第 3 章

案例导读

模糊系统应用

本章导读

模糊数学是继经典数学、统计数学之后的一个新发展。正如范围统计数学将数学应用范围从必然现象领域扩大到随机现象领域一样，模糊数学将数学的应用从精确现象领域扩大到模糊现象领域。作为一门新兴学科，模糊数学已初步应用于模糊控制、模糊识别、模糊聚类分析、模糊决策、模糊评判、系统理论、信息检索、医学、生物学等方面。在气象、结构力学、控制、心理学等方面已取得丰硕的研究成果。本章重点讲述模糊数学在模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判以及模糊控制等方面的应用。

3.1 模糊聚类分析

对事物用数学的方法按一定要求进行分类，称为聚类分析。一个确切的类别划分可由等价关系来确定。但是，现实的类别划分问题往往伴随着模糊性，即考虑的不是有无关系，而是关系的深浅程度，这就是具有模糊关系的分类问题。

在模糊数学产生之前，聚类分析已是数理逻辑多元分析的一个分支，然而现实的分类问题往往伴有模糊性。例如，环境污染分类、春天连阴预报、临床症状资料分类、岩石分类等。对这些伴有模糊性的聚类问题，用模糊数学语言来表达更为自然。

3.1.1 模糊聚类的基本概念

定义 3.1（模糊等价矩阵） 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$ 是 n 阶模糊矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{R}$ 满足

（1）自反性：$\boldsymbol{I}\leqslant\boldsymbol{R}(\Leftrightarrow r_{ii}=1)$；

（2）对称性：$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}(\Leftrightarrow r_{ij}=r_{ji})$；

（3）传递性：$\boldsymbol{R}^2\leqslant\boldsymbol{R}(\Leftrightarrow\max\{(r_{ik}\wedge r_{kj})\mid 1\leqslant k\leqslant n\}\leqslant r_{ij})$；

则称 $\boldsymbol{R}$ 为模糊等价矩阵。

定理 3.1 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶模糊等价矩阵$\Leftrightarrow\forall\lambda\in[0,1]$，$\boldsymbol{R}_\lambda$ 是等价的 Boole 矩阵。

定理 3.1 的意义在于：将模糊等价矩阵转换为等价的 Boole 矩阵，可以得到有限论域上的普通等价关系，而等价关系是可以分类的。因此，当 λ 在$[0,1]$上变动时，由 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 可以得到不同的分类。

定理 3.2 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶模糊等价矩阵，则 $\forall 0\leqslant\lambda<\mu\leqslant 1$，$\boldsymbol{R}_\mu$ 所决定的分类中的每一个类

是$\boldsymbol{R}_\lambda$ 所决定的分类中的某个子类。该定理表明，当$\lambda<\mu$ 时，$\boldsymbol{R}_\mu$ 的分类是$\boldsymbol{R}_\lambda$ 分类的加细，当λ 由 1 变到 0 时，$\boldsymbol{R}_\lambda$ 的分类由细变粗，形成一个动态的聚类图。

定义 3.2（模糊相似矩阵）　设$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶模糊矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{R}$ 满足

（1）自反性：$\boldsymbol{I}\leqslant\boldsymbol{R}$；

（2）对称性：$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}$。

则称 $\boldsymbol{R}$ 为模糊相似矩阵。

定理 3.3　设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶模糊相似矩阵，则存在一个最小的自然数 $k(k\leqslant n)$，使得 $\boldsymbol{R}^k$ 为模糊等价矩阵，且对一切大于 k 的自然数 l，恒有 $\boldsymbol{R}^l=\boldsymbol{R}^k$。$\boldsymbol{R}^k$ 称为 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包矩阵，记为 $t(\boldsymbol{R})$。

在第 2 章中，我们提到了传递闭包关系，并给出了普通模糊矩阵求传递闭包的方法（定理 2.3，定理 2.4，定理 2.5）。由于在模糊聚类分析中，我们要用到模糊等价矩阵，因此，此处对如何求模糊相似矩阵的传递闭包矩阵（即如何将模糊相似矩阵转换为模糊等价矩阵）进行讲解。

对于 n 阶的模糊相似矩阵 $\boldsymbol{R}$，采用“平方法”求传递闭包：

$$\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}^2\rightarrow\boldsymbol{R}^4\rightarrow\cdots\rightarrow\boldsymbol{R}^{2^k}$$
$$2^{k-1}<n\leqslant 2^k$$
$$k-1<\log_2 n\leqslant k$$

因此，对于模糊相似矩阵，只需要$\lfloor\log_2 n\rfloor+1$ 次计算，即可得到传递闭包。因此，当 $n=15$ 时，只需要计算 4 次。

例 3.1　设有模糊相似矩阵 $\boldsymbol{R}$，采用平方法求传递闭包。

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0.2&0.5&0.7\\0.2&1&0.8&0.4\\0.5&0.8&1&0.6\\0.7&0.4&0.6&1\end{bmatrix}$$

解：

$$\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0.5&0.6&0.7\\0.5&1&0.8&0.6\\0.6&0.8&1&0.6\\0.7&0.6&0.6&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^4=\boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{R}^2=\begin{bmatrix}1&0.6&0.6&0.7\\0.6&1&0.8&0.6\\0.6&0.8&1&0.6\\0.7&0.6&0.6&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^8=\boldsymbol{R}^4\circ\boldsymbol{R}^4=\begin{bmatrix}1&0.6&0.6&0.7\\0.6&1&0.8&0.6\\0.6&0.8&1&0.6\\0.7&0.6&0.6&1\end{bmatrix}$$

因此，$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^4$。

3.1.2　模糊聚类的具体步骤

模糊聚类分析的步骤如下。

步骤 1：建立原始数据矩阵，并进行数据标准化；

步骤 2：建立模糊相似关系（模糊相似矩阵）；

步骤 3：改造模糊相似关系为模糊等价关系（平方法求传递闭包）；

步骤 4：依据模糊等价矩阵实施聚类；

步骤 5：画出动态聚类图。

下面我们按照以上步骤分别介绍。

步骤 1：建立原始数据矩阵，并进行数据标准化

建立原始数据矩阵，就是根据问题描述，将每个向量组合成矩阵形式。

数据标准化是指依据数据间量纲不同，消除量纲不同带来的计算差异。若量纲相同，可以省略此步骤。

1）最大值标准化

最大值标准化公式（M_j 表示 j 列最大值）如式(3.1)所示：

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}}{M_j} \tag{3.1}$$

除了最大值标准化公式，还有其他方法：标准差标准化、极差正规化、极差标准化等。

2）标准差标准化（式(3.2)）

对于第 i 个变量进行标准化，就是将 x_{ij} 换成 x'_{ij}，即

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{S_j}\quad (1\leqslant j\leqslant m) \tag{3.2}$$

其中

$$\bar{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij},S_j=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}$$

3）极差正规化（式(3.3)）

$$x''_{ij}=\frac{x'_{ij}-\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{x'_{ij}\}}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{x'_{ij}\}-\min\limits_{1\leqslant j\leqslant i}\{x'_{ij}\}} \tag{3.3}$$

4）极差标准化（式(3.4)）

$$\begin{aligned}x'_{ij}&=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{\max\{x_{ij}\}-\min\{x_{ij}\}}\\ \bar{x}_j&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\end{aligned} \tag{3.4}$$

步骤 2：建立模糊相似关系

建立模糊相似关系有很多方法，选择哪一个方法可以视实际情况而定。常用的方法有：夹角余弦法、相关系数法、最大最小法、算术平均最小法、几何平均最小法、绝对值指数法、绝对值减数法等。下面分别来介绍几种方法。

1）夹角余弦法（式(3.5)）

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}x_{jk}^2}} \tag{3.5}$$

2）相关系数法（式(3.6)）

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}|x_{ik}-\bar{x}_i||x_{jk}-\bar{x}_j|}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_{ik}-\bar{x}_i)^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_{jk}-\bar{x}_j)^2}} \tag{3.6}$$

其中

$$\bar{x}_i=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{i_k},\quad \bar{x}_j=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{j_k}$$

3）最大最小法（式(3.7)）

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\min(x_{ik},x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}\max(x_{ik},x_{jk})} \tag{3.7}$$

4）算术平均最小法（式(3.8)）

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\min(x_{ik},x_{jk})}{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}+x_{jk})} \tag{3.8}$$

5）几何平均最小法（式(3.9)）

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\min(x_{ik},x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\cdot x_{jk})} \tag{3.9}$$

