第14讲
以形助数——圆锥曲线中几何性质研究

当年笛卡儿发明了直角坐标系，整个数学界为之欢欣鼓舞，大家认为一切几何问题都可以归结为代数问题，但之后数学家费马提出了一个难题：已知$\triangle ABC$，在平面内求点P，如何使得$PA+PB+PC$的值最小. 这里点P就是赫赫有名的费马点. 如果用代数方法，就是求函数$f(x,y)=\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}+\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}+\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}$的最小值. 虽表述不难，但对这一复杂函数求解最小值却极其困难. 其实，如果能巧妙运用几何方法，那么费马点的求解就十分简单，有兴趣的读者可以查阅资料，在此不再赘述.

这也启示我们，代数方法是解析几何问题最常见、最基本的方法，是一类通用方法，解析几何归根结底是几何，如果只用代数方法生搬硬套或盲目计算，解题就会十分烦琐，甚至无法解出. 因此，在计算之前，不妨仔细看一看，图形里有没有什么几何特征，要充分挖掘图形的几何性质及隐含条件，结合平面几何的相关知识求解这么做往往能另辟蹊径，化难为易.

圆锥曲线是高考数学的重难点内容，以其为背景命制的考题常作为解答题甚至压轴题出现. 近年来，一类结合几何知识求解的圆锥曲线问题层出不穷，该类考题的破解需要学生敏锐地发现其几何性质，巧妙地将几何条件转化为代数条件，从而构建解题思路、简化计算过程，这对学生处理综合问题的能力也提出了很高的要求.

本讲以高考题为主，对结合几何性质求解的圆锥曲线问题进行展示和剖析，并作概括和总结. 希望读者能够触类旁通，擦亮双眼，在以后的解题中，不仅能熟练掌握代数方法，而且能巧妙运用几何性质.

挖掘平面几何性质多想少算

14.1 挖掘三角形的几何性质

研究密钥

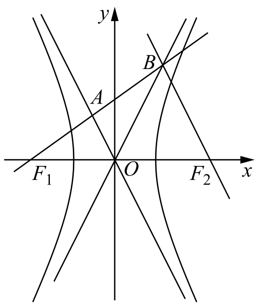
关于直线与圆锥曲线的综合性解答题中常常会有三角形的身影出现，此时不要把注意力一味地集中在求点、求方程的代数运算上，而应先把图形中的点、线、角度、三角形等分析清楚. 在初中我们学习了许多三角形的性质，如三角形中线性质、中位线定理、直角三角形斜边上的中线性质、等腰三角形性质、等边三角形性质、中垂线性质、全等三角形性质、相似三角形性质、三角形的“四心”等. 在解题时，要紧扣题设中的图形特征和数量关系，充分应用三角形的有关性质，便可化难为易、化繁为简.

1. 三角形的中位线的性质

例 14.1 (2019 新课标全国Ⅰ卷理 16)已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为________.

分析 将向量条件转化为几何条件，向量 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$ 说明两条线段平行且等长，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$ 说明两线段垂直，结合双曲线的对称性挖掘几何性质，求出特殊角度.

解析 如图所示，由向量关系可知，$F_1A=AB$，$F_1B\perp F_2B$.



又 $F_1O=F_2O$，可知 OA 是 $\triangle F_1F_2B$ 的中位线，所以 $OA\parallel F_2B$，$OA\perp F_1B$，则 OA 是线段 F_1B 的垂直平分线，故 $\angle F_1OA=\angle BOA$.

又由于直线 OA，OB 为双曲线的两条渐近线，所以 $\angle F_1OA=\angle F_2OB$，$\angle F_1OA=\angle BOA=\angle F_2OB=\frac{\pi}{3}$，则直线 OB 的斜率为 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，即 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，故离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$.

