第 1 章　数值分析与科学计算引论

1.1　内 容 概 述

数值分析也称科学计算，是数学科学的一个分支，主要研究用计算机求解各种数学问题的数值方法及其理论与软件实现. 数值分析研究的对象涉及数学的各个分支，内容十分广泛. 数值分析课程主要介绍其中最基本、最常用的数值计算方法及其理论，包括插值与函数逼近，数值积分与微分，线性方程组的数值求解，非线性方程与方程组求解，特征值及特征向量计算，常微分方程数值解等.

数值分析以数学问题为研究对象，但它不像纯数学那样只研究数学本身的理论，而是把理论与计算紧密结合，着重研究数学问题的数值算法及其理论.

数值分析是一门内容丰富，研究方法深刻，有自身理论体系的课程，既有纯数学高度抽象性与严密科学性的特点，又有应用广泛性与实际试验高度技术性的特点，是一门与计算机使用密切结合，实用性很强的数学课程.

用计算机解决科学计算问题时，首先要对实际问题进行抽象、简化，从而建立数学模型，数学模型与实际问题之间出现的误差称为**模型误差**. 在数学模型中往往有一些根据观测得到的物理量，如温度、长度、电压等，这些参量显然也包含误差，这种由观测产生的误差称为**观测误差**.

当数学模型不能得到精确解时，通常用数值方法求它的近似解，其近似解与精确解之间的误差称为**截断误差**或**方法误差**.

用计算机做数值计算时，由于计算机字长有限，原始数据在计算机上表示时会产生误差，计算过程又可能产生新的误差，这种误差称为**舍入误差**.

数值分析主要讨论算法的截断误差与舍入误差，借助误差的定义可以更细致地分析舍入误差.

设 x 为准确值，x^* 为 x 的一个近似值，称 $e^*=x^*-x$ 为近似值的**绝对误差**，简称**误差**. 通常准确值 x 是未知的，误差 e^* 的准确值也无法计算，只能根据测量工具或计算情况估计出误差绝对值的一个上界 ε^*，ε^* 称为近似值的**误差限**，它总是正数. 误差限的大小不能完全表示近似值的好坏，还要考虑准确值本身的大小. 近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值$\dfrac{e^*}{x}=\dfrac{x^*-x}{x}$称为近似值 x^* 的**相对误差**，记作 e_r^*. 相对误差绝对值的上界称为**相对误差限**，记作 ε_r^*，即 $\varepsilon_r^*=\dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$. 误差限可以用有效数字更细致地刻画.

一个近似数四舍五入到哪一位，就称它精确到哪一位. 这时，该位到其左边第一位非零数字止的所有数字，称为这个近似数的**有效数字**，有效数字的个数称为有效数字的位数. 若近似值 x^* 有 n 位有效数字，则它用科学计数法可表示为

$$x^*=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+\cdots+a_n\times 10^{-(n-1)}),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 0～9 中的一个数字，$a_1\neq 0$，m 为整数，且

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}.$$

有效数字与相对误差限的关系，由定理 1.1 表述.

定理 1.1　设近似数表示为

$$x^*=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+\cdots+a_l\times 10^{-(l-1)}),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,l)$ 是 0～9 中的一个数字，$a_1\neq 0$，m 为整数，若 x^* 有 n 位有效数字，则其相对误差限 $\varepsilon_r^*\leqslant\dfrac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$；反之，若 x^* 的相对误差限 $\varepsilon_r^*\leqslant\dfrac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$，则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

定理 1.1 说明，有效位数越多，相对误差限越小.

求解一个问题的数值解，要设计算法来实现，在设计算法时，要充分利用迭代的思想，以发挥计算机机械高效的特性. 对于算法而言，也有区分其可用与否的标准，即其是否具有稳定性.

定义 1.1　一个算法如果输入数据有误差，而在计算过程中舍入误差不增长，则称此算法是**稳定的**；否则称此算法为**不稳定的**.

数值问题的求解不仅与算法有关，实际上还与问题本身有关.