6）绝对值指数法（式(3.10)）

$$r_{ij}=\mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|} \tag{3.10}$$

7）绝对值减数法（式(3.11)）

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 1-c\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}| & i\neq j\end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $0<c<1$。

除上述方法外，还可请专家或由多人打分再平均取值。

选择上述哪个方法好，要按实际情况而定。在实际应用时，最好采用多种方法，选取分类最符合实际的结果。

步骤 3：改造模糊相似关系为模糊等价关系

改造相似关系为等价关系时，需要将相似矩阵改造成为模糊等价矩阵，采用平方法求出 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包 $t(\boldsymbol{R})$，$t(\boldsymbol{R})$就是所求的模糊等价矩阵。

步骤 4：依据模糊等价矩阵实施聚类

根据模糊等价矩阵中不同的 λ 值，给出 λ-截矩阵，从而进行类别划分。

步骤 5：画出动态聚类图

例 3.2 每个环境单元包括空气、水分、土壤、作物四个要素。环境单元的污染状况由污染物在四要素中含量的超限度来描述。

现有五个环境单元，它们的污染数据如下：

设 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，其中 $x_1=(5,5,3,2)$，$x_2=(2,3,4,5)$，$x_3=(5,5,2,3)$，$x_4=(1,5,3,1)$，$x_5=(2,4,5,1)$，

试对 U 进行聚类。

解：

(1) 根据问题描述给出原始矩阵 $\boldsymbol{X}$，由于 $\boldsymbol{X}$ 量纲相同，此处不需要进行数据标准化处理。

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}5&5&3&2\\2&3&4&5\\5&5&2&3\\1&5&3&1\\2&4&5&1\end{pmatrix}$$

(2) 按步骤 2 中的方法 7)建立模糊相似关系，取 $c=0.1$，得模糊相似矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0.1&0.8&0.5&0.3\\0.1&1&0.1&0.2&0.4\\0.8&0.1&1&0.3&0.1\\0.5&0.2&0.3&1&0.6\\0.3&0.4&0.1&0.6&1\end{pmatrix}$$

(3) 用平方法求传递闭包

$$\boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}1&0.3&0.8&0.5&0.5\\0.3&1&0.2&0.4&0.4\\0.8&0.2&1&0.5&0.3\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.3&0.6&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^4=\begin{pmatrix}1&0.4&0.8&0.5&0.5\\0.4&1&0.4&0.4&0.4\\0.8&0.4&1&0.5&0.5\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^8=\begin{pmatrix}1&0.4&0.8&0.5&0.5\\0.4&1&0.4&0.4&0.4\\0.8&0.4&1&0.5&0.5\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}^4$$

所以，$\boldsymbol{R}^4$ 是传递闭包，也就是所求的模糊等价矩阵。

(4) 根据 λ 取值确定聚类结果。

当 $\lambda=1$ 时，U 分为五类：$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\}$；

当 $\lambda=0.8$ 时，U 分为四类：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$；

当 $\lambda=0.6$ 时，U 分为三类：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4,x_5\}$；

当 $\lambda=0.5$ 时，U 分为两类：$\{x_1,x_3,x_4,x_5\},\{x_2\}$；

当 $\lambda=0.4$ 时，U 分为一类：$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$。

(5) 画出动态聚类图(如图 3-1 所示)。

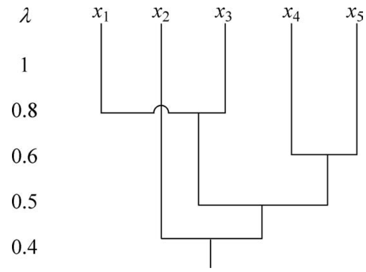


图 3-1 例 3.2 的动态聚类图

例 3.2 中，用到了(5)个步骤，但有时，部分步骤是可以省略的。我们来看例 3.3，该案例中省略了步骤 1，直接计算相似关系即可。

例 3.3 设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$表示由父亲、儿子、

女儿、邻居、母亲五人组成的一个集合,请陌生人对这五人按相貌相似程度进行模糊分类。

解:

由于本题直接按照相貌的相似程度打分,并规定了范围,因此直接计算相似关系即可。

(1)求相似关系:

对五人中任意两人按相貌相似程度打分,用[0,1]上的数表示。于是,得到模糊相似矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.6 & 0.1 & 0.2\\0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.85\\0.6 & 0.8 & 1 & 0 & 0.9\\0.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.1\\0.2 & 0.85 & 0.9 & 0.1 & 1\end{pmatrix}$$

自己与自己的相貌完全相像,故对角线上的元素均为1;

$r_{35}=r_{53}=0.9$,表示母女相像的程度为90%;

$r_{14}=r_{41}=0.1$,表示父亲与邻居的相貌相像程度为10%。

由于

$$\boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.8\\0.8 & 1 & 0.85 & 0.2 & 0.85\\0.8 & 0.85 & 1 & 0.2 & 0.9\\0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2\\0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.2 & 1\end{pmatrix}\not\subseteq\boldsymbol{R}$$

即 $\boldsymbol{R}$ 不具有传递性,故不是模糊等价矩阵。

(2)求传递闭包:

$$\boldsymbol{R}^4=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.8\\0.8 & 1 & 0.85 & 0.2 & 0.85\\0.8 & 0.85 & 1 & 0.2 & 0.9\\0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2\\0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.2 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}^2$$

因此,$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^2$ 是 U 上的模糊等价矩阵,用它对 U 聚类。

(3)聚类:

当 $\lambda=0.2$ 时,U 分为一类:$\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$;

当 $\lambda=0.8$ 时,U 分为两类:$\{u_1,u_2,u_3,u_5\}$,$\{u_4\}$;

当 $\lambda=0.85$ 时,U 分为三类:$\{u_1\}$,$\{u_2,u_3,u_5\}$,$\{u_4\}$;

当 $\lambda=0.9$ 时,U 分为四类:$\{u_1\}$,$\{u_2\}$,$\{u_3,u_5\}$,$\{u_4\}$;

当 $\lambda=1$ 时,U 分为五类:$\{u_1\}$,$\{u_2\}$,$\{u_3\}$,$\{u_5\}$,$\{u_4\}$。

(4)画出聚类图,如图3-2所示。

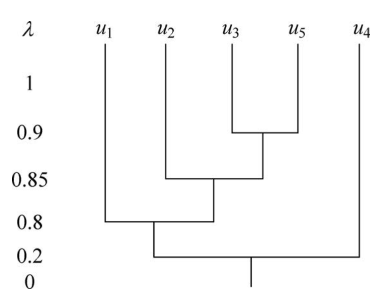


图3-2 例3.3的动态聚类图

当 $\lambda>0.2$ 时,u_4(邻居)就不属于他们(一家)一类,这是符合实际的。

除了以上介绍的模糊聚类方法之外,"编网法"和"最大树法"的应用也较为广泛,本教材中不再详述,感兴趣的同学可查阅资料自行学习。

在聚类过程中,当 $\lambda:1\to0$ 时由模糊等价关系 R 确定的分类所含的元素由少变多,逐步归

并，最后成一类。这个过程形成一个动态聚类图，且这个过程是关系的细化而不是重组。当隶属度越高，关系越紧密，则类多、类小；当隶属度越低，关系越松泛，则类少、类大。

3.2 模糊模式识别

模式识别是指，对某个具体对象识别它属于哪一类别。模式识别的本质特征：一是，事先已知若干标准模式，称为标准模式库；二是，有待识别的对象。

模式识别是科学、工程、经济、社会以至生活中经常遇到并要处理的基本问题。这一问题的数学模式就是：在已知各种标准类型(数学形式化的类型)的前提下，判断识别对象属于哪个类型。对象也要数学形式化，有时数学形式化不能做到完整，或者形式化带有模糊性质，此时识别就要运用模糊数学方法。

所谓模糊模式识别，是指在模式识别中，模式是模糊的，或说标准模式库中提供的模式是模糊的。模糊模式识别的主要任务是让机器模拟人的思维，对有模糊性的客观事物进行识别和分类，如系统自动分拣信件、天气预报等。

模糊模式识别大致有两种方法，一种是直接方法，按“最大隶属原则”归类，主要应用于个体的识别，也称为“点对集”；另一种是间接方法，按“择近原则”归类，一般应用于群体模型的识别，也称为“集对集”。

