学算法相关软件包的出现,进一步推动了运筹学的应用,使得运筹学解决实际问题的能力得到了极大的提高。

1.2 简要说明运筹学在企业经营管理决策中的地位和作用。

运筹学为企业经营管理决策提供定量和定性分析,科学评估各种决策方案。企业经营管理是运筹学的源头,运筹学的思想贯穿了企业经营管理的全过程,并在企业战略管理、生产计划、市场营销、运输问题、库存管理、财务会计、售后服务等方面发挥重要的作用。

1.3 为什么说建立相应模型是运筹学中最重要的一部分?

运筹学中的主要模型是数学模型,数学模型最主要的优点是能更简洁地描述问题,有助于对问题整体结构的理解,有助于揭示重要的因果关系,通过这种表示方式,可以更清楚地表明哪些数据与问题有关,有助于从整体上理解和处理问题,并同时考虑到所有的相关关系。数学模型还可以搭建一个桥梁,使得人们能够利用数学技术和计算机来分析问题。运筹学模型是运筹学解决大部分实际问题的一个必不可少的工具,没有模型,大部分问题就无从谈起,没法为决策者提供科学决策的依据。

1.4 如何理解运筹学解决问题的目标从追求“最优”向“满意”的转变?

运筹学的目的是帮助决策者找到相关问题的最佳解决方案,运筹学的很多相关分支已经给出了如何求解问题最优解的方法、计算机程序和相应软件包。但是,这些最佳方案是针对所使用的模型而言的,只是根据所设计的模型求解而得到的“最优解”。由于模型只是实际问题的理想化而不是精确的表示,因此并不能保证根据模型得到的“最佳解决方案”就是解决实际问题的最佳方案。另外,在实际应用中,由于主客观条件的限制,满意解比最优解更为普遍。从而,在实际问题解决中,围绕最优解,采用满意解不失为一个务实的做法。

CHAPTER 2

第2章

线性规划

【本章学习要求】

1. 掌握线性规划的图解法及其几何意义。
2. 理解线性规划的标准型和规范型。
3. 掌握单纯形法原理。
4. 掌握运用单纯形表计算线性规划问题的步骤及解法。
5. 运用两阶段法和大 M 法求解线性规划问题,以及运用人工变量法求解非规范型的线性规划问题。
6. 掌握任何基可行解原表及单纯形表的对应关系。

【主要概念及算法】

1. 线性规划问题的数学模型

目标函数: $\max(\text{或 } \min) z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

约束条件:
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i, & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

其中, $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为决策变量; $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 为工艺系数; $b_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为资源系数; $c_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为价值系数。

其标准型为

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

2. 图解法

对于只含两个变量的线性规划问题,可通过在平面上作图的方法求解。

解法的步骤如下:

- (1) 建立平面直角坐标系;
- (2) 图示约束条件,找出可行域;
- (3) 图示目标函数,即为一类直线;
- (4) 将目标函数直线沿其法线方向在可行域内向可行域边界平移直至目标函数达到最优值为止,目标函数达到最优值的点就为最优点。

3. 线性规划问题的解的概念

线性规划问题:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2-1)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (2-2)$$

$$(2-3)$$

- (1) 可行解: 满足约束条件(2-2)和(2-3)的解 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。
- (2) 最优解: 使目标函数(2-1)达到最大值的可行解。
- (3) 基: 设 $\mathbf{A}$ 为约束方程组(2-2)的 $m \times n$ 阶系数矩阵, 设 $n > m$, 其秩为 m , $\mathbf{B}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵, 则称 $\mathbf{B}$ 为线性规划问题的一个基。不失一般性, 设

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m)$$

$\mathbf{B}$ 中每一个列向量 $\mathbf{P}_j$ ($j=1, 2, \dots, m$) 称为基向量, 与基向量 $\mathbf{P}_j$ 对应的变量 x_j 称为基变量。除基变量以外的变量为非基变量。

- (4) 基本解: 在约束方程组(2-2)中, 令所有非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$, 此时方程组(2-2)有唯一解 $\mathbf{X}_B = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, 将此解加上非基变量取 0 的值有 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)^T$, 称 $\mathbf{X}$ 为线性规划问题的基本解。

- (5) 基本可行解: 满足非负条件(2-3)的基本解。

- (6) 可行基: 对应于基本可行解的基。

4. 单纯形法迭代原理

- (1) 数学模型化为标准型

具备以下条件的数学模型称为单纯形法标准型:

- ① 等式约束条件;
- ② 右边常数非负;
- ③ 变量非负;
- ④ 目标函数为 max 型。

(2) 数学模型化为规范型

具备以下条件的数学模型称为单纯形法规范型:

- ① 标准型;
- ② 约束条件系数矩阵中至少含有一个单位子矩阵,对应的变量为基变量;
- ③ 目标函数中不含基变量。

(3) 确定初始基本可行解

在规范型数学模型中,令非基变量 $x_j = 0$, 求出基变量 x_i , 即得初始基本可行解。

(4) 最优性检验

在得到初始基本可行解后,要检验一下是否为最优解。若是,则停止迭代; 若否,则继续迭代,但每次迭代后都要检验一下当前解是否为最优解。有如下的判别准则:

① 最优解判别定理: 若 $\mathbf{X}^{(0)} = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, 0, \dots, 0)^T$ 为对应于基 $\mathbf{B}$ 的基本可行解, 且对于一切 $j = m+1, m+2, \dots, n$ 有 $\sigma_j \leq 0$, 则 $\mathbf{X}^{(0)}$ 为最优解, 其中, σ_j 为检验数,

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a'_{ij}。$$

② 无穷多最优解判别定理: 若 $\mathbf{X}^{(0)} = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, 0, \dots, 0)^T$ 为一个基可行解, 对于一切 $j = m+1, m+2, \dots, n$, 有 $\sigma_j \leq 0$, 又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} = 0$, 则线性规划问题有无穷多最优解。

③ 无界解判别定理: 若 $\mathbf{X}^{(0)} = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, 0, \dots, 0)^T$ 为一个基可行解, 有一个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} > 0$, 并且对 $i = 1, 2, \dots, m$, 有 $a_{i,m+k} \leq 0$, 那么该线性规划问题为无界解。

5. 单纯形法的计算步骤

(1) 单纯形表

将目标函数与约束条件一起组成 $n+1$ 个变量、 $m+1$ 个方程的方程组

$$\begin{cases} x_1 & + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 & + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ -z + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \dots + c_nx_n = 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

将上述式(2-4)写成增广矩阵形式

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0 \end{array} \right] \quad (2-5)$$

将 z 看作不参与基变换的基变量, 它的系数与 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的系数构成一个基, 这时可用初等行变换将 $c_1, c_2, \dots, c_m$ 变为零, 使其对应的系数矩阵为单位矩阵, 得

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1} - \sum_{i=1}^m c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n - \sum_{i=1}^m c_i a_{in} & - \sum_{i=1}^m c_i b_i \end{array} \right] \quad (2-6)$$

可根据式(2-6)的增广矩阵,设计一种计算表,即单纯形表,如表 2-1 所示。

表 2-1

$c_j \rightarrow$			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
$-z$	$-\sum_{i=1}^m c_i b_i$	0	0	0	$\cdots$	0	$c_{m+1} - \sum_{i=1}^m c_i a_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_n - \sum_{i=1}^m c_i a_{in}$	

对于表 2-1:

X_B 列中填入基变量,这里是 $x_1, x_2, \cdots, x_m$;

C_B 列中填入基变量的价值系数,它们是与基变量相对应的,这里是 $c_1, c_2, \cdots, c_m$;

b 列中填入约束方程组右端的常数。

c_j 行中填入各变量的价值系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$; θ_i 列的数字是在确定换入变量后,按 θ 规则计算后填入;最后一行是检验数行,对应各变量 x_j 的检验数 σ_j 是

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

表 2-1 称为初始单纯形表,以它为起点进行迭代,每迭代一次就得到一个新的单纯形表。

(2) 单纯形法的计算步骤

① 找出初始可行基,确定初始基本可行解,建立初始单纯形表;

② 检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$, 若

$$\sigma_j \leq 0, \quad (j = m+1, m+2, \cdots, n)$$

则已得到最优解,停止计算。否则转入下一步;

③ 在 $\sigma_j > 0, j = m+1, m+2, \cdots, n$ 中,若有某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $P_k \leq 0$,则此问题为无界解,停止计算。否则转入下一步;