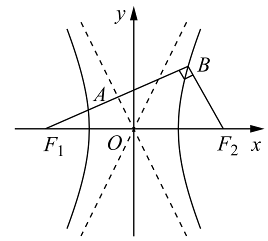
评注 本题充分利用了已知条件的几何性质，通过中位线推出角相等，进而直接计算出 $\angle F_2OB$ 的值，这样其正切值就是渐近线 OB 的斜率，最终计算得出离心率. 本题过程简洁，几乎不需要计算，可见活用几何性质的巧妙性与重要性.

变式 1 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线

与 C 的一条渐近线交于点 A（点 A 在第二象限），且与双曲线的右支交于点 B，若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为________.

分析 求解椭圆或双曲线的离心率一般运用“定义＋几何性质”或“方程＋几何性质”，但凡涉及焦半径 $|PF_1|$，$|PF_2|$ 的关系，优先考虑用“定义＋几何性质”.

解析 **解法一**：如图所示，$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，且 $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 $\triangle F_1BF_2$ 为直角三角形，又 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$A$ 为 F_1B 中点，AO 为 $\triangle F_1BF_2$ 的中位线，所以 $OA\parallel BF_2$，因此 $OA\perp BF_1$，而双曲线的一条渐近线方程为 $y=-\dfrac{b}{a}x$，故 $k_{BF_1}=\dfrac{a}{b}=\tan\angle BF_1F_2$.



又在 $\mathrm{Rt}\triangle BF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=2c$，$\tan\angle BF_1F_2=\dfrac{a}{b}$，则 $\sin\angle BF_1F_2=\dfrac{a}{c}=\dfrac{|BF_2|}{|F_1F_2|}$，故 $|BF_2|=2a$，$|BF_1|=2b$.

根据双曲线定义知 $|BF_1|-|BF_2|=2a$，因此 $2b-2a=2a$，即 $b=2a$，所以 $\dfrac{b}{a}=2$，则 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$.

解法二（利用焦渐距）：由焦渐距为 b 可知 $|F_1A|=b$，又 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，则 A 为 F_1B 的中点，所以 $|F_1B|=2b$.

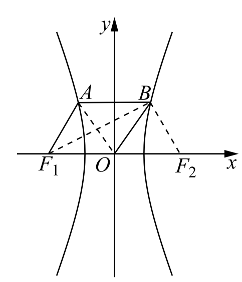
由双曲线定义可得 $|BF_2|=2b-2a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BF_1F_2$ 中，由勾股定理得 $(2b)^2+(2b-2a)^2=(2c)^2$，化简得 $\dfrac{b}{a}=2$，则 $e=\sqrt{5}$.

评注

本题中点 B 在双曲线上，因此 BF_1 和 BF_2 为焦半径，在离心率的计算时优先考虑用定义，即 $|BF_1|-|BF_2|=2a$，通过这一组试题，是否能领悟出求离心率的思路和规律呢？

变式 2 已知双曲线 M：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左焦点为 F_1，A，B 分别为双曲线 M 左、右两支上的两点，O 为坐标原点，若四边形 F_1ABO 为菱形，则双曲线 M 的离心率为（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{3}+1$



解析 定义＋几何性质求解离心率.

如图所示，$|F_1F_2|=2c$，$\angle OBF_2=\angle BOF_2=\angle OF_2B=60^\circ$，且 $\angle F_1BF_2=90^\circ$，则 $|BF_1|=\sqrt{3}c$，$|BF_2|=c$，由双曲线的定义得 $|BF_1|-|BF_2|=2a$，即

$(\sqrt{3}-1)c=2a$，得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

故选 D.

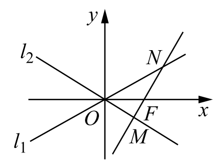
2. 直角三角形的性质

例 14.2 (2018 新课标全国 I 卷理 11)已知双曲线 C:$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，O 为坐标原点，F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M，N. 若△OMN 为直角三角形，则 $|MN|=$(　　).

