第1章 函数与极限

【学习目标】

通过本章的学习,你应该能够:

(1) 理解函数的概念与性质。

(2) 掌握基本初等函数的性质,掌握分析复合函数的复合结构方法,理解初等函数、反函数的概念。

(3) 理解描述变量无限变化的趋势的极限概念。

(4) 理解无穷大量与无穷小量的概念与性质,理解等价无穷小量的概念。

(5) 掌握求极限的方法。

- 学会运用极限的四则运算法则求极限;
- 学会运用等价无穷小量求函数的极限;
- 学会运用两个重要极限公式求函数的极限;
- 学会运用连续的概念求函数的极限。

(6) 理解函数的连续性和连续函数的概念。

(7) 了解 Matlab 软件及求极限操作。

美妙的数学

1.1 函数的概念与性质

函数是重要的数学概念。在研究某一事物的变化过程中,往往同时会遇到两个或多个变量,这些变量之间不是彼此孤立的,而是相互联系、相互依赖的,遵循着一定的变化规律。函数正是研究各个变量之间确定性依赖关系的数学模型,是用数学语言来描述现实世界的主要量化工具。

1.1.1 函数的起源与发展简史

17 世纪,伽利略在《两门新科学的对话和数学证明》一书中,用文字和比例的语言提出

了包含着函数或者称为变量的关系这一概念。1673 年前后，笛卡尔在研究解析几何时，已经注意到一个变量对另一个变量的依赖关系，在他的《方法导论——正确引导自己的理性并在科学中寻求真理》的第 3 个附录几何中，笛卡尔确立了一个习惯：以开头的字母记已知量，以末尾的字母记未知量。最早提出函数概念的是 17 世纪德国数学家莱布尼茨，莱布尼茨用“函数”一词表示幂。1718 年，约翰·伯努利在莱布尼茨给出的函数概念基础上，对其进行了明确的定义：“由某个变量及任意常数结合而成的数量。”1755 年，欧拉把函数定义为“如果某些变量以某种方式依赖于另一些变量，即当后面的变量发生变化时，前面函数的变量也随之变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数”，并给出了沿用至今的函数符号。1821 年，柯西在给出函数的定义时，首次提出了自变量的字眼。1822 年，傅里叶发现某些函数可用曲线表示，也可用一个式子表示，或者用多个式子表示，从而结束了函数概念是否只有一个式子来表示的争论。1837 年，狄利克雷提出函数是 x 与 y 之间的一种对应关系的现代观点，以简明、精确、清晰的方式为所有数学家接受。

1.1.2 函数的概念及表示法

在自然科学中，观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中是不发生变化的，保持一个固定的数值，称之为常量；有的量在过程中会发生变化，取不同的数值，称之为变量。

函数描述了变量之间的依存关系，这些变量并不是孤立发生变化的，而是相互联系，相互依存，并遵循一定的规律，函数就是用来描述这种联系和规律的。

函数

【例 1-1】 已知一个圆的半径 r，圆的面积 s 就确定了，圆的面积随着半径的变化而变化，遵循一定的规律 $s=\pi r^2$，此时圆的面积就是半径的函数关系。

【例 1-2】 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假设开始下落的时刻 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的依存关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出。其中，g 为重力加速度。

1. 函数的定义

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在某一非空实数范围 D 内任意取定一个数值时，按照一定的对应关系 f，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)\quad x\in D$$

其中，x 叫作自变量，y 叫作因变量，对于某一确定的 $x_0\in D$，函数 $y=f(x)$所对应 y 的值，叫作 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y\big|_{x=x_0}$。

使函数有意义的自变量的集合称为函数的定义域，记作 D。全体函数值构成的集合称为函数的值域，记作 M，即 $M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$。