④ 根据 $\max_j (\sigma_j > 0) = \sigma_k$, 确定 x_k 为换入变量,按 θ 规则计算

$$\theta = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

由此确定 x_l 为换出变量,转入下一步。

⑤ 以 a_{lk} 为主元素进行迭代,把 x_k 所对应的列向量

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \text{变换为} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } l \text{ 个分量}$$

将 $\mathbf{X}_B$ 列中的 x_l 换为 x_k ,得到新的单纯形表,重复步骤②~步骤⑤直到终止。

注意:

- i) 进行迭代后,在 b 列中出现 0,此时为退化情况;
- ii) 当在计算中遇到两个或更多的相同 θ 值时,则从相同 θ 所对应的基变量中,选择下标最大的那个基变量为换出变量。

6. 单纯形法的进一步讨论

在规划模型化为标准型后,当其约束条件的系数矩阵中不存在单位矩阵时,需再添加新的变量,使其含有单位矩阵,此时的新加变量为人工变量,这种化为标准型的方法称为人工变量法。

对于解决有人工变量的线性规划问题,有以下两种方法。

(1) 大 M 法

在一个线性规划问题的约束条件中加入人工变量后,要求人工变量不受目标函数取值的影响,假定人工变量在目标函数中的系数为 $-M$ (M 为任意大的正数),这样目标函数要实现最大化时,必须把人工变量换出,否则目标函数不可能实现最大化。

(2) 两阶段法

第一阶段: 求解一个目标函数仅含人工变量,且为最小化的线性规划问题,其有两种可能结果:

- ① 目标函数最优值为 0,则去掉人工变量转入第二阶段;
- ② 目标函数最优值不为 0,则原问题无可行解,停止计算。

第二阶段: 去掉第一阶段中的人工变量,将第一阶段得到的最优解作为初始基本可行解,利用单纯形法继续进行迭代,直至终止。

7. 单纯形法小结

如何化为规范型及如何选取初始基变量,见表 2-2。

表 2-2

	线性规划模型	化为规范型
变 量	$x_j \geq 0$	不变
	$x_j \leq 0$	令 $x'_j = -x_j$ 则 $x'_j \geq 0$
	x_j 无约束	令 $x_j = x'_j - x''_j$, 且 $x'_j, x''_j \geq 0$

续表

	线性规划模型		化为规范型
约 束 条 件	右 端 项	$b_i \geq 0$ $b_i \leq 0$	不变 约束条件两端乘以-1
	形 式	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{si} = b_i$ $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{ai} = b_i$ $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{si} + x_{ai} = b_i$
	目 标 函 数	极大或极小 $\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ $\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	不变 令 $z' = -z$, 则 $\max z' = \sum_{j=1}^n c_j x_j$
	变 量 前 的 系 数	加松弛变量 x_{si} 时 加人工变量 x_{ai} 时	$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_i 0 \cdot x_{si}$ $\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_i Mx_{ai}$

【课后习题全解】

2.1 用图解法求解下列线性规划问题,并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解?

$$(1) \max z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \min z = x_1 + 1.5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) \max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ 3x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 (1) 图 2-1 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域,目标函数 $z = x_1 + 3x_2$, 即 $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{z}{3}$ 是斜率为 $-\frac{1}{3}$ 的一族平行线,易知 $x_1 = 3, x_2 = 0$ 为可行解,由线性规划的性质知,其最值在可行域的顶点取得,将直线 $x_1 + 3x_2 = 3$ 沿其法线方向逐渐向上平移,直至 A 点, A 点坐标为 (2, 4)。

所以

$$\max z = 2 + 3 \times 4 = 14$$

此线性规划问题有唯一最优解。

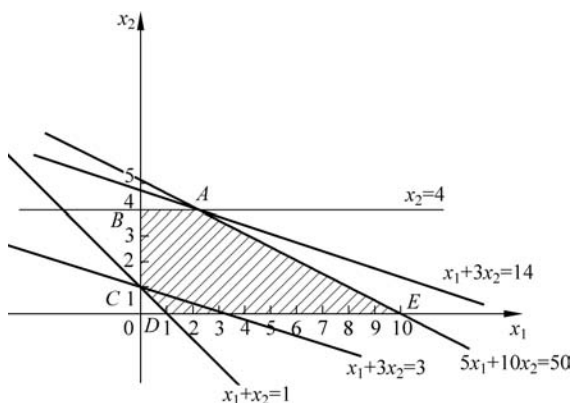


图 2-1

(2) 图 2-2 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域, 目标函数 $z = x_1 + 1.5x_2$, 即 $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}z$ 是斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的一族平行线, 易知 $x_1 = 3, x_2 = 0$ 为可行解, 由线性规划的性质知, 其最值在可行域的顶点取得。

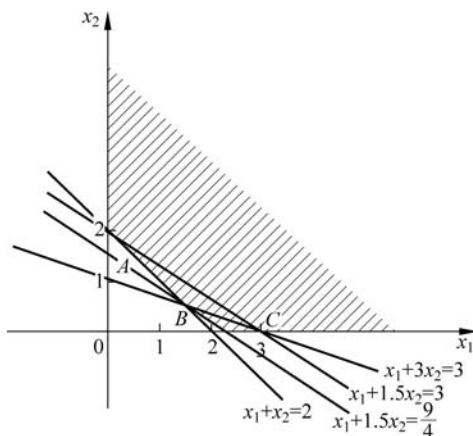


图 2-2

将直线 $x_1 + 1.5x_2 = 3$ 沿其法线方向逐渐向下平移, 直至 B 点, B 点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 。

所以
$$\min z = \frac{3}{2} + 1.5 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

此线性规划问题有唯一最优解。

(3) 图 2-3 中阴影部分为此线性规划问题的可行域, 目标函数 $z = 2x_1 + 2x_2$, 即 $x_2 = -x_1 + \frac{z}{2}$ 是斜率为 -1 的一族平行线, 易知 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 为可行解。在将直线 $2x_1 + 2x_2 = 0$ 沿其法线方向逐渐向上平移的过程中发现, 目标函数的值可以增加到无穷大, 故此线性规划问题为无界解。

(4) 如图 2-4 所示, 此问题的可行域为空集, 故此线性规划问题无可行解。

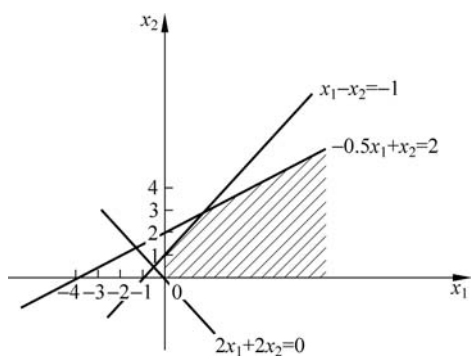


图 2-3

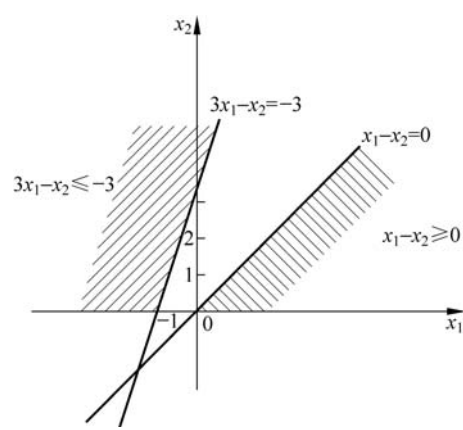


图 2-4

2.2 分别考虑下面的两个线性规划问题,其中 c 为一个参数。

$$\begin{aligned} \max z &= cx_1 + x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \\ \min z &= x_1 + cx_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

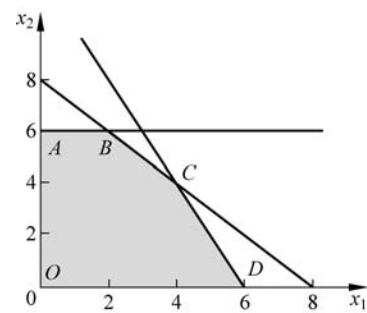


图 2-5

解 (1) 目标函数 $\max z = cx_1 + x_2$, 则 $x_2 = -cx_1 + z = kx_1 + z$, 其中斜率 $k = -c$. 而直线 $x_1 + x_2 = 8, 2x_1 + x_2 = 12, x_2 = 6$ 的斜率分别为 $-1, -2, 0$. 可由表 2-3 得出最优解的情况。

表 2-3	
c 值	最优解
$c < 0$	A 点
$c = 0$	AB 段
$0 < c < 1$	B 点
$c = 1$	BC 段
$1 < c < 2$	C 点
$c = 2$	CD 段
$c > 2$	D 点