定义 1.2　对于一个数值问题，如果输入数据有微小扰动（即误差），引起输出数据（即问题解）相对误差很大，则称此数值问题为**病态问题**. 输出数据的相对误差与输入数据的相对误差的比值称为此数值问题的**条件数**.

一个数值问题的条件数可以视为处理此数值问题的过程中，相对误差的放大（缩小）倍数，条件数越大病态程度越严重.

病态问题不是计算方法引起的，是数值问题本身固有的. 对数值问题首先要分清是否病态，病态问题需要采取特殊处理方法以减少误差危害.

1.2　复习与思考题解析

1. 什么是数值分析？它与数学科学和计算机的关系如何？

答　数值分析也称计算数学，是数学科学的一个分支，主要研究的是用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现.

数值分析以数学问题为研究对象，但它并不像纯数学那样只研究数学本身的理论，而是把理论与计算机紧密结合，着重研究数学问题的数值方法及其理论. 计算机的发明与发展使数值分析成为一门理工科学生普遍学习的课程.

2. 何谓算法？如何判断数值算法的优劣？

答　一个数值问题的算法是指按规定顺序执行一个或多个完整的进程，通过算法将输入元变换成输出元.

一个面向计算机，有可靠理论分析且计算复杂性好的算法就是一个好算法. 因此判断一个算法的优劣应从算法的稳定性、准确性、时间复杂性和空间复杂性几个方面考虑.

3. 列出科学计算中误差的三个来源，并说出截断误差与舍入误差的区别.

答　用计算机解决实际问题首先要建立数学模型，它是对被描述的实际问题进行抽象、

简化而得到的，因而是近似的，数学模型与实际问题之间出现的误差叫作模型误差.

在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量，如温度、长度等，这些参量显然也包含误差，这种由观测产生的误差称为观测误差.

当数学模型不能得到精确解时，通常要用数值方法求它的近似解，其近似解和精确解之间的误差称为截断误差或方法误差.

有了求解数学问题的计算公式以后，用计算机做数值计算时，由于计算机字长有限，原始数据在计算机上表示时会产生误差，计算过程又可能产生新的误差，这种误差称为舍入误差.

截断误差和舍入误差是两个不同的概念，截断误差是由所采用的数值方法而产生的，因而也称方法误差，舍入误差是由数值计算而产生的.

4. 什么是绝对误差与相对误差？什么是近似数的有效数字？它与绝对误差和相对误差有何关系？

答 设 x 为准确值，x^* 为 x 的一个近似值，称 $e^*=x^*-x$ 为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差. 近似值的误差 e^* 与其准确值 x 的比值 $\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$ 称为近似值 x^* 的相对误差，记作 e_r^*.

通常我们无法知道误差的准确值，只能根据测量工具或计算情况估计出误差绝对值的一个上界 ε^*，ε^* 叫作近似值的误差限.

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位，该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，就说 x^* 有 n 位有效数字.

有效数位越多，绝对误差限越小，相对误差限也越小.

5. 什么是算法的稳定性？如何判断算法稳定？为什么不稳定算法不能使用？

答 一个算法如果输入数据有误差，但在计算中舍入误差不增长，则称此算法是数值稳定的；否则称为不稳定的.

判断一个算法是否稳定主要是看初始数据的误差在计算中的传播速度，如果传播速度很快就是数值不稳定的.

对于不稳定的算法来说，由于其误差传播是逐步扩大的，因而计算结果不可靠，所以不稳定的算法是不能使用的.

6. 什么是问题的病态性？它是否受所用算法的影响？

答 对一个数值问题本身来说，如果输入数据有微小扰动(即误差)，引起输出数据(即问题解)相对误差很大，这就是病态问题.

病态性是数值问题本身固有的，不是由计算方法引起的，病态性并不受所用算法的影响，对病态问题必须采用特殊的方法以减少误差危害.

7. 什么是迭代法？试利用 $x^3-a=0$ 构造计算 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式.

答 迭代法是一种按同一公式从初始值开始重复计算逐次逼近真值的算法，是数值计算普遍使用的重要方法.