3.2.1 模式识别原则

本节主要介绍模式识别的基本识别原则，并给出一些简单应用。

1. 最大隶属原则

我们先来讨论两种类型的问题：

第一，设在论域 X 上有若干模糊集：$A_1,A_2,\cdots,A_n\in F(X)$，将这些模糊集视为 n 个标准模式，$x_0\in X$ 是待识别的对象，问 x_0 应属于哪个标准模式 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$？

第二，设 $A\in F(X)$为标准模式，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$ 为 n 个待选择的对象，问最优录用对象是哪一个 x_i？

显然，第一类问题是：对象有一个，标准模式有多个，对象如何归属的问题。例如，一个学生分数 82 分，成绩等级为“优”“良”“中”“及格”“不及格”五个等级，问该学生属于哪一个等级？第二类问题是：对象有 n 个，标准模式有一个，择优录用的问题。例如，一个工作岗位招工作人员，有多人投简历，该录用哪一个？就属于该类问题。针对以上两类问题，我们介绍两种最大隶属原则。

定义 3.3(**最大隶属原则Ⅰ**) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为给定的论域 U 上的 m 个模糊模式，$u_0\in U$ 为一个待识别对象，若：$A_i(u_0)=\max\{A_1(u_0),A_2(u_0),\cdots,A_n(u_0)\}$，则认为 u_0 优先隶属于模糊模式 A_i，该原则称为最大隶属原则Ⅰ。

定义 3.4(**最大隶属原则Ⅱ**) 设 A 为给定的论域 U 上的模糊模式，$u_1,u_2,\cdots,u_n$ 为 U 中的 n 个待识别对象，若：$A(u_i)=\max\{A(u_1),A(u_2),\cdots,A(u_n)\}$，则认为 u_i 优先隶属于模糊模式 A，该原则称为最大隶属原则Ⅱ。

例 3.4 考虑人的年龄问题，分为年轻、中年、老年三类，分别对应三个模糊集 A_1,A_2,A_3，设论域 $U=(0,100]$，且对 $x\in(0,100]$，有

$$A_1(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 20\\ 1-2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\leqslant 30\\ 2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2, & 30<x\leqslant 40\\ 0, & 40<x\leqslant 100\end{cases}\qquad A_3(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50\\ 2\left(\dfrac{x-50}{20}\right)^2, & 50<x\leqslant 60\\ 1-2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\leqslant 70\\ 1, & 70<x\leqslant 100\end{cases}$$

$$A_2(x)=1-A_1(x)-A_3(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 20\\ 2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\leqslant 30\\ 1-2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2, & 30<x\leqslant 40\\ 1, & 40<x\leqslant 50\\ 1-2\left(\dfrac{x-50}{20}\right)^2, & 50<x\leqslant 60\\ 2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\leqslant 70\\ 0, & 70<x\leqslant 100\end{cases}$$

A_1, A_2, A_3 的隶属函数如图 3-3 所示：

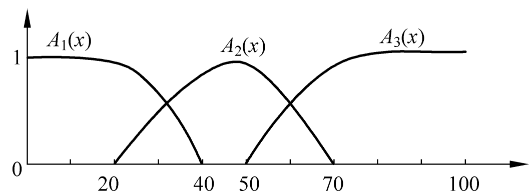


图 3-3　隶属函数

解：按照最大隶属原则Ⅰ计算：

(1) 若某人 35 岁，即 $x=35$，$A_1(35)=0.125$，$A_2(35)=0.875$，$A_3(35)=0$，可见 35 岁的人应该是中年人。

(2) 若某人 65 岁，即 $x=65$，$A_1(65)=0$，$A_2(65)=0.125$，$A_3(65)=0.875$，可见 65 岁的人应该是老年人。

例 3.5　设论域 $U=\{x_1, x_2, x_3\}$(三名学生的学习成绩)，在 U 上确定一个模糊集 $A=$“优”，若三个学生的英语成绩分别为 $x_1=78$，$x_2=84$，$x_3=92$，根据英语成绩从三名学生中招聘一人做翻译，应优先招聘谁？

$$A(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 80\\ \dfrac{x-80}{10}, & 80<x\leqslant 90\\ 1, & 90<x\leqslant 100\end{cases}$$

解：按照最大隶属原则Ⅱ计算：

$A(x_1)=A(78)=0$

$A(x_2)=A(84)=\dfrac{84-80}{10}=0.4$

$A(x_3)=A(92)=1$

$A(x_3)$ 最大，因此优先招聘 x_3。

2. 择近原则

定义 3.5(择近原则) 设 $A_i, B \in F(U)(i=1,2,\cdots,n)$,若存在 i,使

$$N(A_i, B)=\max\{N(A_1, B), N(A_2, B), \cdots, N(A_n, B)\}$$

则认为 B 与 A_i 最贴近,即判定 B 与 A_i 为一类。该原则称为择近原则。

可见,要从一群模糊集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中,判定 B 归于 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的哪一类(A_i 为已知),即当识别对象是“模糊集”而不是单个元素时,采用择近原则,即计算 B 与 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的贴近度,贴近度最大的两个模糊集被识别为一类。

贴近度是描述模糊集之间彼此靠近程度的指标,是我国学者汪培庄教授提出的,由于研究的问题不同,贴近度也有不同的定义形式。

定义 3.6(贴近度的一般定义) 设 $A, B \in F(U)$,A 与 B 的贴近度见式(3.12)。

$$\sigma_0(A, B)=\frac{1}{2}[A \circ B+(1-A \otimes B)] \tag{3.12}$$

其中,“$\circ$”的计算规则为“先合取,再析取”(“先取小,再取大”);“$\otimes$”的计算规则为“先析取,再合取”(“先取大,再取小”)。

常见的贴近度计算公式还有如下几种:

1) 最小最大贴近度(见式(3.13))

$$\sigma_1(A, B)=\frac{\sum_{k=1}^{n}(A(x_k) \wedge B(x_k))}{\sum_{k=1}^{n}(A(x_k) \vee B(x_k))} \tag{3.13}$$

2) 最小平均贴近度(见式(3.14))

$$\sigma_2(A, B)=\frac{2\sum_{k=1}^{n}(A(x_k) \wedge B(x_k))}{\sum_{k=1}^{n}(A(x_k)+B(x_k))} \tag{3.14}$$

3) 海明贴近度(见式(3.15))

$$\sigma_3(A, B)=1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|A(x_k)-B(x_k)| \tag{3.15}$$

4) 欧几里得贴近度(见式(3.16))

$$\sigma_4=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}(A(x_k)-B(x_k))^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.16}$$

例 3.6 现有茶叶等级标准样品五种:A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,待识别的茶叶模型 B,依据贴近度原则确定 B 的型号。取反映茶叶质量的因素集为论域 $U=\{$条索,色泽,净度,汤色,香气,滋味$\}$。假定 U 上的模糊集:

$A_1=(0.5,0.4,0.3,0.6,0.5,0.4)$ $A_2=(0.3,0.2,0.2,0.1,0.2,0.2)$

$A_3=(0.2,0.2,0.2,0.1,0.1,0.2)$ $A_4(0,0.1,0.2,0.1,0.1,0.1)$

$A_5=(0,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1)$ $B=(0.4,0.2,0.1,0.4,0.5,0.6)$

解:利用贴近度的一般定义(3.12)计算可得:

$$\sigma_0(A_1, B)=\frac{1}{2}[0.5+(1-0.3)]=0.6$$

$$\sigma_0(A_2,B)=\frac{1}{2}[0.3+(1-0.2)]=0.55$$

$$\sigma_0(A_3,B)=\frac{1}{2}[0.2+(1-0.2)]=0.5$$

$$\sigma_0(A_4,B)=\frac{1}{2}[0.1+(1-0.2)]=0.45$$

$$\sigma_0(A_5,B)=\frac{1}{2}[0.1+(1-0.1)]=0.5$$

按择近原则，可以确定 B 为 A_1 型茶叶。

最大隶属原则和择近原则是模糊模式识别的基本方法，在许多模糊性问题中都有广泛的应用。

3.2.2 模式识别的直接方法

对事物进行直接识别时，所依据的是最大隶属原则。

例 3.7 通货膨胀识别：设论域 $U=\{u\mid u\in U,u\geqslant 0\}$，它表示指数集。对 $u\in U$，u 表示物价上涨 $u\%$。通货膨胀状态可分成五个类型：通货稳定，轻度通货膨胀，中度通货膨胀，重度通货膨胀和恶性通货膨胀。这五个类型依次用 U 上的模糊集 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 表示，根据统计资料分别取它的隶属函数为

$$A_1(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 5\\ e^{\frac{-(u-5)^2}{3^2}}, & u>5\end{cases}$$

$$A_2(u)=e^{\frac{-(u-10)^2}{5^2}}$$

$$A_3(u)=e^{\frac{-(u-20)^2}{7^2}}$$

$$A_4(u)=e^{\frac{-(u-30)^2}{9^2}}$$

$$A_5(u)=\begin{cases}e^{\frac{-(u-50)^2}{15^2}}, & 0\leqslant u\leqslant 50\\ 1, & u>50\end{cases}$$