(2) 根据线性规划的极值都在顶点或者边界取得的原理,把 5 个顶点 A 、 B 、 C 、 D 、 O 对应的函数值求出来,进行目标函数值比较,见表 2-4。

表 2-4

	$A(0,6)$	$B(2,6)$	$C(4,4)$	$D(6,0)$	$O(0,0)$
$z = x_1 + cx_2$	$6c$	$2+6c$	$4+4c$	6	0

目标函数 $\min z = x_1 + cx_2$

很显然 $6c < 2+6c \quad 0 < 6$

只需要比较 A 、 C 、 O 三个点及它们所组成的线段。

当 $c > 0$ 时, $\min\{6c, 4+4c, 0\} = 0$, 在 O 点取得最小值。

当 $c = 0$ 时, $\min\{6c, 4+4c, 0\} = 0$, 且 $6c = 0$, 在线段 OA 取得最小值。

当 $c < 0$ 时, $\min\{6c, 4+4c, 0\} = 6c$, 在 A 点取得最小值。

2.3 将下列线性规划问题变换成标准型,并列出初始单纯形表。

(1) $\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

(2) $\max s = z_k / p_k$

$$\begin{cases} z_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} x_{ik} \\ \sum_{k=1}^m -x_{ik} = -1, \quad (i=1, \dots, n) \\ x_{ik} \geq 0, \quad (i=1, \dots, n; k=1, \dots, m) \end{cases}$$

解 (1) 将此线性规划问题化为标准型。

令 $x_4 = x_5 - x_6$, $z' = -z$ 。其中, $x_5, x_6 \geq 0$ 。

所以 $\max z' = -\min(-z') = -\min z$

则得到标准型为

$$\begin{aligned} \max z' &= 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5(x_5 - x_6) + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 - Mx_9 - Mx_{10} \\ \text{s. t. } \begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 - x_6 + x_{10} = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 + x_7 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 - 2x_6 - x_8 + x_9 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中, M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 2-5。

表 2-5

$c_j \rightarrow$			3	-4	2	-5	5	0	0	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
-M	x_{10}	2	-4	1	-2	1	-1	0	0	0	1	2
0	x_7	14	1	1	3	-1	1	1	0	0	0	14
-M	x_9	2	-2	[3]	-1	2	-2	0	-1	1	0	$\frac{2}{3}$
$-z'$		4M	3-6M	4M-4	2-3M	3M-5	5-3M	0	-M	0	0	

(2) 在上述问题的约束条件中加入人工变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 得

$$\begin{aligned} \max s &= \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} x_{ik} - Mx_1 - Mx_2 - \dots - Mx_n \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_i + \sum_{k=1}^m x_{ik} = 1, & (i=1, 2, \dots, n) \\ x_{ik} \geq 0, x_i \geq 0, & (i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned}$$

其中, M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 2-6。

表 2-6

c_j			-M	-M	...	-M	$\frac{a_{11}}{p_k}$	$\frac{a_{12}}{p_k}$	...	$\frac{a_{1m}}{p_k}$	...	$\frac{a_{n1}}{p_k}$	$\frac{a_{n2}}{p_k}$	...	$\frac{a_{mn}}{p_k}$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	...	x_n	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}	...	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{mn}	
-M	x_1	1	1	0	...	0	1	1	...	1	...	0	0	...	0	
-M	x_2	1	0	1	...	0	0	0	...	0	...	0	0	...	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
-M	x_n	1	0	0	...	1	0	0	...	0	...	1	1	...	1	
$-s$	nM	0	0	...	0		$\frac{a_{11}}{p_k} + M$	$\frac{a_{12}}{p_k} + M$	...	$\frac{a_{1m}}{p_k} + M$	...	$\frac{a_{n1}}{p_k} + M$	$\frac{a_{n2}}{p_k} + M$	...	$\frac{a_{mn}}{p_k} + M$	

2.4 在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基本解, 指出哪些是基本可行解, 并代入目标函数, 确定哪一个是最优解。

$$\begin{aligned} (1) \max z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \min z &= 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \\ &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解 (1) 此线性规划问题的系数矩阵 A 为

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

令

$$A = (P_1, P_2, P_3, P_4)$$

则

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

① 因为 P_1, P_2 线性无关, 所以 (P_1, P_2) 为基, x_1, x_2 为基变量。

所以

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 2x_2 = -3 - 6x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

基解 $X^{(1)} = (1, 2, 0, 0)^T$ 为可行解。

$$z_1 = 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 0 + 7 \times 0 = 8$$

② 因为 P_1, P_3 线性无关, 所以 (P_1, P_3) 为基, x_1, x_3 为基变量。

所以

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 8 - 3x_2 + 4x_4 \\ x_1 + 6x_3 = -3 + 2x_2 + 7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 8 \\ x_1 + 6x_3 = -3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{45}{13} \\ x_3 = -\frac{14}{13} \end{cases}$$

由于 $x_3 = -\frac{14}{13} < 0$, 与约束条件 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ 矛盾, 基解 $X^{(2)} = \left(\frac{45}{13}, 0, -\frac{14}{13}, 0\right)^T$ 是非可行解。

③ 因为 P_1, P_4 线性无关, 所以 (P_1, P_4) 为基, x_1, x_4 为基变量。

所以

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_4 = 8 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 - 7x_4 = -3 + 2x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_3 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_4 = 8 \\ x_1 - 7x_4 = -3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{34}{5} \\ x_4 = \frac{7}{5} \end{cases}$$

基解 $\mathbf{X}^{(3)} = \left(\frac{34}{5}, 0, 0, \frac{7}{5}\right)^T$ 为可行解。

$$z_3 = 2 \times \frac{34}{5} + 3 \times 0 + 4 \times 0 + 7 \times \frac{7}{5} = \frac{117}{5}$$

④ 因为 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ 为基, x_2, x_3 为基变量。

所以

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 8 - 2x_1 + 4x_4 \\ -2x_2 + 6x_3 = -3 - x_1 + 7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 8 \\ -2x_2 + 6x_3 = -3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_2 = \frac{45}{16} \\ x_3 = \frac{7}{16} \end{cases}$$

基解 $\mathbf{X}^{(4)} = \left(0, \frac{45}{16}, \frac{7}{16}, 0\right)^T$ 为可行解。

$$z_4 = 2 \times 0 + 3 \times \frac{45}{16} + 4 \times \frac{7}{16} + 7 \times 0 = \frac{163}{16}$$

⑤ 因为 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$ 为基, x_2, x_4 为基变量。

所以

$$\begin{cases} 3x_2 - 4x_4 = 8 - 2x_1 + x_3 \\ -2x_2 - 7x_4 = -3 - x_1 - 6x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_3 = 0$, 得

$$\begin{cases} 3x_2 - 4x_4 = 8 \\ -2x_2 - 7x_4 = -3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_2 = \frac{68}{29} \\ x_4 = -\frac{7}{29} \end{cases}$$

由于 $x_4 = -\frac{7}{29} < 0$, 与 $x_4 \geq 0$ 矛盾, 基解 $\mathbf{X}^{(5)} = \left(0, \frac{68}{29}, 0, -\frac{7}{29}\right)^T$ 为非可行解。

⑥ 因为 $\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$ 为基, x_3, x_4 为基变量。

所以

$$\begin{cases} -x_3 - 4x_4 = 8 - 2x_1 - 3x_2 \\ 6x_3 - 7x_4 = -3 - x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} -x_3 - 4x_4 = 8 \\ 6x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{68}{31} \\ x_4 = -\frac{45}{31} \end{cases}$$

由于 $x_3 < 0, x_4 < 0$, 基解 $\mathbf{X}^{(6)} = (0, 0, -\frac{68}{31}, -\frac{45}{31})^T$ 为非可行解。

比较 z_1, z_3, z_4 , 可知 $z_3 = \frac{117}{5}$ 为最大值。

所以, 最优解为 $\mathbf{X}^{(3)} = (\frac{34}{5}, 0, 0, \frac{7}{5})^T$ 。

(2) 此线性规划问题的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

令

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$$

则

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

① 因为 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ 为基, x_1, x_2 为基变量。

所以

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 - 3x_3 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 3 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

基解 $\mathbf{X}^{(1)} = (-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 0, 0)^T$ 为非可行解。

② 因为 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3)$ 为基, x_1, x_3 为基变量。

所以

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 7 - 2x_2 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_3 = 3 - x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_3 = \frac{11}{5} \end{cases}$$