在计算 $\sqrt[3]{a}$ 时，先从初始近似 $x_0>0$ 开始，令 $x=x_0+\Delta x$，Δx 为增量，则由 $x^3-a=0$ 得 $(x_0+\Delta x)^3-a=0$，即 $x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-a=0$. 由于 Δx 是小量，省去

高阶项$(\Delta x)^2$,$(\Delta x)^3$,则得$x_0^3+3x_0^2\Delta x-a\approx 0$,即$\Delta x\approx\dfrac{a-x_0^3}{3x_0^2}$,于是$x_0+\Delta x\approx\dfrac{a+2x_0^3}{2x_0^2}$,从而得到计算$\sqrt[3]{a}$的迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{a}{x_k^2}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,\quad x_0\text{ 给定}.$$

8. 考虑无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,它是发散的,在计算机上计算它的部分和,会得到什么结果?为什么?

答 虽然在理论上无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$是发散的,但在计算机上计算时,由于计算机只能进行有限数的计算,所以无论n取多大的值,级数的和都是有限数.对于有限值的n,当n较大时,$\dfrac{1}{n}$较小.如果小到在计算机内视为计算机零,则对部分和就没有贡献了。这时所得的部分和就是常数了.

9. 判断下列命题的正确性:

(1) 解对数据的微小变化高度敏感是病态的.

(2) 高精度运算可以改善问题的病态性.

(3) 无论问题是否病态,只要算法稳定都能得到好的近似值.

(4) 用一个稳定的算法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(5) 用一个收敛的迭代法计算良态问题一定会得到好的近似值.

(6) 两个相近数相减必然会使有效数字损失.

(7) 计算机上将 1000 个数量级不同的数相加,不管次序如何结果都是一样的.

答 (1) 对.病态性就是根据这一现象定义的.

(2) 错.病态性是问题本身固有的,与所采用的算法无关.

(3) 错.只有当问题为良态时,稳定的算法才有可能得到好的近似值.

(4) 错.用一个稳定的算法计算良态问题是否能得到好的近似值还依赖于初始值选取得是否适当.

(5) 错.用收敛的迭代法计算良态问题时,同样依赖于初始值的选取.

(6) 错.如果两个相近数直接相减,大多会使有效数字损失.但可以通过等价变换转化成其他运算而避免有效数字损失.

(7) 错.次序不加处理和次序加以处理的结果一般是不一样的.尤其是当所加的数据的数量级相差较大时.此时,将数量级相近的数据调整到一起相加结果会准确些.

第 1 章解答

1.3 习题解答

1. 设$x>0$,x的相对误差为δ,求$\ln x$的误差.

解 设x的近似值为x^*,由假设$\dfrac{x^*-x}{x}=\delta$.对于$f(x)=\ln x$,因$f'(x)=\dfrac{1}{x}$,故由

$$\varepsilon(f(x)) = \ln x^* - \ln x \approx |f'(x)|(x^* - x) = \left|\frac{1}{x}\right|(x^* - x)$$
$$= \frac{1}{x}(x^* - x) = e_r(x^*) = \delta,$$

即 $e(\ln x^*) \approx \delta$.

2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

解 设 $f(x)=x^n$,则此计算函数值问题的条件数为

$$C_p = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x \cdot nx^{n-1}}{x^n}\right| = n,$$

又因为计算函数值问题的条件数定义为函数值的相对误差与自变量相对误差的比值,即 $\varepsilon_r((x^*)^n) \approx C_p \cdot \varepsilon_r(x^*)$,所以 $\varepsilon_r((x^*)^n) \approx n \cdot 2\% = 0.02n$.

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们是几位有效数字:

$$x_1^* = 1.1021, \quad x_2^* = 0.031, \quad x_3^* = 385.6, \quad x_4^* = 56.430, \quad x_5^* = 7 \times 1.0.$$

解 由于近似数的误差限不超过最后一位的半个单位,所以

$x_1^* = 1.1021$ 有 5 位有效数字;

$x_2^* = 0.031$ 有 2 位有效数字;

$x_3^* = 385.6$ 有 4 位有效数字;

$x_4^* = 56.430$ 有 5 位有效数字;

$x_5^* = 7 \times 1.0$ 有 2 位有效数字.