问 $u_1=8$，$u_2=40$，相对隶属于哪种类型？

解：按照最大隶属原则Ⅰ计算：

$A_1(8)=0.3679$，$A_2(8)=0.8521$，$A_3(8)=0.0529$，$A_4(8)=0.0025$，$A_5(8)=0.0004$，$A_1(40)\triangleq 0$，$A_2(40)\triangleq 0$，$A_3(40)=0.0003$，$A_4(40)=0.2910$，$A_5(40)=0.6412$。

其中，记号 $\triangleq 0$ 表示数值非常小。

由最大隶属原则，$u_1=8$ 应相对隶属于 A_2，即当物价上涨 8%时，应视为轻度通货膨胀；$u_2=40$ 应相对隶属于 A_5，即应视为恶性通货膨胀。

3.2.3 模式识别的间接方法

在上面介绍的直接识别方法中，所要识别的对象是单个情况，但在现实生活中有时要识别的对象并不是单个确定的元素，而是论域上的子集或模糊集。这时，直接识别方法便失去作

用，需要采用择近原则，进行间接识别。对于择近原则，本书第 3.2.1 节已介绍过，这里就不再赘述。只举例做进一步分析。

例 3.8 动物学家将食肉目动物分为猫科和犬科，而猫科（记为 R_1）和犬科（记为 R_2）的划分主要靠一些主要的特征，令论域 U 为特征集，$U=\{$吻长，舌上刺长，腰部柔韧度，长跑时间$\}$。

假定 U 上模糊集为 $R_1=(0.2,0.9,0.9,0.2)$，$R_2=(0.7,0,0.3,0.9)$。

今有一种食肉动物 A 被生物学家发现其属性为 $A=(0.5,0.1,0.6,0.8)$，试确定 A 是猫科动物还是犬科动物。

解：利用最小最大贴近度式(3.13)计算：

$$\sigma_1(R_1,A)=\frac{(0.2\wedge 0.5)+(0.9\wedge 0.1)+(0.9\wedge 0.6)+(0.2\wedge 0.8)}{(0.2\vee 0.5)+(0.9\vee 0.1)+(0.9\vee 0.6)+(0.2\vee 0.8)}$$

$$=\frac{0.2+0.1+0.6+0.2}{0.5+0.9+0.9+0.8}=0.355$$

$$\sigma_1(R_2,A)=\frac{(0.7\wedge 0.5)+(0\wedge 0.1)+(0.3\wedge 0.6)+(0.9\wedge 0.8)}{(0.7\vee 0.5)+(0\vee 0.1)+(0.3\vee 0.6)+(0.9\vee 0.8)}$$

$$=\frac{0.5+0+0.3+0.8}{0.7+0.1+0.6+0.9}=0.696$$

按择近原则，可以确定 A 属于犬科动物。

该案例比较粗糙，一种新物种归属是要经过动物学家的深入研究和探讨的，但这并不影响对模糊模式识别的择近原则的理解。

在实际应用中，首先要建立模糊集的隶属函数，然后才应用模式识别原则进行识别。下面通过三角形的识别，学习确定隶属函数的方法并掌握模糊识别的步骤。

例 3.9 三角形识别：在机器自动识别课题中，常把问题归结为几何图形的识别，而几何图形又常常划分为若干三角形图形，如等腰三角形 I，直角三角形 R，等腰直角三角形 IR，等边三角形 E 和非典型三角形 T。现实问题中的等腰三角形往往不是标准的等腰三角形，即带有不同程度的模糊性，所以，它的模式可用模糊集表示。其他三角形类似。

现给定一具体三角形，其内角为 65°，35°，80°。试确定它属于上述类型的哪一类。

解：该问题并未给出五个模糊集的隶属函数，因此需要根据问题定义建立隶属函数后再进行模式识别。

(1) 首先确定这五种类型的模糊集的隶属函数，三角形论域

$$U=\{(A,B,C)\mid A+B+C=180^\circ,A\geqslant B\geqslant C\}$$

其中，A,B,C 为三角形三个内角的度数，任意三角形 $u=(A,B,C)$，待识别的三角形记为 $u_0=(65^\circ,35^\circ,80^\circ)$。上述五类三角形是 U 上的 F 集，它们的隶属函数分别规定如下。

① 等腰三角形

$$I(u)=1-\frac{1}{60}\min(A-B,B-C)$$

这样规定的理由是：当 A 与 B（或 B 与 C）愈接近时，三角形 $u=(A,B,C)$ 就愈接近等腰三角形，即隶属度 $I(u)$ 趋近于 1；当 $A=B$ 或 $B=C$（真正等腰）时，隶属度最大，$I(u)=1$；当 $A=120$，$B=60^\circ$，$C=0^\circ$ 时，三角形 $u=(120^\circ,60^\circ,0^\circ)$ 最不等腰（当然，这种情况就不是三角形了），隶属度最小 $I(u)=0$。可见，要确定模糊等腰三角形的隶属函数，必须对等腰三角形的特性了解清楚，根据等腰三角形有两内角相等的特性和它的模糊性（即不完全等腰）的思想，便可得到上述隶属函数的表达式。其他三角形的隶属函数也可以作类似规定。

② 直角三角形　　$R(u)=1-\frac{1}{90}|A-90|$

③ 等腰直角三角形　$IR(u)=I(u)\wedge R(u)$

$$=\min\left\{1-\frac{1}{60}\min(A-B,B-C),1-\frac{1}{90}|A-90|\right\}$$

$$=1-\max\left\{\frac{1}{60}\min(A-B,B-C),\frac{1}{90}|A-90|\right\}$$

④ 等边三角形　　$E(u)=1-\frac{1}{180}(A-C)$

⑤ 非典型三角形　$T=(I\cup R\cup E)^c=I^c\cap R^c\cap E^c$

$$T(u)=\min\{1-I(u),1-R(u),1-E(u)\}$$

$$=\frac{1}{180}\min\{3(A-B),3(B-C),2|A-90|,|A-C|\}$$

(2) 根据最大隶属原则Ⅰ，计算每个值：$I(u_0)=\frac{3}{4}$，$R(u_0)=\frac{8}{9}$，$IR(u_0)=\frac{3}{4}$，$E(u_0)=\frac{3}{4}$，$T(u_0)=\frac{1}{9}$，最大的为 $R(u_0)$，第二类直角三角形，因此判定 u_0 为近似直角三角形。

3.3　模糊综合评判

在实际工作中，对一个事物的评价常常涉及多个因素或多个指标，因此需要根据多个因素对事物做出综合评价，也称为综合评判。所谓“综合”是指评判条件包含多个因素或多个指标；所谓“评判”是指按照给定的条件对事物的优劣、好坏进行评比和判别。因此，综合评判就是要对受多个因素影响的事物做出全面评价。

模糊逻辑通过使用模糊集合工作，是一种解决不精确、不完全信息的方法，其最大优势在于能够自然地表达和处理人类思维的模糊性，因此在多因素综合评判，尤其是评判涉及模糊因素时，用模糊数学的方法进行评判是非常好的选择。

3.3.1　基本概念

模糊综合评判就是以模糊数学为基础，应用模糊关系合成的原理，将一些边界不清、不易定量的因素定量化，从多个因素对被评价事务隶属等级状况进行综合性评判的一种方法。它具有结果清晰、系统性强的优势，适合解决各种非确定性问题。模糊综合评判是对受多种因素影响的事物做出全面评价的一种十分有效的多因素决策方法，又称为模糊综合决策或模糊综合评价。

关于模糊综合评判，有以下几个基本概念。

(1) 因素集(评判指标集)：与被评判事物相关的因素有 n 个，记作 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$；

(2) 评语集(评判的结果)：设所有可能出现的评语有 m 个，记作 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，也称为评判集，它们的元素个数和名称需要根据实际问题人为主观确定；

(3) 权重集(指标的权重)：由于各种因素所处的地位和作用不同，影响力也不一样，权重当然也不同，因而评判也就不同，权重一般用 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$来表示。