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

分析 充分挖掘图形的几何性质以获取角度与边长. 由双曲线方程可知，每条渐近线与 x 轴的夹角为30°，两条渐近线的夹角为60°. 由角度可知，△ONF 为等腰三角形，△OMF 为30°与60°的特殊的直角三角形，由此求 $|MN|$ 的长.

解析 如图所示，设 l_1，l_2 是 C 的两条渐近线，方程为 $\dfrac{x}{\sqrt{3}}\pm y=0$.



右焦点为 $F(2,0)$，于是$\angle MOF=\angle NOF=30°$，则$\angle MON=60°$.

因为 l_1，l_2 关于 x 轴对称，所以不失一般性，可设$\angle OMN=90°$.

在 Rt△OMN 中，$\angle ONF=90°-60°=30°$；在 Rt△OMF 中，$|OF|=2$，$\angle MOF=30°$，所以 $|MF|=1$.

在△ONF 中，$\angle ONF=\angle NOF=30°$，所以 $|NF|=|OF|=2$.

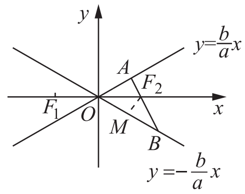
则 $|MN|=|MF|+|NF|=1+2=3$，故选 B.

变式 1 已知双曲线 C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作一条渐近线的垂线，垂足为 A，并延长交另一条渐近线于点 B，且 $2\overrightarrow{AF_2}=\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率是________.

解析 如图所示，过 F_2 作另一条渐近线的垂线，垂足为 M.

由于$\angle AOF_2=\angle BOF_2$，则 $|AF_2|=|F_2M|$.

因为 $2\overrightarrow{AF_2}=\overrightarrow{F_2B}$，所以 $2|AF_2|=|F_2B|$，$2|F_2M|=|F_2B|$，则$\angle OBA=30°$，$\angle AOF_2=30°$，所以$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



因此 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

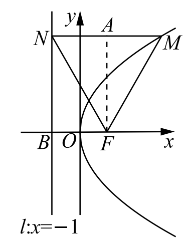
3. 等腰(等边)三角形的性质

例 14.3 过抛物线 C:$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为$\sqrt{3}$的直线交 C 于点 M(M 在 x 轴的上方)，l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN\perp l$，则 M 到直线 NF 的距离为(　　).

A. $\sqrt{5}$　　　B. $2\sqrt{2}$　　　C. $2\sqrt{3}$　　　D. $3\sqrt{3}$

分析 MF 的斜率为$\sqrt{3}$，说明$\angle FMN=\frac{\pi}{3}$，又由抛物线定义有$|MF|=|MN|$，所以$\triangle MNF$是等边三角形．由抛物线 p 的几何意义求其边长，求高得解．

解析 如图所示，过 F 作 $FA\perp MN$，垂足为 A，l 与 x 轴的交点为 B，$|FB|=2$.



由于直线 FM 的斜率为$\sqrt{3}$，故有$\angle MFx=\frac{\pi}{3}$，即$\angle FMN=\frac{\pi}{3}$.

根据抛物线定义可得$|MF|=|MN|$，故$\triangle MNF$是等边三角形，从而 A 是 MN 的中点，即有$|AN|=|FB|=2$.

在 Rt$\triangle FAN$ 中，$|FA|=2\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，因为等边三角形每条边上的高相等，所以 M 到 NF 的距离为 $2\sqrt{3}$.

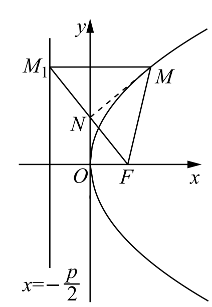
故选 C.

变式 1 设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点 M 在 C 上，$|MF|=5$，若以 MF 为直径的圆过点$(0,2)$，则 C 的方程为(　　).