基解 $\mathbf{X}^{(2)} = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{11}{5}, 0\right)^T$ 为可行解。

$$z_2 = 5 \times \frac{2}{5} - 2 \times 0 + 3 \times \frac{11}{5} - 6 \times 0 = \frac{43}{5}$$

③ 因为 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$ 为基, x_1, x_4 为基变量。

所以

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 7 - 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_4 = 3 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_3 = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_4 = \frac{11}{6} \end{cases}$$

由于 $x_1 = -\frac{1}{3} < 0$, 基解 $\mathbf{X}^{(3)} = \left(-\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{11}{6}\right)^T$ 为非可行解。

④ 因为 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ 为基, x_2, x_3 为基变量。

所以

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4 \\ x_2 + x_3 = 3 - 2x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

基解 $\mathbf{X}^{(4)} = (0, 2, 1, 0)^T$ 为可行解。

$$z_4 = 5 \times 0 - 2 \times 2 + 3 \times 1 - 6 \times 0 = -1$$

⑤ 因为 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4$ 线性相关, 所以 x_2, x_4 不能构成基变量。

⑥ 因为 $\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$ 为基, x_3, x_4 为基变量。

所以

$$\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

基解 $\mathbf{X}^{(6)} = (0, 0, 1, 1)^T$ 为可行解。

$$z_6 = 5 \times 0 - 2 \times 0 + 3 \times 1 - 6 \times 1 = -3$$

由 $z_2 = \frac{43}{5}, z_4 = -1, z_6 = -3, \min\left(\frac{43}{5}, -1, -3\right) = -3$, 可知 $z_6 = -3$ 为最小值。

所以, 最优解为 $\mathbf{X}^{(6)} = (0, 0, 1, 1)^T$ 。

2.5 考虑下面的线性规划问题, 其中 c 为一个参数。

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + cx_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

请结合单纯形法, 探讨当参数 c 在什么范围内取值时, 最优解分别在可行域的 A 、 B 、 C 、 D 点处获得?

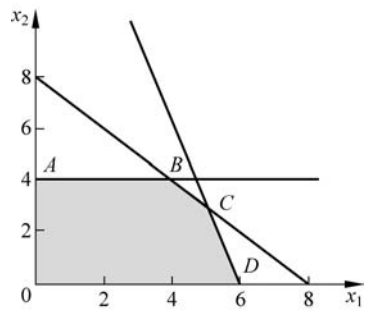


图 2-6

解 如表 2-7 所示。

表 2-7

	$A(0,4)$	$B(4,4)$	$C\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$	$D(6,0)$	$O(0,0)$
$z = x_1 + cx_2$	$4c$	$4 + 4c$	$\frac{16}{3} + \frac{8c}{3}$	6	0

由于 $4 + 4c > 4c, 6 > 0$

只需比较 $4 + 4c, \frac{16}{3} + \frac{8}{3}c$ 与 6 的大小关系。

当 $c < \frac{1}{4}$ 时, 在 D 点取得

当 $c = \frac{1}{4}$ 时, 在 CD 线段上取得

当 $\frac{1}{4} < c < \frac{1}{2}$ 时, 在 C 点取得

当 $c = \frac{1}{2}$ 时, 在 BC 线段上取得

当 $c > \frac{1}{2}$ 时, 在 B 点取得。

2.6 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下述线性规划问题, 并指出属哪一类解。

$$(1) \max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$(2) \max z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解(1) 解法一: 大 M 法

将上述问题化为标准型, 并加入人工变量, 得

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - Mx_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

其中, M 是一个任意的正数。

对于此线性规划问题, 用单纯形表进行计算, 见表 2-8。

表 2-8

c_j			2	3	-5	-M	0	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
-M	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
-z		17M	3M+2	3-4M	2M-5	0	-M	0	
-M	x_4	2	0	$\left[\frac{7}{2}\right]$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$
2	x_1	5	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-
-z		2M-10	0	$\frac{7}{2}M+8$	$\frac{1}{2}M-6$	0	$\frac{1}{2}M+1$	$-\frac{3}{2}M-1$	
3	x_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
2	x_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	
-z		$-\frac{102}{7}$	0	0	$-\frac{50}{7}$	$-M-\frac{16}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-M+\frac{1}{7}$	

由表 2-8 可得, 此线性规划问题的最优解

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{45}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

目标函数最优值

$$\max z = \frac{102}{7}$$

此线性规划问题有唯一最优解。

解法二：两阶段法

第一阶段的数学模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & w = x_4 + x_6 \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于此线性规划问题用单纯形表进行计算，见表 2-9。

表 2-9

c_j			0	0	0	1	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
1	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
$-w$		-17	-3	4	-2	0	1	0	
1	x_4	2	0	$\left[\frac{7}{2}\right]$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$
0	x_1	5	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—
$-w$		-2	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
0	x_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
0	x_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	
$-w$		0	0	0	0	1	0	1	

由表 2-9 可得：第一阶段的最优解

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{45}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0, 0\right)^T$$

为原线性规划问题的基本可行解。

目标函数的最优值

$\min w = 0$

第二阶段单纯形表，见表 2-10。

表 2-10

c_j			2	3	-5	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	
3	x_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	
2	x_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
$-z$		$-\frac{102}{7}$	0	0	$-\frac{50}{7}$	$-\frac{1}{7}$	

由表 2-10 可得原线性规划问题的最优解

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{45}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

目标函数最优值

$$\max z = \frac{102}{7}$$

此线性规划问题具有唯一最优解。

解(2) 解法一：大M法

将上述问题化为标准型,并加入人工变量,得

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 - Mx_7 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 + x_7 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 M 是一个任意大的正数。

对于此线性规划问题,用单纯形表进行计算,见表 2-11。

表 2-11

c_j			10	15	12	0	0	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	9	[5]	3	1	1	0	0	0	$\frac{9}{5}$
0	x_5	15	-5	6	15	0	1	0	0	—
$-M$	x_7	5	2	1	1	0	0	-1	1	$\frac{5}{2}$
$-z$		$5M$	$2M+10$	$M+15$	$M+12$	0	0	$-M$	0	
10	x_1	$\frac{9}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	9
0	x_5	24	0	9	[16]	1	1	0	0	$\frac{3}{2}$
$-M$	x_7	$\frac{7}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	-1	1	$\frac{7}{3}$
$-z$		$\frac{7}{5}M-18$	0	$9-\frac{1}{5}M$	$\frac{3}{5}M+10$	$-\frac{2}{5}M-2$	0	$-M$	0	
10	x_1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{39}{80}$	0	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{80}$	0	0	
12	x_3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{16}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	
$-M$	x_7	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{43}{80}$	0	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{80}$	-1	1	
$-z$		$\frac{M}{2}-33$	0	$\frac{27}{8}-\frac{43}{80}M$	0	$-\frac{21}{8}-\frac{7}{16}M$	$-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}M$	$-M$	0	

由表 2-11 可得：

所有的非基变量的检验数均为负,而存在人工变量 $x_7 = \frac{1}{2}$ 。所以原线性规划问题无可行解。

解法二：两阶段法
 第一阶段的数学模型为

$$\begin{aligned} \min w &= x_7 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 + x_7 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于此线性规划问题,用单纯形表进行计算,见表 2-12。

表 2-12

c_j			0	0	0	0	0	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	9	[5]	3	1	1	0	0	0	$\frac{9}{5}$
0	x_5	15	-5	6	15	0	1	0	0	—
1	x_7	5	2	1	1	0	0	-1	1	$\frac{5}{2}$
$-w$		-5	-2	-1	-1	0	0	1	0	
0	x_1	$\frac{9}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	9
0	x_5	24	0	9	[16]	1	1	0	0	$\frac{3}{2}$
1	x_7	$\frac{7}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	-1	1	$\frac{7}{3}$
$-w$		$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	
0	x_1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{39}{80}$	0	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{80}$	0	0	
0	x_3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{16}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	0
1	x_7	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{43}{80}$	0	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{80}$	-1	1	
$-w$		$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{43}{80}$	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{80}$	1	0	

由表 2-12 可得：所有的非基变量的检验数均为正。而存在人工变量 $x_7 = \frac{1}{2}$ 。所以原线性规划问题无可行解。

2.7 求下述线性规划问题目标函数 z 的上界 $\bar{z}^*$ 和下界 $\underline{z}^*$

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中： $1 \leq c_1 \leq 3, 4 \leq c_2 \leq 6, 8 \leq b_1 \leq 12, 10 \leq b_2 \leq 14, -1 \leq a_{11} \leq 3, 2 \leq a_{12} \leq 5, 2 \leq a_{21} \leq$