模糊综合评判分为两类：一级模糊综合评判和多级模糊综合评判。

3.3.2 一级模糊综合评判

20 世纪 80 年代初，汪培庄提出了综合评判模型，该模型简单实用，因此被迅速应用于经济、工业、农业及生产的方方面面。本节讲解一级模糊综合评判的具体计算步骤。

模糊综合评判的数学模型由三个要素（因素集、评语集、权重集）组成，一级模糊综合评判的步骤分为以下六步：

（1）确定因素集（评判指标集），构成因素集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$；

（2）确定评语集（评判的结果），构成评判集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$；

（3）进行单因素评判，得到每个单因素向量：$r_i=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})$；

（4）构造综合评判矩阵：$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$；

（5）确定权重集（指标的权重），即：评判因素的权重向量 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，权重集表示各种因素的作用和影响力不同；

（6）模糊综合评判：进行$\circ$运算，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}$，并对运算结果归一化，根据隶属度最大原则得到模糊综合评判结果。

在第(6)步中，关于运算$\circ$，有不同的定义，可得到以下四种不同的模型。

1）主因素决定型——$M(\wedge,\vee)$

$$b_j=\max\{(a_i \wedge r_{ij}),1\leqslant i\leqslant n\} \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

其评判结果只取决于在总评价中起主要作用的那个因素，其余因素均不影响评判结果，此模型比较适用于单项评判最优就能作为综合评判最优的情况。

2）主因素突出型——$M(\cdot,\vee)$

$$b_j=\max\{(a_i\cdot r_{ij}),1\leqslant i\leqslant n\}(j=1,2,\cdots,m)$$

它与模型 $M(\wedge,\vee)$相近，但比模型 $M(\wedge,\vee)$精细些，不仅突出了主要因素，也兼顾了其他因素。此模型适用于模型 $M(\wedge,\vee)$失效（不可区别），需要“加细”的情况。

3）加权平均型——$M(\cdot,+)$

$$b_j=\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot r_{ij}) \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

该模型依权重的大小对所有因素均衡兼顾，比较适用于要求总和最大的情形。

4）均衡平均型——$M(\wedge,+)$

$$b_j=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i \wedge \frac{r_{ij}}{r_0}\right) \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

其中，$r_0=\sum_{k=1}^{m}r_{kj}$。

该模型适用于 $\boldsymbol{R}$ 中元素 r_{ij} 偏大或偏小的情形。

在以上四种模型中，主因素决定型最为常用，本教材案例均采用该模型进行运算。

为了更好地理解以上一级模糊综合评判的数学模型，下面看一个通俗的案例。

例 3.10（食品评判） 所谓“萝卜青菜，各有所爱”，人们对某种食品的喜欢程度受味道、营养、性价比等多个因素影响，且往往受人的主观感受评价影响。

本案例选取如下的因素集、评语集。

(1) 因素集 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$,其中,$u_1$:价格;$u_2$:味道;$u_3$:包装;$u_4$:营养;$u_5$:性价比。

(2) 评语集 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,其中,v_1:很喜欢;v_2:喜欢;v_3:一般;v_4:不喜欢。

(3) 单因素评判。可以请若干顾客,对于某种食品,单就价格表态,如果有20%的人很喜欢,50%的人喜欢,30%的人一般,没有人不喜欢,便可得到

$$u_1=(0.2,0.5,0.3,0)$$

类似地对其他因素进行单因素评判,得到

$$u_2=(0.1,0.3,0.5,0.1)$$

$$u_3=(0,0.1,0.6,0.3)$$

$$u_4=(0,0.4,0.5,0.1)$$

$$u_5=(0.5,0.3,0.2,0)$$

(4) 由上述单因素评判向量,得到综合评判矩阵 $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3 & 0\\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1\\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.3\\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0\end{bmatrix}$$

(5) 确定权重集:有这样一位顾客,他对各因素所持的权重分别为

$$\boldsymbol{A}=(0.1,0.4,0.1,0.3,0.1)$$

(6) 模糊综合评判:采用主因素决定型模型进行运算,可求得该顾客对此种食品的综合评判为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=(0.1,0.3,0.4,0.1)$$

按最大隶属原则,0.4最大,代表评判集中的 v_3"一般",因此对此种食品该顾客感觉"一般"。

也可以对 $\boldsymbol{B}$ 进行归一化,得:

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{0.1}{0.9},\frac{0.3}{0.9},\frac{0.4}{0.9},\frac{0.1}{0.9}\right)=(0.11,0.33,0.44,0.11)$$

此处,$0.9=0.1+0.3+0.4+0.1$。

评判结果不变,对此种食品该顾客感觉"一般"。

3.3.3　多级模糊综合评判

对于一个复杂的系统来说,其评价因素往往是多方面的,且不同因素之间存在着不同的层次,此时应用一级模糊评价模型就很难得出客观的评价结果。在这种情况下,就需要将评价因素集合按照某种属性分成几类,先对每一类进行综合评判,然后再对各类评判结果进行类之间的高层次综合评判,即为多级模糊综合评判。其具体步骤为:

(1) 将因素集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 划分成若干组,得到 $U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$,其中 $U=\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_i$,$U_i\cap U_j=\varnothing(i\neq j)$,称 $U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$ 为第一级因素集。

(2) 设评语集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$,先对第二级因素集 $U_i=\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_l^{(i)}\}$ 的 l 个因素进行单因素评判,得单因素评判矩阵 $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{bmatrix} r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1m}^{(i)} \\ r_{21}^{(i)} & r_{22}^{(i)} & \cdots & r_{2m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{l1}^{(i)} & r_{l2}^{(i)} & \cdots & r_{lm}^{(i)} \end{bmatrix}$$

(3) 设 $U_i=\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_l^{(i)}\}$的权重为 $\boldsymbol{A}_i=(a_1^{(i)},a_2^{(i)},\cdots,a_l^{(i)})$,求得综合评判为

$$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{A}_i\circ\boldsymbol{R}_i(i=1,2,\cdots,k)$$

(4) 再对第一级因素集 $U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$作综合评判:设其权重为 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$,则总评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_k \end{bmatrix}$$

从而得到综合评判为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}$,按最大隶属度原则即可得到相应评语。

如果需要解决的问题,涉及因素过多,它们的权重难以分配;或者是即使确定了权重分配,由于需要满足归一化条件,使得每个因素的权重都非常小,对这类问题,可以采用多级模糊综合评判方法。

例 3.11 某一公司对其中一部门员工进行年终评定,以一名员工评定为例,考虑到本部门工作的性质,共有 18 个指标,评定数据如表 3-1 所示。对于本案例的人事年终考核评定问题,采用二级系统即可解决问题。

(1) 因素集 U 分为两层,将 18 个指标分成:工作绩效(U_1)、工作态度(U_2)、工作能力(U_3)、学习成长(U_4)四个子因素集。

第一层:$U=\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$;

第二层:$U_1=\{u_{11},u_{12},u_{13},u_{14}\}$;$U_2=\{u_{21},u_{22},u_{23},u_{24},u_{25}\}$;

$U_3=\{u_{31},u_{32},u_{33},u_{34},u_{35}\}$;$U_4=\{u_{41},u_{42},u_{43},u_{44}\}$。

其中,u_{11} 代表的是工作绩效中的"工作量";u_{21} 代表的是工作态度中的"责任感"以此类推。

表 3-1 评定数据表

一级指标	二级指标	评价				
		优秀	良好	一般	较差	差
工作绩效	工作量	0.8	0.15	0.05	0	0
	工作效率	0.2	0.6	0.1	0.1	0
	工作质量	0.5	0.4	0.1	0	0
	计划性	0.1	0.3	0.5	0.05	0.05
工作态度	责任感	0.3	0.5	0.15	0.05	0
	团队精神	0.2	0.2	0.4	0.1	0.1
	学习态度	0.4	0.4	0.1	0.1	0
	工作主动性	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1
	满意度	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1

续表

一级指标	二级指标	评　　价				
		优秀	良好	一般	较差	差
工作能力	创新能力	0.1	0.3	0.5	0.1	0
	自我管理能力	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1
	沟通能力	0.2	0.3	0.35	0.15	0
	协调能力	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1
	执行能力	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1
学习成长	勤情评价	0.3	0.4	0.2	0.1	0
	技能提高	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1
	培训参加	0.2	0.3	0.4	0.1	0
	工作提案	0.4	0.3	0.2	0.1	0