4. 利用(1.3)式求下列各近似值的误差限:

(1) $x_1^* + x_2^* + x_4^*$; (2) $x_1^* x_2^* x_3^*$; (3) x_2^* / x_4^*.

其中 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 均为第 3 题所给的数.

解 因为

$$\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad \varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$
$$\varepsilon(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}, \quad \varepsilon(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

所以

$$\varepsilon(x_1^* + x_2^* + x_4^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_4^*)$$
$$= \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$
$$= 1.05 \times 10^{-3}.$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*) = |x_1^* x_2^*| \varepsilon(x_3^*) + |x_2^* x_3^*| \varepsilon(x_1^*) + |x_1^* x_3^*| \varepsilon(x_2^*)$$
$$= |1.1021 \times 0.031| \times \frac{1}{2} \times 10^{-1} + |0.031 \times 385.6| \times$$
$$\frac{1}{2} \times 10^{-4} + |1.1021 \times 385.6| \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$
$$\approx 0.215.$$

$$\varepsilon(x_2^*/x_4^*) \approx \frac{|x_2^*|\varepsilon(x_4^*)+|x_4^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2}$$

$$= \frac{0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430\times56.430}$$

$$\approx 0.887\times10^{-5}.$$

5. 计算球体积要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 所允许的相对误差限是多少？

解　球体体积公式为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，体积计算的条件数

$$C_p=\left|\frac{R\cdot V'}{V}\right|=\left|\frac{R\cdot 4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=3,$$

所以，$\varepsilon_r(V^*)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$.

因为 $\varepsilon_r(V^*)=1\%$，所以度量半径 R 所允许的相对误差限

$$\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\varepsilon_r(V^*)=\frac{1}{3}\times1\%\approx0.0033.$$

6. 设 $Y_0=28$，按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783},\quad n=1,2,\cdots$$

计算到 Y_{100}. 若取 $\sqrt{783}\approx27.982$(5 位有效数字)，试问计算 Y_{100} 将有多大误差？

解　因为 $Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$，所以

$$Y_{100}=Y_{99}-\frac{1}{100}\sqrt{783},\quad Y_{99}=Y_{98}-\frac{1}{100}\sqrt{783},$$

$$Y_{98}=Y_{97}-\frac{1}{100}\sqrt{783},\quad \cdots,\quad Y_1=Y_0-\frac{1}{100}\sqrt{783},$$

依次代入，有

$$Y_{100}=Y_0-100\times\frac{1}{100}\sqrt{783},$$

即

$$Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}.$$

若取 $\sqrt{783}\approx27.982$，则 $\varepsilon(27.982)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$，于是 $Y_{100}^*=Y_0-27.982$，这时

$$\varepsilon(Y_{100}^*)=\varepsilon(Y_0^*)+\varepsilon(27.982)=0+\frac{1}{2}\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times10^{-3},$$

即 Y_{100} 的误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

7. 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根,使它至少具有 4 位有效数字($\sqrt{783}\approx 27.982$).

解 由求根公式

$$x_{1,2}=28\pm\sqrt{783},$$

于是

$$x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$$

具有 5 位有效数字.

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{28+27.982}=\frac{1}{55.982}\approx 0.017\,863$$

具有 5 位有效数字.

8. 当 $x\approx y$ 时计算 $\ln x-\ln y$ 有效位数会损失. 改用 $\ln x-\ln y=\ln\dfrac{x}{y}$是否就能减少舍入误差?(提示:考虑对数函数何时出现病态.)

解 当 $x\approx y$ 时,直接计算 $\ln x-\ln y$ 会出现两相近数相减,从而引起有效位数的损失.