A. $y^2=4x$ 或 $y^2=8x$　　　B. $y^2=2x$ 或 $y^2=8x$

C. $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$　　　D. $y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

解析 如图所示，过点 M 作准线 $x=-\frac{p}{2}$的垂线于点 M_1，连接 M_1F 交 y 轴于点 N.



由抛物线的定义知$|MM_1|=|MF|$，$\triangle MM_1F$ 为等腰三角形，且点 N 为 M_1F的中点，故 $MN\perp M_1F$，因此 $N(0,2)$，$y_M=4$，则 $x_M=\frac{8}{p}$，$|MM_1|=\frac{8}{p}+\frac{p}{2}=5$，即 $16+p^2-10p=0$，得 $p=2$ 或 $p=8$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$.

故选 C.

4. 全等三角形的性质

例 14.4 (2020 新课标全国Ⅲ卷理 20)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$的离心率为$\frac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$ 分别为 C 的左、右顶点.

(1)求 C 的方程；

(2)若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$ 的面积.

分析 (1)根据离心率的公式求出 m 的值即可；(2)本题可用已知三角形三顶点的坐标，求三角形的面积，但计算量较大．所以转换方向，尝试从平面几何的角度思考：过点 P 作 x

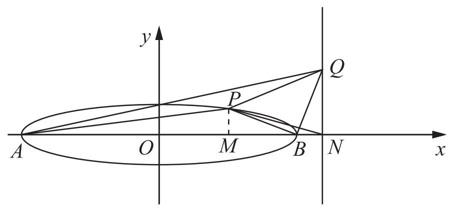
轴的垂线，设交点为 M，$x=6$ 与 x 轴交点为 N，由 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$ 易证 $\triangle PMB\cong\triangle BNQ$，由全等可得三角形中一些边的长，再利用割补法求面积，这样求解非常简洁.

解析 (1) 由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{25-m^2}}{5}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 可得 $m=\frac{5}{4}$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$.

(2) 由椭圆的对称性，不妨设点 P 在第一象限，如图所示.

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，设 $x=6$ 与 x 轴的交点为 N，由 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$ 易证 $\triangle PMB\cong\triangle BNQ$，所以 $PM=BN=1$.

则可得 P 点纵坐标为 $y_P=1$，将其代入椭圆方程解得 $x_P=3$ 或 $x_P=-3$，因为设点 P 在第一象限，所以 $x_P=3$，所以 $QN=MB=5-3=2$.



因为 $PM=1$，$QN=2$，AQ 的直线方程为 $y=\frac{2}{11}(x+5)$，所以点 P 在 AQ 的下方，则

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle APQ}&=S_{\triangle AQN}-S_{\triangle PAN}-S_{\triangle PNQ}\\
&=\frac{1}{2}\times2\times(5+6)-\frac{1}{2}\times1\times(5+6)-\frac{1}{2}\times2\times(6-3)\\
&=11-\frac{11}{2}-3=\frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

所以 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{5}{2}$.

评注 由已知条件容易想到初中常见的全等模型，用割补法求三角形面积省去繁杂的计算，由此可见运用平面几何知识可以减轻计算负担. 历年高考题，尤其是客观题，经常可以数形结合，找到图形规律再“秒杀”，值得我们深入研究.

5. 相似三角形的性质

例 14.5 椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点和左焦点分别为 F_1，F_2，E 是椭圆 C 上一点，且 $|F_1F_2|=2$，$|EF_1|+|EF_2|=4$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) M，N 是 y 轴上的两个动点（点 M 与点 E 位于 x 轴的两侧），$\angle MF_1N=\angle MEN=90^\circ$，直线 EM 交 x 轴于点 P，求 $\frac{|EP|}{|PM|}$ 的值.

分析 本题可从代数、几何两个角度入手考虑. 代数角度：由条件进行坐标运算，将 $\frac{|EP|}{|PM|}$ 的值转化为 E 与 M 纵坐标的比；几何角度：证明 $\triangle MF_1P\backsim\triangle MEF_1$，得到对应边的相似

比，再由$\frac{PM}{ME}=\frac{PM}{MF_1}\cdot\frac{MF_1}{ME}$求出 PM 与 ME 的比，进而得出$\frac{|EP|}{|PM|}$的值.