（2）评语集 $V=\{$“优秀”,“良好”,“一般”,“较差”,“差”$\}$，构造单因素评判矩阵：

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}0.8 & 0.15 & 0.05 & 0 & 0\\0.2 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0\\0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0\\0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.05 & 0.05\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}0.3 & 0.5 & 0.15 & 0.05 & 0\\0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.1\\0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0\\0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1\\0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0\\0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.15 & 0\\0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_4=\begin{bmatrix}0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0\\0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0\\0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

（3）设二级指标的权重为

$$\boldsymbol{A}_1=[0.4,0.2,0.3,0.1]$$

$$\boldsymbol{A}_2=[0.3,0.2,0.1,0.2,0.2]$$

$$\boldsymbol{A}_3=[0.1,0.2,0.3,0.2,0.2]$$

$$\boldsymbol{A}_4=[0.3,0.2,0.2,0.3]$$

对各因素进行二级模糊综合评价为

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{R}_1=[0.4,0.3,0.1,0.1,0.05]$$

$$\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{A}_2\circ\boldsymbol{R}_2=[0.3,0.3,0.2,0.1,0.1]$$

$$\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{A}_3\circ\boldsymbol{R}_3=[0.2,0.3,0.3,0.15,0.1]$$

$$\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{A}_4\circ\boldsymbol{R}_4=[0.3,0.3,0.2,0.1,0.1]$$

汇总二级综合评判矩阵：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3\\\boldsymbol{B}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4&0.3&0.1&0.1&0.05\\0.3&0.3&0.2&0.1&0.1\\0.2&0.3&0.3&0.15&0.1\\0.3&0.3&0.2&0.1&0.1\end{bmatrix}$$

(4) 设一级指标的权重为

$$\boldsymbol{A}=[0.4,0.3,0.2,0.1]$$

最后，进行一级模糊综合评判：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=[0.4,0.3,0.2,0.1]\circ\boldsymbol{R}=[0.4,0.3,0.2,0.15,0.1]$$

所以根据最大隶属度原则，0.4 最大，因此对该员工评判为“优秀”。

若需要，可以进行归一化处理，不影响评判结果：$\boldsymbol{B}=[0.348,0.261,0.174,0.13,0.087]$。

3.4 模糊控制

模糊数学使迅速处理模糊信息成为可能，它是一座架在精确性经典数学和充满模糊性的现实世界之间的桥梁，为计算机对复杂的模糊问题进行识别与判断提供了理论依据。

传统的计算机，采用的是由“0”和“1”两个数码组成的二进制逻辑；而模糊数学中的逻辑值可以取 0 到 1 之间的一切值，即逻辑判断的结论不仅是“是”与“非”，而是有无限种可能，以这种理论设计出的电子电路，就是模糊集成电路或非逻辑不规则集成电路，由模糊集成电路构成的计算机，就是我们所说的模糊计算机。

模糊计算机按用途可分为控制领域和推理判断领域两类。

模糊计算机用不着进行精确计算，就能很快得出结果，尤其是在某些不需要精确计算的控制场合，优越性十分突出。例如，对汽车自动驾驶系统来说，只要汽车按规定路线行驶，安全、准时到达目的地便可，汽车在行驶过程中的时快时慢、左右颠簸都是允许的，这时用模糊计算机控制，由于运算时间减到最小，不仅能够实现平衡地行驶，而且对剧烈变化的情况也能迅速做出反应。因此模糊控制非常适合需要实时(立即做出反应)控制的场合。模糊控制正广泛用于家用电器，如洗衣机、全自动(包括自动对焦)照相机等，成为新一代家用电器的最明显标志。如摄录一体化摄像机是很走俏的新一代家电产品，它采用模糊控制的自动光圈，使得在逆光条件下也能获得清晰图像。

模糊推理判断，是人类在长期进化过程中同自然界斗争、保存自己、发展自己最为需要的一种能力。原始人听见野兽的吼声会赶紧躲起来，感觉到冷了会找个东西遮体，这只需要模糊推理能力，而用不着精确的计算。即使在科技高度发展的现代社会，模糊推理也是人类在工作、生活中不可缺少的能力。不仅在处理突发事件中随机应变、在面临重大问题需要当机立断时离不开它，而且就是在日常生活中如走路、骑自行车时，也时时刻刻都需要它，否则准要碰得头破血流。

3.4.1　模糊推理

模糊推理是通过模糊规则将输入转换为输出的过程，模糊推理中有大前提、小前提和结论三部分，格式如下。

大前提（规则）：若 x 是 A，那么 y 是 B。

小前提（输入）：x 是 C。

结论（输出）：y 是 D。

通常把大前提（规则）中的“若 x 是 A”称为“前件”，“那么 y 是 B”称为“后件”。观察上面的格式，我们看到在模糊推理中，小前提没有必要与大前提的前件一致（A 与 C 不必完全一致），结论没有必要与大前提的后件一致（B 与 D 不必完全一致），因此，该格式所表达的是一种不精确的推理。

模糊推理中，大前提就是模糊规则，模糊规则中的 A 和 B 都是语言变量的取值，即模糊集合，如“优秀”“瘦”等；小前提是模糊推理系统的输入，C 是一个模糊集合（实际应用中，C 常常是由若干精确输入构成的经典集合，这时 C 相当于若干点隶属度为 1、其余点隶属度为 0 的特殊模糊集合）；结论中 D 就是模糊推理的输出，这个输出也是一个模糊集合。

1. 模糊集合的直积

（1）两个模糊集合的直积：设 A、B 分别为不同论域上的模糊集合，则 A 对 B 的直积定义为 $A\times B=A^{\mathrm{T}}\circ B$

（2）三个模糊集合的直积：$A\times B\times C=(A\times B)\times C=(A\times B)^{\mathrm{L}}\circ C$，其中，L 运算表示将括号内的矩阵按行写成 n 维列向量的形式。

例 3.12　设模糊集合 $A=(0.5\ 0.7\ 0.3)$，$B=(0.8\ 0.2)$，$C=(0.9\ 0.4)$，求 $A\times B\times C$。

解：

$$A\times B=A^{\mathrm{T}}\circ B=\begin{bmatrix}0.5\\0.7\\0.3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2\\0.7 & 0.2\\0.3 & 0.2\end{bmatrix}$$

$$A\times B\times C=(A\times B)^{\mathrm{L}}\circ C=\begin{bmatrix}0.5\\0.2\\0.7\\0.2\\0.3\\0.2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.9 & 0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4\\0.2 & 0.2\\0.7 & 0.4\\0.2 & 0.2\\0.3 & 0.3\\0.2 & 0.2\end{bmatrix}$$

否定词和联接词共有三个：“与”“或”“非”，它们是人们表达意思的常用词，为进行模糊数学的运算，定义其隶属函数如下。

联接词“与”的隶属函数：$\mu_{A\cap B}=\mu_A\wedge\mu_B$；

联接词“或”的隶属函数：$\mu_{A\cup B}=\mu_A\vee\mu_B$；

联接词“非”的隶属函数：$\mu_{\bar{A}}=1-\mu_A$。

2. 假言推理

基本规则：如果已知命题 A（即可以分辨真假的陈述句）蕴涵命题 B，即 $A\rightarrow B$（若 A 则 B）；如今确实 A，则可以得到结论为 B，其逻辑结构如下。

若 A，则 B；

如今 A；

结论 B。

例如：如果 A 看成“小王住院”，B 看成“小王生病”；则若“小王住院”，“小王生病”也真。

命题 A，B 均为精确命题，在模糊情况下，A 与 B 均为模糊命题，代表模糊事件要用模糊假言推理来进行推理。

设 a，b 分别被描述为 X 与 Y 中的模糊子集 A 与 B，$(a) \rightarrow (b)$ 表示从 X 到 Y 的一个模糊关系，它是 $X \times Y$ 的一个模糊子集，记作 $A \rightarrow B$。

例如，如 A 则 B，它的隶属函数为 $A \rightarrow B$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \vee [1 - \mu_A(x)]$$

3. 三种基本类型的模糊条件语句

下面介绍三种普通条件语句及其模糊条件语句的简记形式。

(1) if 条件 then 语句：if A then B。

(2) if 条件 then 语句 1 else 语句 2：if A then B else C。

(3) if 条件 1 and 条件 2 then 语句：if A and B then C。

3.4.2 模糊控制

1. 模糊控制原理

模糊控制是一种以模糊集合论、模糊语言变量以及模糊逻辑推理为数学基础的控制方法，它模拟人的思维，构造一种非线性控制，以满足复杂的不确定过程控制的需要，属于智能控制范畴。