2. 函数的两要素

由函数的定义可知，当函数的定义域 D 和对应关系 f 确定后，这个函数就完全确定了，

因此，常把函数的定义域和对应关系称为函数的两要素。

判断两函数相同的充分必要条件是其定义域与对应关系分别相同。

【例 1-3】 判断下列函数是否是同一个函数。

(1) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 和 $g(x)=1$

(2) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$

解：(1) 函数 $f(x)$和 $g(x)$，尽管它们的形式不一致，但是它们的定义域和对应关系分别相同，所以它们表示的是同一个函数。

(2) 函数 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，它们的定义域相同，都是实数集 $\mathbf{R}$，但因为

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

显然，只有当 $x\geqslant 0$ 时，它们的对应关系才相同，所以这是两个不同的函数。

函数常用的表示法有解析式法、表格法、图形法 3 种。

(1) 解析式法。用一个(或者几个)数学式子表示函数关系的方法称为解析式法，也称为公式法。一个函数的解析式可能不唯一，譬如例 1-3 中的(1)。

(2) 表格法。将自变量的取值与对应的函数值列成表格表示函数的方法称为表格法。例如三角函数表、对数表等都是表格法表示函数。

(3) 图形法。函数 $y=f(x)$的图形是指在直角坐标系中用一条曲线来表示函数的对应关系。例如，函数 $y=|x|$的图像可表示为如图 1-1 所示。

把抽象的函数与直观的图像结合起来研究函数，是学习数学的技巧，这种方法不仅直观性强，而且便于观察函数的变化趋势。

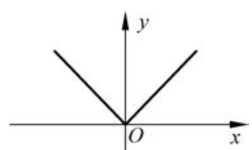

图 1-1 函数 $y=|x|$的图像

3. 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义确定。例如求圆的面积，自变量半径的取值是$(0,+\infty)$。但有时在数学中不考虑函数的实际意义，而只抽象地研究用解析式表示的函数关系时，约定函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量所构成的一切实数集合。

【例 1-4】 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(2-x)}$的定义域。

解：要使函数有意义，须满足：根式内非负、分母不为零、对数真数大于零等情况，即求

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ 2-x>0 \\ \ln(2-x)\neq 0 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x\geqslant -1 \\ x<2 \\ x\neq 1 \end{cases}$，所以函数的定义域是 $D=[-1,1)\cup(1,2)$。

1.1.3 函数的性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上**单调增加**，区间 I 称为**单调递增区间**；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上**单调减少**，区间 I 称为**单调递减区间**；单调递增区间和单调递减区间统称为**单调区间**。

注意：函数的单调性需要匹配单调区间。

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数，但是在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增。

2. 有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，若存在正数 M，对于任意的 $x\in I$，都有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**有界**。否则称函数 $f(x)$在区间 I 上**无界**。

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上有界，因为存在 $M=1$，$\forall x\in\mathbf{R}$ 都有$|\sin x|\leqslant 1$。

若函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界，则其图像在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间。显然，函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界，其界不唯一。

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，并且区间 I 关于原点对称，若对于 $\forall x\in I$ 都成立：

$f(-x)=f(x)$，则 $y=f(x)$是区间 I 上的偶函数。

$f(-x)=-f(x)$，则 $y=f(x)$是区间 I 上的奇函数。

偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称。

研究函数的奇偶性的好处在于，如果知道一个函数是奇(偶)函数，那么知道其中一半的图像，根据对称性，就可以知道全部函数的图像。例如，常见的函数 $y=x^2$ 是偶函数，$y=x$ 是奇函数。

【例 1-5】 讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$的奇偶性。

解：很显然，函数的定义域是 $x\in\mathbf{R}$。

$\because f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，$\therefore$ 函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$是偶函数。

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，若存在不为零的数 T，对 $\forall x\in I$，都有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称函数 $y=f(x)$为区间 I 上的周期函数，称 T 为 $f(x)$的周期，通常所说的周期指的是函数 $y=f(x)$的最小正周期。