解析 (1)$2c=2$，$2a=4$，得 $a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**解法一(代数方法)**：设 $M(0,m)$，$N(0,n)$(不妨设 $m<0$，$n>0$)，$E(x_0,y_0)$，因为 $\angle MF_1N=90°$，所以 $mn=-1$，则$\overrightarrow{EM}=(-x_0,m-y_0)$，$\overrightarrow{EN}=(-x_0,n-y_0)$.

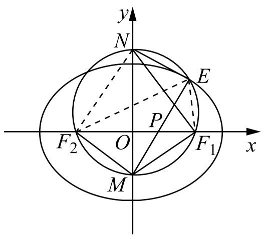
又$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=x_0^2+(m-y_0)(n-y_0)=0$，即 $x_0^2+mn-(m+n)y_0+y_0^2=0$，亦即 $x_0^2-1-(m+n)y_0+y_0^2=0$，整理得 $x_0^2+y_0^2-1-\left(n-\frac{1}{n}\right)y_0=0$　①.

又$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，得 $x_0^2=4\left(1-\frac{y_0^2}{3}\right)=4-\frac{4}{3}y_0^2$，代入①式得 $4-\frac{4}{3}y_0^2+y_0^2-1-\left(n-\frac{1}{n}\right)y_0=0$，

即$-\frac{1}{3}y_0^2-\left(n-\frac{1}{n}\right)y_0+3=0$，亦即 $y_0^2+3\left(n-\frac{1}{n}\right)y_0-9=0$，可得$(y_0+3n)\left(y_0-\frac{3}{n}\right)=0$，即 $y_0=-3n$ 或$\frac{3}{n}$.

又 $y_0>0$，得 $y_0=\frac{3}{n}$，所以$\frac{|EP|}{|PM|}=\left|\frac{\frac{3}{n}}{\frac{-1}{n}}\right|=3$.

解法二(几何法)：$\angle MEN=\angle MF_1N=90°$，得 N,E,F_1,M 四点共圆. 连接 EF_2，EF_1，如图所示.



$\angle F_2EM=\angle F_1EM$，所以$\frac{EF_2}{EF_1}=\frac{F_2P}{PF_1}\Rightarrow\frac{EF_2+EF_1}{EF_2}=\frac{F_2P+PF_1}{F_2P}$，

可得$\frac{2a}{2c}=\frac{EF_2}{F_2P}=\frac{1}{e}=2$，故$\frac{EF_2}{F_2P}=2$ 或$\frac{EF_1}{F_1P}=2$.

$\triangle MF_1P\backsim\triangle MEF_1$，得$\frac{MP}{MF_1}=\frac{MF_1}{ME}=\frac{PF_1}{EF_1}=\frac{1}{2}$，$\frac{PM}{MF_1}\cdot\frac{MF_1}{ME}=\frac{PM}{ME}$，所以$\frac{PM}{ME}=\frac{1}{4}$，则 $|PM|=\frac{1}{3}|PE|$，故$\frac{|EP|}{|PM|}=3$.

14.2　挖掘圆的几何性质

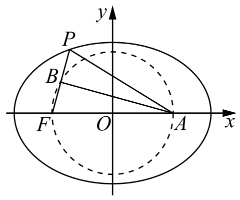
研究密钥

圆是非常重要且内涵丰富的图形，当圆锥曲线与圆相结合时，应当充分利用已知条件和图形特征，灵活运用圆的几何性质，如对称性、切线性质、垂径定理、直径所对圆周角为直角等. 解题时多思考、多发现，就能少计算、省时间.

例 14.6 (2019 浙江卷)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点为 F，点 P 在椭圆上且在 x 轴上方，若线段 PF 的中点在以原点为圆心，OF 的长为半径的圆上，则直线 PF 的斜率为______.