$4, 4 \leq a_{22} \leq 6$ 。

解 z 的上界 $\bar{z}^*$ 可由如下的线性规划模型求得

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 \\ &\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

加入松弛变量 x_3, x_4 , 得到该线性规划问题的标准型

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ &\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

计算结果如表 2-13 所示。

表 2-13

c_j			3	6	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	-1	2	1	0	6
0	x_4	7	1	2	0	1	$\frac{7}{2}$
$c_j - z_j$			3	6	0	0	
0	x_3	5	-2	0	1	-1	
6	x_2	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	
$c_j - z_j$			0	0	0	-3	

由表 2-13 可知, 最优解 $\mathbf{X}^* = \left(0, \frac{7}{2}, 5, 0\right)^T$, 目标函数 z 的上界 $\bar{z}^* = 6 \times \frac{7}{2} = 21$ 。由于存在非基变量检验数 $\sigma = 0$, 故该线性规划问题有无穷多最优解。

z 的下界 $\underline{z}^*$, 可由如下的线性规划模型得到

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ &\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

加入松弛变量 x_3, x_4 , 可以得到该线性规划问题的标准型

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ &\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

计算结果如表 2-14 所示。

表 2-14

c_j			1	4	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	8	3	5	1	0	$\frac{8}{5}$
0	x_4	5	2	3	0	1	$\frac{5}{3}$
$c_j - z_j$			1	4	0	0	
4	x_2	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	
0	x_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	1	
$c_j - z_j$			$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	

由表 2-14 可知,最优解为 $\mathbf{X}^* = (0, \frac{8}{5}, 0, \frac{1}{5})^T$, 目标函数 z 的下界 $z^* = 0 + 4 \times \frac{8}{5} = \frac{32}{5}$ 。

2.8 表 2-15 是某求极大化线性规划问题计算得到的单纯形表。表中无人工变量, $a_1, a_2, a_3, d, c_1, c_2$ 为待定常数。试说明这些常数分别取何值时, 以下结论成立。

- (1) 表中解为唯一最优解;
- (2) 表中解为最优解, 但存在无穷多最优解;
- (3) 该线性规划问题具有无界解;
- (4) 表中解非最优, 为对解改进, 当换入变量为 x_1 , 换出变量为 x_6 。

表 2-15

基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	d	4	a_1	1	0	a_2	0
x_4	2	-1	-3	0	1	-1	0
x_6	3	a_3	-5	0	0	-4	1
$c_j - z_j$		c_1	c_2	0	0	-3	0

解 (1) 当解为唯一最优解时, 必有 $d \geq 0, c_1 < 0, c_2 < 0$ 。

(2) 当解为最优解, 但存在无穷多最优解时, 必有 $d \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 = 0$ 或 $d \geq 0, c_1 = 0, c_2 \leq 0$ 。

(3) 当该问题为无界解时, 必有 $d \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 > 0$ 且 $a_1 \leq 0$ 。

(4) 当解为非最优, 为对解进行改进, 当换入变量为 x_1 , 换出变量为 x_6 , 必有 $d \geq 0, c_1 > 0$, 且 $c_1 \geq c_2, a_3 > 0, \frac{3}{a_3} < \frac{d}{4}$ 。

2.9 某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司机和乘务人员数如下:

班次	时 间	所需人数
1	6: 00 — 10: 00	60
2	10: 00 — 14: 00	70
3	14: 00 — 18: 00	60

4	18:00 — 22:00	50
5	22:00 — 2:00	20
6	2:00 — 6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间区段一开始时上班,并连续工作八小时,问该公交线路至少配备多少名司机和乘务人员。列出这个问题的线性规划模型。

解 设 $x_k (k=1,2,3,4,5,6)$ 表示 x_k 名司机和乘务人员第 k 班次开始上班。由题意,有

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_6 + x_1 \geq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 70 \\ x_2 + x_3 \geq 60 \\ x_3 + x_4 \geq 50 \\ x_4 + x_5 \geq 20 \\ x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.10 某糖果厂用原料 A、B、C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中 A、B、C 含量,原料成本,各种原料的每月限制用量,三种牌号糖果的单位加工费及售价如表 2-16 所示。

表 2-16

	甲	乙	丙	原料成本 (元/千克)	每月限制用量 (千克)
A	$\geq 60\%$	$\geq 15\%$		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	$\leq 20\%$	$\leq 60\%$	$\leq 50\%$	1.00	1 200
加工费(元/千克)	0.50	0.40	0.30		
售 价	3.40	2.85	2.25		

问该厂每月应生产这三种牌号糖果各多少千克,使该厂获利最大? 试建立这个问题的线性规划的数学模型。

解 设 x_1, x_2, x_3 分别为甲糖果中 A、B、C 的成分; x_4, x_5, x_6 分别为乙糖果中 A、B、C 的成分; x_7, x_8, x_9 分别为丙糖果中 A、B、C 的成分。由题意,有

$$\begin{aligned} \max z &= (3.40 - 0.50) \times (x_1 + x_2 + x_3) + (2.85 - 0.40) \times (x_4 + x_5 + x_6) + \\ &\quad (2.25 - 0.30) \times (x_7 + x_8 + x_9) - 2.00 \times (x_1 + x_4 + x_7) - \\ &\quad 1.50 \times (x_2 + x_5 + x_8) - 1.00 \times (x_3 + x_6 + x_9) \end{aligned}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 0.6 \\ \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 0.2 \\ \frac{x_4}{x_4 + x_5 + x_6} \geq 0.15 \\ \frac{x_6}{x_4 + x_5 + x_6} \leq 0.6 \\ \frac{x_9}{x_7 + x_8 + x_9} \leq 0.5 \\ x_1 + x_4 + x_7 \leq 2\,000 \\ x_2 + x_5 + x_8 \leq 2\,500 \\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 1\,200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

对上式进行整理得到所求问题的线性规划模型:

$$\begin{aligned} \max z = & 0.9x_1 + 1.4x_2 + 1.9x_3 + 0.45x_4 + 0.95x_5 + 1.45x_6 - \\ & 0.05x_7 + 0.45x_8 + 0.95x_9 \end{aligned}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} -0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.6x_3 \leq 0 \\ -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 \leq 0 \\ -0.85x_4 + 0.15x_5 + 0.15x_6 \leq 0 \\ -0.6x_4 - 0.6x_5 + 0.4x_6 \leq 0 \\ -0.5x_7 - 0.5x_8 + 0.5x_9 \leq 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 \leq 2\,000 \\ x_2 + x_5 + x_8 \leq 2\,500 \\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 1\,200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

2.11 某厂生产三种产品Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ。每种产品要经过A,B两道工序加工。设该厂有两种规格的设备能完成A工序,它们以 A_1, A_2 表示;有三种规格的设备能完成B工序,它们以 B_1, B_2, B_3 表示。产品Ⅰ可在A,B任何一种规格设备上加工。产品Ⅱ可在任何规格的A设备上加工,但完成B工序时,只能在 B_1 设备上加工;产品Ⅲ只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时,原材料费,产品销售价格,各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如下表(表2-17),要求安排最优的生产计划,使该厂利润最大。

表 2-17

设 备	产 品			设备有效台时	满负荷时的 设备费用(元)
	I	II	III		
A_1	5	10		6 000	300
A_2	7	9	12	10 000	321
B_1	6	8		4 000	250
B_2	4		11	7 000	783
B_3	7			4 000	200
原料费(元/件)	0.25	0.35	0.50		
单 价(元/件)	1.25	2.00	2.80		

解 对产品 I 来说,设以 A_1, A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_1, x_2 件,转入 B 工序时,以 B_1, B_2, B_3 完成 B 工序的产品分别为 x_3, x_4, x_5 件;对产品 II 来说,设以 A_1, A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_6, x_7 件,转入 B 工序时,以 B_1 完成 B 工序的产品为 x_8 件;对产品 III 来说,设以 A_2 完成 A 工序的产品为 x_9 件,则以 B_2 完成 B 工序的产品也为 x_9 件。由上述条件可得