由于模糊控制是对人的思维方式和控制经验的模仿，所以在一定程度上可以认为模糊控制方法是一种实现了用计算机推理代替人脑思维的控制方法。模糊控制之所以可以模仿人的思维和经验，是因为人们在描述控制规则时大量地使用模糊概念。例如在洗衣机的控制中可能有规则：衣服脏则洗衣时间长，洗衣粉投入量多，规则中的“脏”“长”“多”等都属于模糊性的概念。

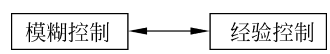


图 3-4 模糊控制

模糊控制：不需要知道被控对象的精确模型，基于人的经验的智能控制，如图 3-4 所示。

2. 模糊控制系统

模糊控制系统通常由模糊控制器、输入输出接口、执行机构、测量装置和被控对象五个部分组成，如图 3-5 所示。

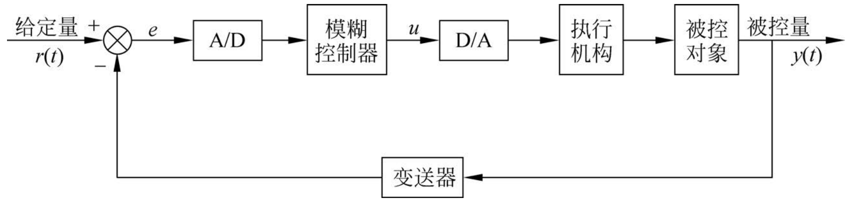


图 3-5 模糊控制系统

1) 模糊控制器

模糊控制器主要包括输入量模糊化接口、知识库、推理机、输出清晰化接口四个部分，如图 3-6 所示。模糊控制器是模糊控制系统的核心部分。

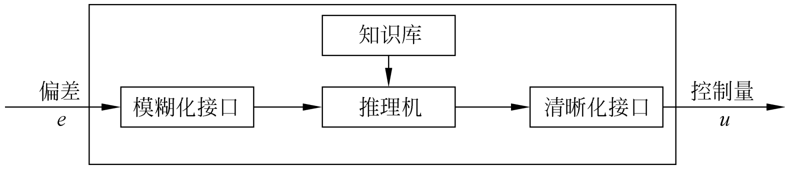


图 3-6　模糊控制器

（1）模糊化接口

只要把物理论域 X 中某值 x 量化为模糊化论域中某元素 y 即实现了模糊化。将真实确定量输入转换为一个模糊矢量。

例如，取值在$[a,b]$的连续量 x 经模糊化公式：$y=\dfrac{12}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$，可变换为取值在$[-6,6]$的连续量 y。然后将 y 模糊化为 7 级，分别用以下 7 个模糊语言变量值表示 y＝{负大，负中，负小，零，正小，正中，正大}＝{NL，NM，NS，ZO，PS，PM，PL}，每个语言变量值所对应的模糊子集如表 3-2 所示。模糊变量 y 不同等级的隶属度值(零可细化为负零和正零)。

表 3-2　变量转换表

	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
正大(PL)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.4	0.7	0.8	1.0
正中(PM)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.3
正小(PS)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.3	0.1	0.0
正零(PZ)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.6	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
负零(NZ)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.6	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
负小(NS)	0.0	0.1	0.3	0.7	1.0	0.7	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
负中(NM)	0.2	0.7	1.0	0.7	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
负大(NL)	1.0	0.8	0.7	0.4	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

（2）知识库

知识库＝数据库＋规则库。

数据库：存放所有输入输出变量的全部模糊子集的隶属度。

① 如果论域为连续域，则存放相应的隶属函数。

② 输入输出变量的测量数据集不属于数据库存放内容。

③ 向推理机提供数据。

规则库：存放全部的模糊控制规则。

① 模糊控制器规则基于专家知识或手动操作经验建立，是按人直觉推理的一种语言表示形式。

② 向推理机提供控制规则。

（3）推理机

推理机根据输入模糊量和知识库完成模糊推理，求解模糊关系方程，从而获得模糊控制量 u。例如：$B_1\ \dfrac{\mu_B(u_1)}{u_1}+\dfrac{\mu_B(u_2)}{u_2}+\cdots+\dfrac{\mu_B(u_n)}{u_n}$。

模糊控制规则供模糊决策使用，它们是对控制生产过程中经验的总结。常见的有以下三种形式：

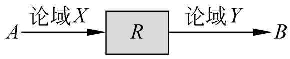
$$\text{if } A \text{ then } B$$

$$\text{if } A \text{ then } B \text{ else } C$$

$$\text{if } A \text{ and } B \text{ then } C$$

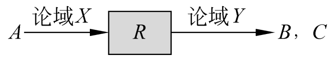
模糊推理：针对不同的模糊规则，利用模糊关系，通过模糊变换，求得模糊控制量。例如针对常见的三种形式：

if A then B



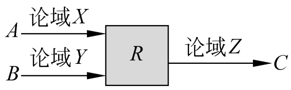
$B = A \circ R$

if A then B else C



$B = A \circ R \mid C = A^C \circ R$

if A and B then C



$C = (A \times B) \circ R$

(4) 清晰化接口

得到模糊控制量后，还必须将其转换为精确量。常用的清晰化方法有以下两种：

① 最大隶属度法

若模糊控制器的输出为 C，则以隶属度最大的元素 μ^*（精确量）作为输出控制量。

$$\mu_C(\mu^*) \geqslant \mu_C(\mu)$$

例：$C = \frac{0.3}{-5} + \frac{0.8}{-4} + \frac{0.5}{-3} + \frac{1}{-2} + \frac{0}{-1}$，则 $\mu^* = -2$。

当有多个隶属度最大的元素时，则取其平均值作为输出控制量。

例：$C = \frac{0.3}{-5} + \frac{1}{-4} + \frac{0.5}{-3} + \frac{1}{-2} + \frac{0}{-1}$，则 $\mu^* = \frac{[-4 + (-2)]}{2} = -3$。

② 加权平均法（重心法）

用隶属度作为加权系数，对元素作加权平均的结果为输出控制量。

$$u^* = \frac{\sum_i \mu(u_i) \cdot u_i}{\sum_i \mu(u_i)}$$

例：$C = \frac{0.2}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$，则 $\mu^* = \frac{0.2 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.8 \times 4 + 1 \times 5 + 0.6 \times 6}{0.2 + 0.6 + 0.8 + 1 + 0.6} = 4.38$。

2) 其他部件

(1) 被控对象：是指一种设备或装置以及它们的群体，也可以是生产的、自然的、社会的、生物的或其他各种状态的转移过程。这些被控对象可以是模糊的或确定的、单变量的或多变量的、有滞后的或无滞后的，也可以是线性的或非线性的、定常的或时变的，以及具有强耦合和干扰等多种情况。

(2) 执行机构：电气类的，如各类交直电动机，伺服电动机，步进电动机等，还有气动或液压类的，如各类气动调节阀和液压马达、液压阀等。

(3) A/D(D/A)：实际系统中，由于多数被控对象的控制量及其可观测状态量是模拟量，因此模糊控制系统与通常的全数字控制系统或混合控制系统一样，必须具有模/数(A/D)、数模(D/A)转换单元，不同的是在模糊控制系统中，还应该有适用于模糊逻辑处理的“模糊化”与“解模糊化”(或“非模糊化”)环节，这部分通常也被看作是模糊控制器的输入/输出接口。

(4) 变送器：是指将被控对象的各种非电量，如流量、温度、压力、速度、浓度等转换为电信号的一类装置。通常由各类数字的或模拟的测量仪器、检测元件或传感器组成。它在模糊控制系统中占有十分重要的地位，其精度往往直接影响整个系统的性能指标，因此要求其精度高、可靠且稳定性好。

3. 确定模糊控制器的结构：如 SISO(单输入单输出)、DISO(双输入单输出)

(1) 确定 E、EC 及控制量 u 的模糊集及其论域。

如：E、EC 和 u 的模糊集：{NB，NM，NS，Z，PS，PM，PB}，E、EC 的论域：{−3，−2，−1，0，1，2，3}，u 的论域：{−4.5，−3，−1.5，0，1.5，3，4.5}。

(2) 建立模糊控制规则(表) if…，and…，then…。

(3) 确定模糊变量的赋值表 (隶属函数)。

(4) 建立模糊控制表。

(5) 去模糊化(重心法等)。

例 3.13　以水位的模糊控制为例，如图 3-7 所示。设有一个水箱，通过调节阀可向内注水和向外抽水。现在的控制任务是设计一个模糊控制器，可以通过调节阀门将水位稳定在固定点附近。按照日常操作经验，可以得到基本的控制规则："若水位高于某一 O 点，则向外排水，差值越大，排水越快"；"若水位低于 O 点，则向内注水，差值越大，注水越快"。