分析 ▶▶ PF 的中点在圆上，直径所对圆周角为$90°$，所以存在垂直条件. 由等腰三角形三线合一知$|AP|=|AF|=4$(其中 A 为右焦点)，则可得$|BF|$与$|AB|$，再由 $k_{PF}=\tan\angle PFA=\frac{|AB|}{|BF|}$得解.

解析 ▶▶ 设椭圆的右焦点为 A，PF 的中点为点 B，连接 AB，AP，如图所示.



由已知$|AF|=2c=4$，因为点 B 在以原点为圆心，OF 长为半径的圆上，所以$\angle ABF=90°$，又点 B 为 PF 的中点，所以 AB 为线段 PF 的垂直平分线，所以$|AP|=|AF|=4$，则$|PF|=2a-|AP|=2$，$|BF|=1$，$|AB|=\sqrt{|AF|^2-|BF|^2}=\sqrt{15}$.

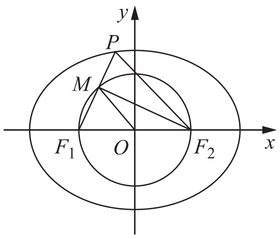
故直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\tan\angle PFA=\frac{|AB|}{|BF|}=\sqrt{15}$.

评注 ▶▶

本题为填空题，题中出现了圆的条件，且$\angle ABF$恰为直径所对的圆周角，所以利用直径所对圆周角为$90°$，我们就得出了重要的垂直条件，进而顺利解决了本题.

变式 1 已知 F_1，F_2 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两焦点，点 P 在椭圆上，线段 PF_1 的中点在以 F_1F_2 为直径的圆上，直线 PF_1 的斜率为$\frac{4}{3}$，则椭圆的离心率为__________.

解析 ▶▶ 设 PF_1 的中点为 M，连接 MF_2，不妨设$|MF_2|=4$，$|MF_1|=3$，则$|PM|=|MF_1|=3$，$|PF_2|=|F_1F_2|=5$，故椭圆离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{5}{11}$.



评注 ▶▶

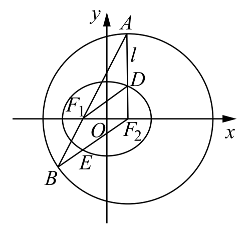
焦点三角形的研究也是常考内容，本题是将焦点三角形与图形几何关系相结合研究.

14.3　挖掘平行线的几何性质

研究密钥

当题设条件出现平行线或可挖掘出平行线的条件时，可根据平行线的性质进一步获取诸多信息，如斜率相等、角相等、中点、平行线分线段成比例及三角形相似等，知晓这些条件可以更深入地认识图形结构特征，以避免复杂的代数运算.

例 14.7 (2019 江苏卷)如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 F_2：$(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D. 连接 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连接 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连接 DF_1. 已知 $DF_1=\frac{5}{2}$.



(1)求椭圆 C 的标准方程；

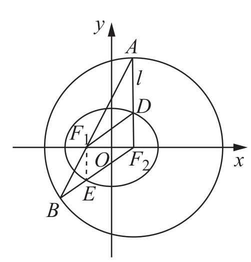
(2)求点 E 的坐标.

分析 (1)根据焦点坐标可得 c，已知 $DF_1=\frac{5}{2}$，根据勾股定理可得 $|DF_2|=\sqrt{|DF_1|^2-|F_1F_2|^2}$，根据椭圆的定义可得 a，根据 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 可得 b. (2)求点 E 的坐标，若用直线和椭圆联立方程求解计算量太大，设法从其他角度突破. 利用椭圆上的点到两个焦点的距离和为 $2a$ 及圆的半径也是 $2a$ 推出边相等，进而角相等，由此发现等腰三角形以及平行、垂直关系，打开"解题之门".