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5$$

$$x_6 + x_7 = x_8$$

由题目所给的数据可得到解此问题的数学模型为

$$\max z = (1.25 - 0.25) \times (x_1 + x_2) + (2 - 0.35) \times (x_6 + x_7) +$$

$$(2.8 - 0.5) \times x_9 - \frac{300}{6\,000} \times (5x_1 + 10x_6) -$$

$$\frac{321}{10\,000} \times (7x_2 + 9x_7 + 12x_9) - \frac{250}{4\,000} \times (6x_3 + 8x_8) -$$

$$\frac{783}{7\,000} \times (4x_4 + 11x_9) - \frac{200}{4\,000} \times 7x_5$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 5x_1 + 10x_6 \leq 6\,000 \\ 7x_2 + 9x_7 + 12x_9 \leq 10\,000 \\ 6x_3 + 8x_8 \leq 4\,000 \\ 4x_4 + 11x_9 \leq 7\,000 \\ 7x_5 \leq 4\,000 \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \\ x_6 + x_7 = x_8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

解之得最优解为 $\mathbf{X}^* = (1\,200, 230, 0, 859, 571, 0, 500, 500, 324)^T$ 。最优值为 1 147 元。

2.12 考虑某玩具厂现金流的管理问题。已知该玩具厂未来一年每月都有需要支出的应付账款,同时也会回收应收账款;相关数据如表 2-18 所示。

表 2-18

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
应付账款	10	8	5	6	10	12	20	4	5	4	3	2
应收账款	5	6	4	8	6	18	6	6	3	2	18	20

为了应付现金流的需求,该厂可能需要借助于银行借款。有两种方式:(1)为期一年的长期借款,即于上一年年末借一年期贷款,一次得到全部贷款额,从下一年度1月起每月未偿还1%的利息,于12月底偿还本金和最后一期;(2)为期一个月的短期借款,即可以每月初获得短期贷款,于当月底偿还本金和利息,假设月利率为1.4%。当该厂有多余现金时,也可以以短期存款的方式获取部分利息收入。假设该厂只能每月初存入,月末取出,月息0.4%。

请构建规划问题帮助玩具厂管理现金流。请问玩具厂最少需要花费的财务成本是多少?在最乐观的情况下,玩具厂最少需要花费的财务成本是多少?

解 定义如下决策变量

x : 为期一年的长期借款金额

y_i : 第 i 月初的短期借款金额, $i=1,2,\dots,12$ 。

s_i : 第 i 月初的短期存款金额, $i=1,2,\dots,12$ 。

目标函数为追求一年长期借款金额与12个月的短期借款金额之和最小。

$$\min z = x + y_1 + y_2 + \dots + y_{12}$$

约束条件为

$$1 \text{ 月初: } x + y_1 - s_1 = 10 - 5$$

$$2 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_1 + 1.004s_1 + y_2 - s_2 = 8 - 6$$

$$3 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_2 + 1.004s_2 + y_3 - s_3 = 5 - 4$$

$$4 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_3 + 1.004s_3 + y_4 - s_4 = 6 - 8$$

$$5 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_4 + 1.004s_4 + y_5 - s_5 = 10 - 6$$

$$6 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_5 + 1.004s_5 + y_6 - s_6 = 12 - 18$$

$$7 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_6 + 1.004s_6 + y_7 - s_7 = 20 - 6$$

$$8 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_7 + 1.004s_7 + y_8 - s_8 = 4 - 6$$

$$9 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_8 + 1.004s_8 + y_9 - s_9 = 5 - 3$$

$$10 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_9 + 1.004s_9 + y_{10} - s_{10} = 4 - 2$$

$$11 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_{10} + 1.004s_{10} + y_{11} - s_{11} = 3 - 18$$

$$12 \text{ 月初: } -0.01x - 1.014y_{11} + 1.004s_{11} + y_{12} - s_{12} = 2 - 20$$

加上非负约束: $x \geq 0, y_i \geq 0, s_i \geq 0, i=1,2,\dots,12$ 。

2.13 考虑某资源配置问题:

$$\begin{aligned} \max z &= 70x_1 + 120x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \text{资源 1: } 9x_1 + 4x_2 + x_3 &= 360 \\ \text{资源 2: } 4x_1 + 5x_2 + x_4 &= 200 \\ \text{资源 3: } 3x_1 + 10x_2 + x_5 &= 300 \\ \text{非负性: } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中, x_1 表示产品 A 的产量, x_2 表示产品 B 的产量。通过单纯形表计算得到的最终结果如表 2-19 所示。

表 2-19

$c_j \rightarrow$			70	120	0	0	0	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	84	0	0	1	$-78/25$	$29/25$	
70	x_1	20	1	0	0	$2/5$	$-1/5$	
120	x_2	24	0	1	0	$-3/25$	$4/25$	
4280			0	0	0	-13.6	-5.2	

请在上述表格的基础上回答如下问题:

(1) 产品 B 的单位利润有可能发生变化, 请问它在什么范围内变化时, 最优解保持不变?

(2) 上述结果表明资源 2 和资源 3 是瓶颈资源。假设可以以 10 元的单位价格购买部分资源 2, 请问购买资源 2 是否划算? 如果划算, 最多可以购买多少单位的资源 2?

解 (1) 由于 c_2 是基变量 x_2 的系数, 因此, 当 c_2 改变量, 将影响所有的检验数, 因此, 需要重新计算检验数。

可以采用在单纯形表中计算检验数的方法, 在上表中用 c_2 代表 x_2 在目标中的系数, 则可得表 2-20。

表 2-20

c_j			70	120	0	0	0	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Q_i
0	x_3	84	0	0	1	$-\frac{28}{25}$	$\frac{29}{25}$	
70	x_1	20	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	
c_2	x_2	24	0	1	0	$-\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	
4280			0	$120 - c_2$	0	$-\frac{140}{5} + \frac{3}{25}c_2$	$\frac{70}{5} - \frac{4c_2}{25}$	

则由
$$\begin{cases} 120 - c_2 \leq 0 \\ -\frac{140}{5} + \frac{3}{25}c_2 \leq 0 \\ \frac{70}{5} - \frac{4}{25}c_2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{则} \quad \begin{cases} c_2 \geq 120 \\ c_2 \leq \frac{700}{3} \\ c_2 \geq \frac{350}{4} \end{cases} \quad 120 \leq c_2 \leq \frac{700}{3}$$

因此当产品 B 的单位利润在 $\left[120, \frac{700}{3}\right]$ 时, 最优解不变。

(2) 假设原材料 B 的可用量变为 $200 + \lambda$, 保持基变量为 (x_3, x_1, x_2) 时, 基变量的取值为

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 84 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} + B^{-1} \Delta b = \begin{bmatrix} 84 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{78}{25} & \frac{29}{25} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 84 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{78}{25}\lambda \\ \frac{2}{5}\lambda \\ -\frac{3}{25}\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 - \frac{78}{25}\lambda \\ 20 + \frac{2}{5}\lambda \\ 24 - \frac{3}{25}\lambda \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

要保持最优基不变,只需满足所有基变量的取值为非负即可

$$\begin{cases} 84 - \frac{78}{25}\lambda > 0 \\ 20 + \frac{2}{5}\lambda > 0 \\ 24 - \frac{3}{25}\lambda > 0 \end{cases}$$

即 $-50 < \lambda < 26.9$

故最多可以购买 26.9 单位的资料 2。

【典型例题精解】

1. 用单纯形法求解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 2x_1 + x_2 \\
 \text{s. t. } &\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

解 化为标准型

$$\begin{aligned}
 \max z &= 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\
 \text{s. t. } &\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

单纯形法迭代如表 2-21 所示。

表 2-21

$c_j \rightarrow$			2	1	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	15	0	5	1	0	0	—
0	x_4	24	[6]	2	0	1	0	4
0	x_5	5	1	1	0	0	1	5
$-z$		0	-2	-1	0	0	0	
0	x_3	15	0	5	1	0	0	3
2	x_1	4	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	12
0	x_5	1	0	$\left[\frac{2}{3}\right]$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{3}{2}$
z		8	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	
0	x_3	$\frac{15}{2}$	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{2}$	
2	x_1	$\frac{7}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	
1	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	
$-z$		$-\frac{17}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	

得到最优解 $\mathbf{X}^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$, 目标函数值 $z^* = \frac{17}{2}$ 。

2. 对于线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 用二阶段法求解。

(2) 用大 M 法求解。

解 首先化为标准型:

令 $x'_1 = -x_1, x_3 = x'_3 - x''_3$, 加入松弛变量 x_4 得

$$\begin{aligned} \min z &= -2x'_1 - x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 \\ \text{(LP) s. t. } &\begin{cases} x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 = 4 \\ x'_1 + x_2 - x'_3 + x''_3 + x_4 = 6 \\ x_j, x'_j, x''_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 用二阶段法求解