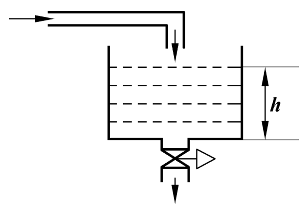


图 3-7　水位模糊控制

确定观测量和控制量：定义理想液位 O 点的水位为 h_0，实际测得的水位高度为 h ，选择液位差 $e=\Delta h=h_0-h$。将当前水位对于 O 点的偏差 e 作为观测量。将可向内注水和向外抽水的调节阀的阀门开度 u 作为控制量。

解：

1) 输入量和输出量的模糊化

将偏差 e 分为五级：负大(NB)，负小(NS)，零(O)，正小(PS)，正大(PB)。根据偏差 e 的变化范围分为七个等级：−3，−2，−1，0，+1，+2，+3。得到水位变化模糊表如表 3-3 所示。

表 3-3　水位变化模糊表

隶属度		变化等级						
		−3	**−2**	**−1**	**0**	**1**	**2**	**3**
模糊集	PB	0	0	0	0	0	0.5	1
	PS	0	0	0	0	1	0.5	0
	O	0	0	0.5	1	0.5	0	0
	NS	0	0.5	1	0	0	0	0
	NB	1	0.5	0	0	0	0	0

控制量 u 为调节阀门开度的变化。将其分为五级：负大(NB)，负小(NS)，零(O)，正小(PS)，正大(PB)。并根据 u 的变化范围分为九个等级：$-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4$。得到控制量模糊划分表如表 3-4 所示。

表 3-4 控制量模糊划分表

隶属度		变化等级								
		−4	**−3**	**−2**	**−1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
模糊集	PB	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1
	PS	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0
	O	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0
	NS	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0
	NB	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0

2）模糊规则的描述

根据日常的经验，设计以下 5 条模糊规则，并用“ if A then B ”形式来描述。

(1)“若 e 负大，则 u 负大”　　if e=NB then u=NB；

(2)“若 e 负小，则 u 负小”　　if e=NS then u=NS；

(3)“若 e 为 0，则 u 为 0”　　if e=0 then u=0；

(4)“若 e 正小，则 u 正小”　　if e=PS then u=PS；

(5)“若 e 正大，则 u 正大”　　if e=PB then u=PB。

根据上述经验规则，可得模糊控制表如表 3-5 所示。

表 3-5 模糊控制表

若(IF)	NBe	NSe	Oe	PSe	PBe
则(THEN)	NBu	NSu	Ou	PSu	PBu

3）模糊关系

模糊控制规则是一个多条语句，它可以表示为 $X \times Y$ 上的模糊子集，即模糊关系 R 可以表示如下：

$$R = (\mathrm{NB}e \times \mathrm{NB}u) \cup (\mathrm{NS}e \times \mathrm{NS}u) \cup (Oe \times Ou) \cup (\mathrm{PS}e \times \mathrm{PS}u) \cup (\mathrm{PB}e \times \mathrm{PB}u)$$

其中，规则内的模糊集运算取交集，规则间的模糊集运算取并集。

下面分步骤来求关系 R。

if NSe then NSu

NBe×NBu=

$$\begin{bmatrix}1\\0.5\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

if NSe then NSu

NSe×NSu=

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

if Oe then Ou

$Oe \times Ou =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

if PSe then PSu

PS$e \times$ PS$u =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1.0 \quad 0.5 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

if PBe then PBu

PB$e \times$ PB$u =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \times [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1.0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

于是由以上五个模糊矩阵求并集(即隶属函数最大值),得模糊关系矩阵为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

4）模糊控制器的输出为误差向量和已确立模糊关系的合成：$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{R}$

例如当误差 $\boldsymbol{e}$ 为 NB 时，即 $\boldsymbol{e}=[1.0\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]$时，控制器输出为

$$\boldsymbol{u}=[1\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]\circ\begin{bmatrix}1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$=[1\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]$$

5）控制量的反模糊化

由模糊决策可知，当误差为负大时，表示实际液位远高于理想液位。

$\boldsymbol{e}=\mathrm{NB}$ 时，控制器的输出为一模糊向量，可表示为

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{-4}+\frac{0.5}{-3}+\frac{0.5}{-2}+\frac{0.5}{-1}+\frac{0}{0}+\frac{0}{+1}+\frac{0}{+2}+\frac{0}{+3}+\frac{0}{+4}$$

如果按“隶属度最大原则”进行反模糊化，则选择控制量为 $u=-4$，即阀门的开度应关大一些，减少进水量。

本章习题

1. 设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，在 U 上存在 F 关系，使

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2\\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9\\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5\\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包，并对 $\lambda=0.8$ 进行分类。

2. 考虑某环保部门对该地区五个环境区域 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$按污染情况进行分类。设每个区域包含空气、水分、土壤、作物四个要素。环境区域的污染情况由污染物在四个要素中的含量超标程度来衡量。设这五个环境区域的污染数据为 $x_1=(80,10,6,2)$，$x_2=(50,1,6,4)$，$x_3=(90,6,4,6)$，$x_4=(40,5,7,3)$，$x_5=(10,1,2,4)$，试用模糊聚类分析（传递闭包法）对 X 进行分类（具体要求：数据标准化采用最大值规格化法，相似矩阵构造用最大最小法）。

3. 通过收集数据，古人类学家对尼安德特人 U 和早期智人 V 的头盖骨总结出两者之间的主要区别，两者之间的区别在于身高、眉骨的高度、小个体的骨骼密度和化石群数量（尼安德特人不太愿意抚养后代及集体生活，所以小个体体质差，这也是其灭绝的主要原因）。

令 $U=(0.9,0.8,0.2,0.2)$，$V=(0.6,0.4,0.7,0.9)$，$A=(0.7,0.3,0.4,0.8)$，其中 A 是一系新发现的古人类化石。问其和上述 U,V 中的哪个更接近。

4. 已知年轻人的模糊集隶属函数为

$$A_1(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

老年人的模糊集的隶属函数为

$$A_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 100\end{cases}$$

现有某人 55 岁，问他相对来说是年老还是年轻？

5. 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的三个模式为 $A=\{0.9,0.1,0.6,0.3\}$，$B=\{0,0.3,0.4,0.8\}$，$C=\{0.1,0.6,0.3,0.4\}$，判别 A 和 B 中哪个与 C 最贴近。

6. 医生对某人健康状况会诊的结果如表 3-6 所示。

表 3-6　医生对某人健康状况会诊的结果

隶属度(r_{ij})	气色(x_1,0.2)	力气(x_2,0.1)	食欲(x_3,0.3)	睡眠(x_4,0.2)	精神(x_5,0.2)
良好(y_1)	0.7	0.5	0.4	0.3	0.4
一般(y_2)	0.2	0.4	0.4	0.5	0.3
差(y_3)	0.1	0.1	0.1	0	0.2
很坏(y_4)	0	0	0.1	0.2	0.1

(1) 请用模糊综合评判法对其健康状况做一个评价。

(2) 若有 10 名医生参加会诊，请问认为某人气色良好、力气一般、精神很坏的医生各有几人？

7. 对某产品质量进行综合评判，考虑由四种因素 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$来评价产品，将质量分为四等 $V=\{\text{Ⅰ},\text{Ⅱ},\text{Ⅲ},\text{Ⅳ}\}$。

设单因素评判是 F 映射：

$$f:U\to F(V)$$

$$f(u_1)=(0.2,0.5,0.2,0.1),\quad f(u_2)=(0.7,0.2,0.1,0)$$

$$f(u_3)=(0,0.4,0.5,0.1),\quad f(u_4)=(0.2,0.3,0.5,0)$$

今有两种因素权重分配：

$$A_1=(0.1,0.2,0.3,0.4),\quad A_2=(0.4,0.35,0.15,0.1)$$

试对某产品质量进行综合评判。

8. 某电热烘干炉依靠人工连续调节外加电压，以便克服各种干扰达到恒温烘干的目的。操作工人的经验是"如果炉温低，则外加电压高，否则电压不很高"。如果炉温很低，试确定外加电压应该如何调节？设 x 表示炉温，y 表示电压，则上述问题可叙述为"若 x 低，则 y 高，否则不很高"。如果 x 很低，试问 y 如何？

习题