解析 (1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，因为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，所以 $F_1F_2=2$，$c=1$，又因为 $|DF_1|=\frac{5}{2}$，$AF_2\perp x$ 轴，所以 $|DF_2|=\sqrt{|DF_1|^2-|F_1F_2|^2}=\frac{3}{2}$.

因此 $2a=|DF_2|+|DF_1|=4$，从而 $a=2$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)知，椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，连接 EF_1，如图所示.



因为 $|BF_2|=2a$，$|EF_2|+|EF_1|=2a$，所以 $|EF_1|=|EB|$，$\angle BF_1E=\angle B$.

又 $|F_2A|=|F_2B|$，所以 $\angle A=\angle B$，$\angle A=\angle BF_1E$，$EF_1\parallel F_2A$.

因为 $AF_2 \perp x$ 轴，所以 $EF_1 \perp x$ 轴，E 点横坐标 $x_E = x_{F_1} = -1$.

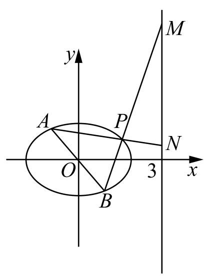
代入椭圆方程，即 $\dfrac{(-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，解得 $y = \pm\dfrac{3}{2}$.

因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $y_E = -\dfrac{3}{2}$，因此 $E\left(-1, -\dfrac{3}{2}\right)$.

评注

本题通过挖掘图形特征，发现平行的隐藏条件，进而通过同位角相等加以证明. 利用平行关系，可推出 E 点的横坐标，代入椭圆方程，就得到了 E 点的纵坐标. 本题再次说明了充分挖掘圆锥曲线中图形的几何性质，对解题大有作用.

例 14.8 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，P 是动点，且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\dfrac{1}{3}$.



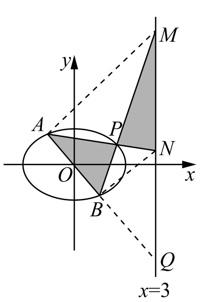
(1) 求动点 P 的轨迹方程；

(2) 设直线 AP 与 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 N, M. 是否存在点 P，使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

分析 (1) 已知点 A 的坐标，根据对称可得点 B 的坐标，设 $P(x,y)$，分别表示出直线 AP 与 BP 的斜率，根据乘积为 $-\dfrac{1}{3}$ 可得点 P 的轨迹方程；(2) 挖掘图形几何性质，若使 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等，即 $\triangle ABN$ 与 $\triangle MBN$ 的面积相等，那么 $AM /\!/ BN$. 延长 AB 交直线 $x=3$ 于点 Q，由 A, B, Q 三点横坐标知点 B 为线段 AQ 的中点，结合中位线定理，N 为线段 MQ 的中点，则 P 是 $\triangle AMQ$ 的重心.

解析 (1) 由点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，则 $B(1,-1)$.

设 $P(x,y)$，$x \neq \pm 1$. 由题设可得 $\dfrac{y-1}{x+1} \cdot \dfrac{y+1}{x-1} = -\dfrac{1}{3}$，整理得动点 P 的轨迹方程为 $x^2 + 3y^2 = 4 (x \neq \pm 1)$.



(2) 连接 BN, AM，如图所示.

若 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PMN}$，则 $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle MBN}$.

因为 $\triangle ABN$ 与 $\triangle MBN$ 同底 BN，所以点 A 与点 M 到 BN 的距离相等，故 $AM /\!/ BN$.

延长 AB 交直线 $x=3$ 于点 Q，由 A, B, Q 三点横坐标知点 B 为线段 AQ 的中点，所以点 N 为线段 MQ 的中点，因此，点 P 是 $\triangle AMQ$ 两条中线 AN 与 BM 的交点，即点 P 是 $\triangle AMQ$ 的重心，由重心坐标公式得 $x_P = \dfrac{x_A + x_M + x_Q}{3} = \dfrac{5}{3}$.