引进人工变量 x_5 构造辅助问题(LP')

$$\begin{aligned} \min w &= x_5 \\ \text{(LP') s. t. } &\begin{cases} x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_5 = 4 \\ x'_1 + x_2 - x'_3 + x''_3 + x_4 = 6 \\ x_j, x'_j, x''_j \geq 0, \text{ 其中 } x_5 \text{ 为人工变量} \end{cases} \end{aligned}$$

第一阶段：求解辅助问题(LP')见表 2-22。

表 2-22

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x'_1	x_2	x'_3	x''_3	x_4	x_5	
1	x_5	4	[1]	1	1	-1	0	1	4
0	x_4	6	1	1	-1	1	1	0	6
w		4	-1	-1	-1	1	0	0	
0	x'_1	4	1	1	1	-1	0	1	
0	x_4	2	0	0	-2	2	1	-1	
w		0	0	0	0	0	0	1	

第二阶段：删除人工变量和人工目标函数,添入原问题目标函数,求解原问题(LP),见表 2-23。

表 2-23

$c_j \rightarrow$			-2	-1	2	-2	0	θ_i
C_B	X_B	b	x'_1	x_2	x'_3	x''_3	x_4	
-2	x'_1	4	1	1	1	-1	0	—
0	x_4	2	0	0	-2	[2]	1	1
$-z$		-8	0	1	4	-4	0	
-2	x'_1	5	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	
-2	x''_3	1	0	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	
$-z$		12	0	1	0	0	2	

因此,该线性规划问题的最优解 $(x_1, x_2, x_3)^T = (-5, 0, -1)^T$,目标函数值 $z^* = -12$ 。

(2) 用大 M 法求解

添加人工变量 x_5 后,原问题(LP)化为

$$\begin{aligned} \min z &= -2x'_1 - x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 + Mx_5 + 0 \cdot x_4 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_5 = 4 \\ x'_1 + x_2 - x'_3 + x''_3 + x_4 = 6 \\ x_j, x'_j, x''_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

上述问题求解迭代过程如表 2-24 所示。

表 2-24

$c_j \rightarrow$			-2	-1	2	-2	0	M	θ_i
C_B	X_B	b	x'_1	x_2	x'_3	x''_3	x_4	x_5	
M	x_5	4	[1]	1	1	-1	0	1	4
0	x_4	6	1	1	-1	1	1	0	6
$-z$		-4M	-M-2	-M-1	-M+2	-M-2	0	0	

续表

$c_j \rightarrow$			-2	-1	2	-2	0	M	θ_i
C_B	X_B	b	x'_1	x_2	x'_3	x''_3	x_4	x_5	
-2	x'_1	4	1	1	1	-1	0	1	-
0	x_4	2	0	0	-2	[2]	1	-1	1
z		8	0	2	4	-4	0	$-M+2$	
-2	x'_1	5	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
-2	x''_3	1	0	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$-z$		12	0	1	0	0	2	M	

最优解为 $\mathbf{X}^* = (-5, 0, -1)^T$, 目标函数值为 $z^* = -12$ 。

3. 用单纯形法求解：

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解 首先将该问题化为标准型：

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

在初始表中选 x_4, x_5 为基变量。初始及迭代表如表 2-25 所示。

表 2-25

c_j			2	3	1	0	0	θ	入基变量为 x_2 出基变量为 x_5
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_4	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	3	
0	x_5	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	$\frac{9}{4}$	
$-z$		0	2	3↑	1	0	0		
c_j			2	3	1	0	0	θ	入基变量为 x_1 出基变量为 x_4
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	1←	
3	x_2	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	9	
$-z$		$-\frac{27}{4}$	$\frac{5}{4}$ ↑	0	$-\frac{17}{4}$	0	$-\frac{9}{4}$		

续表

c_j			2	3	1	0	0	θ	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	-1	4	-1		
3	x_2	2	0	-1	2	-1	1		
	$-z$	-8	0	0	-3	-5	-1		

至第三个表,非基变量 x_3, x_4, x_5 的检验数为 $-3, -5, -1$,均小于 0,迭代结束,得最优解为

$$\mathbf{X}^*=(1,2,0)^T$$

$$z^*=8$$

4. 求解线性规划问题(大 M 法)

$$\max z=3x_1-x_2-x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1-2x_2+x_3\leqslant 11 \\ -4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3 \\ -2x_1+x_3=1 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

解 引进松弛变量 x_4, x_5 ,使之标准化:

$$\max z=3x_1-x_2-x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5=3 \\ -2x_1+x_3=1 \end{cases}$$

再引进人工变量 x_6, x_7 配齐基变量,其中引入 M :

$$\max z=3x_1-x_2-x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5-Mx_6-Mx_7$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=3 \\ -2x_1+x_3+x_7=1 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,7) \end{cases}$$

易看出,基变量为 x_4, x_6, x_7 。作初始表,如表 2-26,并在表上进行基变换,注意:基变量(人工变量)所对应的检验数为零,而非基变量检验数为 $\sigma_j=c_j+\sum_{i=1}^m a_{in}\cdot M$,即规范化。在迭代表中,所有人工变量已不是基变量及所有检验数为非正数,于是停止迭代。原线性规划问题的最优解为: $x_1^*=4, x_2^*=1, x_3^*=9$,最优值 $z^*=2$ 。

表 2-26

c_j			3	-1	-1	0	0	M	M	θ_i
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
$-M$	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
$-M$	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	$\leftarrow 1$

续表

c_j			3	-1	-1	0	0	M	M	θ_i
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$-z$	$4M$	$6M+3$	$M-1$	$3M-1$	0	$-M$	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	-
$-M$	x_6	1	0	1	0	0	-1	1	-2	$1 \leftarrow$
-1	x_3		-2	0	1	0	0	1	1	
	$-z$	$M+1$	1	$M-1 \uparrow$	0	0	0	0	$-3M+1$	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	$\leftarrow 4$
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	-
-1	x_3	1	$-2 \uparrow$	0	1	0	0	0	1	-
	$-z$	2	1	0	0	0	-1	$-M+1$	$-M-1$	
3	x_1	4	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{5}$	
-1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
-1	x_3	9	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	
	$-z$	-2	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	$-M+\frac{2}{3}$	

【考研真题解答】

1. (15 分)求解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解 用图解法,见图 2-7。

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 && \text{①} \\ &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 && \text{②} \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 && \text{③} \\ x_1 - x_2 \geq 0 && \text{④} \\ x_1 \geq 5 && \text{⑤} \\ x_2 \geq 0 && \text{⑥} \end{cases} \end{aligned}$$

求得问题的最优解为 $\mathbf{X}^* = (5, 2.5)^T$, 目标函数的值为 $z^* = 17.5$ 。

2. (15 分)对于线性规划问题:

$$\min f = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 写出此问题的对偶问题;

(2) 求出此问题和它的对偶问题的最优解和最优值。

解 (1) 对偶问题为

$$\max z = 2y_1 + 4y_2 + 5y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_3 \leq 6 & \text{①} \\ 2y_2 + 2y_3 \leq 4 & \text{②} \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 7 & \text{③} \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

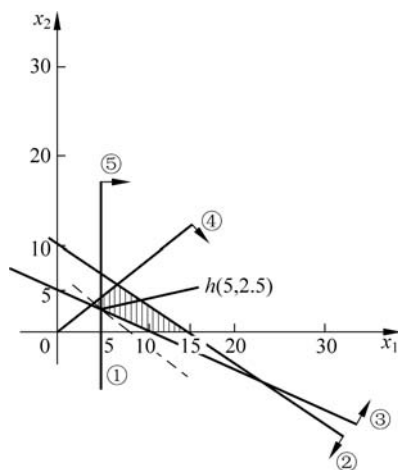


图 2-7

(2) 引入松弛变量 y_4, y_5, y_6 , 将对偶问题标准化得

$$\max z = 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 = 6 \\ 2y_2 + 2y_3 + y_5 = 4 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_6 = 7 \\ y_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, 6) \end{cases}$$

用单纯形表(如表 2-27)迭代,求得最优解为

$$\begin{cases} \mathbf{Y}^* = (1, 0, 2, 7, 0, 0)^T \\ z^* = 12 \end{cases}$$

因为

$$y_1^* = 1 > 0, y_3^* = 2 > 0$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

又因为式①为 $-1 < 6$, 取不等号, 即 $x_1 = 0$ 。

$$\text{所以} \quad \begin{cases} 3x_3 = 2 \\ 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{11}{6} \\ x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