若改用 $\ln x-\ln y=\ln\dfrac{x}{y}$进行计算,则首先应考虑对数函数的病态性问题. 设 $f(x)=\ln x$,则计算对数函数值的条件数为

$$C_p=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{x\cdot\frac{1}{x}}{\ln x}\right|=\left|\frac{1}{\ln x}\right|,$$

可见当 $x\approx 1$ 时,C_p 充分大,问题为病态的,而当 $x\approx y$ 时,$\dfrac{x}{y}\approx 1$,故用 $\ln x-\ln y=\ln\dfrac{x}{y}$不能减少舍入误差.

9. 正方形的边长大约为 100 cm,应怎样测量才能使其面积误差不超过 1 cm^2?

解 正方形的面积函数为 $A(x)=x^2$,所以 $\varepsilon(A^*)=2x^*\cdot\varepsilon(x^*)$.

当 $x^*=100$ 时,$\varepsilon(A^*)=2x^*\cdot\varepsilon(x^*)=200\cdot\varepsilon(x^*)$. 若 $\varepsilon(A^*)\leqslant 1$,则

$$\varepsilon(x^*)\leqslant\frac{1}{200}=\frac{1}{2}\times 10^{-2},$$

即测量中边长误差限不超过 0.005 cm 时,可以使面积误差不超过 1 cm^2.

10. 设 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$,假定 g 是准确的,而对 t 的测量有 ± 0.1 s 的误差,证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加,而相对误差却减少.

证明 因为 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$,所以 $\varepsilon(S)=gt\cdot\varepsilon(t)=0.1gt$,因而,当 t 增加时,S 的绝对误差增加. 又

$$\varepsilon_r(S)=\frac{\varepsilon(S)}{|S|}=\frac{gt\cdot\varepsilon(t)}{\frac{1}{2}gt^2}=2\,\frac{\varepsilon(t)}{t}=\frac{0.2}{t},$$

所以当 t 增加时 S 的相对误差减少.

11. 序列$\{y_n\}$满足递推关系

$$y_n=10y_{n-1}-1,\quad n=1,2,\cdots,$$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx1.41$(三位有效数字),计算到 y_{10} 时误差有多大?这个计算过程稳定吗?

解　由递推关系式

$$\begin{aligned}y_n&=10y_{n-1}-1=10(10y_{n-2}-1)-1\\&=10^2y_{n-2}-[1+10^1]\\&=10^2(10y_{n-3}-1)-[1+10^1]\\&=10^3y_{n-3}-[1+10^1+10^2]\\&=\cdots\\&=10^ny_0-\sum_{i=0}^{n-1}10^i\\&=10^ny_0-\frac{1}{9}(10^n-1)\\&=10^n\left(\sqrt{2}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9},\end{aligned}$$

于是

$$y_{10}=10^{10}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9},\quad y_{10}^*=10^{10}\left(1.41-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9},$$

$$\varepsilon(y_{10}^*)=10^{10}\varepsilon(y_0^*)=10^{10}\times\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^8,$$

由于 y_{10} 的误差限是 y_0 误差限的 10^{10} 倍,所以这个计算过程不稳定.

12. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$,取$\sqrt{2}\approx1.4$,利用下列等式计算,哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\quad(3-2\sqrt{2})^3,\quad\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\quad99-70\sqrt{2}.$$

解　设 $y=(x-1)^6$,若 $x=\sqrt{2}$,$x^*=1.4$,则 $\varepsilon(x^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$.

若通过$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$计算 y 值,即计算函数 $f(x)=(x+1)^{-6}$ 在 $x^*=\sqrt{2}$处的值.由于 $f'(x)=-6(x+1)^{-7}$,故由 $\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$,得

$$\varepsilon(y^*)=\left|-6\times\frac{1}{(x^*+1)^7}\right|\cdot\varepsilon(x^*)=\frac{6}{x^*+1}y^*\varepsilon(x^*)=2.5y^*\varepsilon(x^*).$$

若通过$(3-2\sqrt{2})^3$ 计算 y 值,即计算函数 $f(x)=(3-2x)^3$ 在 $x^*=\sqrt{2}$处的值.由于 $f'(x)=-6(3-2x)^2$,故得

$$\varepsilon(y^*)=|-6(3-2x^*)^2|\cdot\varepsilon(x^*)=\frac{6}{3-2x^*}y^*\varepsilon(x^*)=30y^*\varepsilon(x^*).$$