所以

$$\mathbf{X}^* = \left(0, \frac{11}{6}, \frac{2}{3}\right)^T, \quad z^* = 12$$

表 2-27

基	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	θ_i
y_4	6	1	3	-1	1	0	0	—
y_5	4	0	2	[2]	0	1	0	$2 \leftarrow$
y_6	7	3	1	2	0	0	1	$\frac{7}{2}$

续表

基	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	θ_i
$-z$	0	2	4	$5 \uparrow$	0	$0 \downarrow$	0	
y_4	8	1	4	0	1	$\frac{1}{2}$	0	8
y_3	2	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	—
y_6	3	[3]	-1	0	0	-1	1	$1 \leftarrow$
$-z$	-10	$2 \uparrow$	-1	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	
y_4	7	0	$\frac{13}{3}$	0	1	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	
y_3	2	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	
y_1	1	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$-z$	-12	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	

3. (5分)在单纯形迭代中,任何出基的变量在紧接着的下一迭代中,_____ (会或不会)立即再入基。

解 不会。

4. (10分)将下列线性规划问题化为标准型。

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解 令 $x_2 = x'_2 - x''_2$ 且 $x'_2, x''_2 \geq 0$, 则标准型为

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x'_2 - x''_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x'_2 + x''_2 = 3 \\ x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. (10分)设某投资者有 30 000 元可供为期四年的投资。现有下列五个投资机会可供选择。

A: 在四年内,投资者可在每年年初投资,每年每元投资可获利 0.2 元,每年获利后可将本利重新投资。

B: 在四年内,投资者应在第一年年初或第三年年初投资,每两年每元投资可获利 0.5 元,两年后获利。然后可将本利再重新投资。

C: 在四年内,投资者应在第一年年初投资,三年后每元投资可获利 0.8 元。获利后可将本利重新投资。这项投资最多不超过 20 000 元。

D: 在四年内,投资者应在第二年年初投资,两年后每元投资可获利 0.6 元。获利后可将本利重新投资。这项投资最多不超过 15 000 元。

E: 在四年内,投资者应在第一年年初投资,四年后每元获利 1.7 元,这项投资最多不超过 20 000 元。

投资者在四年内应如何投资,使他在四年后所获利润达到最大? 写出这个问题的线性规划模型,不用求解。

解 设 A, B, C, D, E 五个投资机会为项目 1, 2, 3, 4, 5, 设 x_i 分别为第一年初给第 i 个项目的投资额, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, x_{12}, x_{42} 分别为第二年初给第一个, 第四个项目的投资额。 x_{13}, x_{23} 分别为第三年初给第一个, 第二个项目的投资额, x_{14} 为第四年给第一个项目的投资额。则有

$$\begin{aligned} \max z = & 0.2[x_{13}(1+0.2) + x_{31}(1+0.8) + x_{42}(1+0.6)] + 0.5x_{23} + 1.7x_{51} \\ & \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{51} \leq 30\,000 \\ x_{42} = x_{11}(1+0.2) - x_{12} \\ x_{23} = x_{12}(1+0.2) + x_{21}(1+0.5) - x_{13} \\ x_{31} \leq 20\,000 \\ x_{42} \leq 15\,000 \\ x_{51} \leq 20\,000 \end{cases} \\ & \text{以上变量取值非负} \end{aligned}$$

6. (5 分) 如果把约束方程 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 5 \end{cases}$ 标准化为 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$ 时, x_1 是____变量, x_2 是____变量, x_3 是____变量, x_4 是____变量, x_5 是____变量。

解 决策; 决策; 松弛; 剩余; 人工。

7. (5 分) LP 的基本可行解与基本解的区别是_____。

解 基本可行解的分量 ≤ 0 。

8. (5 分) 求目标最大的 LP 中, 有无穷最优解的条件是_____。

解 判别式 σ_j 中至少有一个为零。

9. (6 分) 对于平面中的某 LP 的约束集合(见图 2-8)。

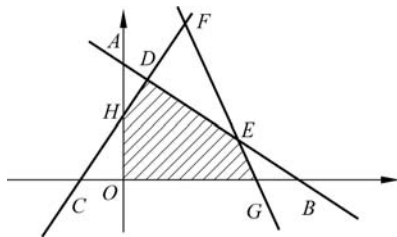


图 2-8

其可行解为_____; 基本解为_____; 基本可行解为_____。

解 OGEDH 所围阴影区; 所有直线及坐标轴的交点; O, G, E, D, H 五个点。

10. (15 分) 某厂生产 A, B, C 三种产品, 每单位产品需花费的资源如下。

A: 需要 1h 技术准备, 10h 加工, 3kg 材料。

B: 需要 2h 技术准备, 4h 加工, 2kg 材料。

C: 需要 1h 技术准备, 5h 加工, 1kg 材料。

可利用的技术准备总时间为 100h, 加工总时间为 700h, 材料总量为 400kg, 考虑到销售时对销售量的优惠, 利润定额确定如表 2-28 所示。

表 2-28

产品 A		产品 B		产品 C	
销售量(件)	单位利润(元)	销售量(件)	单位利润(元)	销售量(件)	单位利润(元)
0~40	10	0~50	6	0~100	5
40~100	9	50~100	3	100 以上	4
100~150	8	100 以上	4		
150 以上	7				

试确定利润最大的产品品种方案(模型),并讨论用何种方法可以解决此问题(不计算)。

解 x_{A_1} = 产品 A 以单位利润 10 元的出售数;

x_{A_2} = 产品 A 以单位利润 9 元的出售数;

x_{A_3} = 产品 A 以单位利润 8 元的出售数;

x_{A_4} = 产品 A 以单位利润 7 元的出售数;

x_{B_1} = 产品 B 以单位利润 6 元的出售数;

x_{B_2} = 产品 B 以单位利润 4 元的出售数;

x_{B_3} = 产品 B 以单位利润 3 元的出售数;

x_{C_1} = 产品 C 以单位利润 5 元的出售数;

x_{C_2} = 产品 C 以单位利润 4 元的出售数。

$$\max z = 10x_{A_1} + 9x_{A_2} + 8x_{A_3} + 7x_{A_4} + 6x_{B_1} + 4x_{B_2} + 3x_{B_3} + 5x_{C_1} + 4x_{C_2}$$

$$\begin{cases} 1 \sum_{j=1}^4 x_{A_j} + 2 \sum_{j=1}^3 x_{B_j} + 1 \sum_{j=1}^2 x_{C_j} \leq 100 \\ 10 \sum_{j=1}^4 x_{A_j} + 4 \sum_{j=1}^3 x_{B_j} + 5 \sum_{j=1}^2 x_{C_j} \leq 700 \\ 3 \sum_{j=1}^4 x_{A_j} + 2 \sum_{j=1}^3 x_{B_j} + 1 \sum_{j=1}^2 x_{C_j} \leq 400 \\ 0 < x_{A_1} \leq 40, 40 < x_{A_2} \leq 100, 100 < x_{A_3} \leq 150, x_{A_4} > 150; 0 < x_{B_1} \leq 50, \\ 50 < x_{B_2} \leq 100, x_{B_3} > 100; 0 < x_{C_1} \leq 100, x_{C_2} > 100 \end{cases}$$

11. (10 分)求解如下线性规划问题:

$$\min f(x) = x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

并说明使最优基保持不变时, b_1 和 c_1 的允许变化范围。

解

$$\min z = -10,$$

$$\mathbf{X}^* = (4, 0, 1, 0, 0)^T$$

$$-2 \leq b_1 \leq +\infty, -5 \leq c_1 \leq +\infty$$

12. (10 分)求解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ |x_2 - 1| \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ 无限制} \end{cases} \end{aligned}$$

解 见图 2-9。

由图解法可得最优解为 $\mathbf{X}^* = (9, -2)^T$, 目标函数值为 $z^* = 9 - 2 = 7$ 。

13. (6 分)考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + \beta x_2 \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

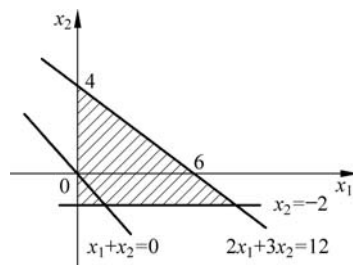


图 2-9

试讨论 β 在什么取值范围时,该问题:

- (1) 有唯一最优解;
- (2) 有无穷多最优解;
- (3) 不存在有界最优解。

解 (1) $\beta > 0$ 时,有唯一解;
 (2) $\beta = 0$ 时,有无穷多最优解;
 (3) $\beta < 0$ 时,不存在有界最优解。