若通过$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算 y 值,即计算函数 $f(x)=(3+2x)^{-3}$ 在 $x^*=\sqrt{2}$处的值.由于 $f'(x)=-6(3+2x)^{-4}$,故得

$$\varepsilon(y^*)=\left|\frac{-6}{(3+2x^*)^4}\right|\cdot\varepsilon(x^*)=6\times\frac{1}{3+2x^*}y^*\varepsilon(x^*)\approx 1.0345y^*\varepsilon(x^*).$$

若通过 $99-70\sqrt{2}$ 计算 y 值,即计算函数 $f(x)=99-70x$ 在 $x^*=\sqrt{2}$ 处的值.由于 $f'(x)=-70$,故得

$$\varepsilon^*(y)=|-70|\cdot\varepsilon(x^*)=70\varepsilon(x^*).$$

比较 4 个结果并注意 $y^*<1$ 知,通过 $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 计算得到的结果最好.

由以上分析可知,通过 $\dfrac{1}{99+70\sqrt{2}}$ 计算得到的结果更好.因为对应的计算函数为 $f(x)=\dfrac{1}{99+70x}$,这时 $f'(x)=-\dfrac{70}{(99+70x)^2}$,从而

$$\varepsilon^*(y)=\frac{70}{99+70x^*}y^*\varepsilon(x^*)\approx 0.3553y^*\varepsilon(x^*).$$

13. $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,求 $f(30)$ 的值. 若开平方用 6 位有效数字的函数表,问求对数时误差有多大?若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算,求对数时误差有多大?

解　因为 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,所以 $f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$.

设 $u=\sqrt{899}$,$y=f(30)$,则由 6 位函数表 $u^*=29.9833$,因而

$$\varepsilon(u^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-4}.$$

对于 $f(u)=\ln(30-u)$,有 $f'(u)=\dfrac{-1}{30-u}$.由 $\varepsilon(f(u^*))\approx|f'(u^*)|\varepsilon(u^*)$,得

$$\varepsilon(y^*)\approx\frac{1}{|30-u^*|}\cdot\varepsilon(u^*)=\frac{1}{0.0167}\cdot\varepsilon(u^*)\approx 3\times 10^{-3}.$$

若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

则 $f(30)=-\ln(30+\sqrt{899})$.此时 $f(u)=-\ln(30+u)$,故 $f'(u)=-\dfrac{1}{30+u}$.于是

$$\varepsilon(y^*)=\left|-\frac{1}{30+u^*}\right|\cdot\varepsilon(u^*)=\frac{1}{59.9833}\cdot\varepsilon(u^*)\approx 8\times 10^{-7}.$$

所以用等价公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 计算误差较小.

14. 用秦九韶算法求多项式 $p(x)=3x^5-2x^3+x+7$ 在 $x=3$ 处的值.

解　由秦九韶算法,有

$$p(x)=3x^5-2x^3+x+7=((3x^2-2)x^2+1)x+7.$$

当 $x=3$ 时

$$p(3)=((3\times 3^2-2)\times 3^2+1)\times 3+7=685.$$

15. 用迭代法 $x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k}(k=0,1,\cdots)$求方程 $x^2+x-1=0$ 的正根 $x^*=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,取 $x_0=1$,计算到 x_5,问 x_5 有几位有效数字.

解　取 $x_0=1$,利用迭代公式 $x_{k+1}=\frac{1}{1+x_k}(k=0,1,2,\cdots)$,有

$$x_1=0.5,\quad x_2=0.666\,667,\quad x_3=0.6,\quad x_4=0.625,\quad x_5=0.615\,385.$$

由于

$$x^*=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618\,033\cdots,$$

$$|x^*-x_5|=0.002\,65\cdots<\frac{1}{2}\times 10^{-2},$$

所以 x_5 有两位有效数字.