例如，三角函数是周期函数。正弦函数 $y=\sin x$ 的最小正周期是 2π，正切函数 $y=$

$\tan x$ 的最小正周期是 π。

【能力训练 1.1】

基础练习

1. 判断题。

(1) 若两个函数的定义域和值域相同,那么这两个函数相同。(　　)

(2) 偶函数的图像不一定过原点,奇函数的图像一定过原点。(　　)

(3) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$是奇函数。(　　)

(4) $y=\ln x^2$ 和 $y=2\ln x$ 是同一个函数。(　　)

2. 填空题。

(1) 设函数 $f(x)=2x^2-5x+1$,则 $f(1)=$________。

(2) 设函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$,其定义域是________。

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 2 & x=0\\ 2-x & x>0\end{cases}$,其定义域是________。

3. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\sqrt{2x-3}+\dfrac{1}{x-3}$　　(2) $y=\ln(x^2-1)+(x+4)^0$

4. 判断下列函数的奇偶性。

(1) $y=\sin|x|$　　(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　　(3) $y=x\cos x$

提高练习

1. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{1}{1-\ln x}$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln\cos x}$　　(3) $y=\ln[\ln(\ln x)]$

2. 判断两个函数是否相同。

(1) $f(x)=\lg x+\lg(x+1)$,$g(x)=\lg[x(x+1)]$

(2) $f(x)=|1-x|+1$,$g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 1\\ 2-x & x<1\end{cases}$

1.2 初等函数

复杂函数都是由一些简单的函数构成的,学习并掌握基本初等函数关系和性质,将为认识复杂函数关系的构成、分析问题和解决问题提供方便。

1.2.1 基本初等函数

数学上常见的幂函数 $y=x^a$（a 为实数）；指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，$x>0$）；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 及其常量函数 $y=C$（C 为任意常数）统称为基本初等函数。

这些函数的定义域和性质见表 1-1。

表 1-1 基本初等函数的定义域和性质

名称		解析式	定义域	性质
幂函数		$y=x^a$（a 为实数）	随 a 的取值而定，但不论 a 为何值，x 在 $(0,+\infty)$ 上都有意义	在 $(0,+\infty)$ 内单调；函数过点 $(1,1)$
指数函数		$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$	函数都过点 $(0,1)$；当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减
对数函数		$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(0,+\infty)$	函数都过点 $(1,0)$；当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	有界函数；奇函数；以 2π 为周期的周期函数
	余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	有界函数；偶函数；以 2π 为周期的周期函数
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$（$n$ 为整数）	奇函数；以 π 为周期的周期函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq n\pi$（n 为整数）	偶函数；以 π 为周期的周期函数
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,+1]$	有界函数 $\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\dfrac{\pi}{2}$；单调递增函数
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,+1]$	有界函数 $\arccos x\in[0,\pi]$；单调递减函数
	反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	有界函数 $\lvert\arctan x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$；单调递增函数
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	有界函数 $\operatorname{arccot} x\in(0,\pi)$；单调递减函数

此外，还有正割函数和余割函数两个三角函数。

（1）正割函数 $y=\sec x$，正割函数的定义域同正切函数，是以 2π 为周期的周期函数，是余弦函数的倒数，即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

（2）余割函数 $y=\csc x$，余割函数的定义域同余切函数，是以 2π 为周期的周期函数，是正弦函数的倒数，即

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

1.2.2 复合函数的定义

在实际应用中，常会遇到由几个基本初等函数组合而成的复杂函数关系。例如，由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=\sin x$ 组合成新的函数关系，它可以表示为 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$。这样的函数关系是一类新的函数——复合函数。

1. 复合函数定义

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in M_1$。u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D$，$u\in M_2$。当 $M_1\cap M_2\neq\varnothing$ 时，$y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 通过变量 u 可构成 y 关于 x 的新函数，称为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的关于 x 的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 为中间变量，x 为自变量，如图 1-2 所示。

注意：并不是任意两个函数都能够组合成复合函数。例如，$y=\ln u$ 和 $u=-x^2-1$ 是不能组合成复合函数的。

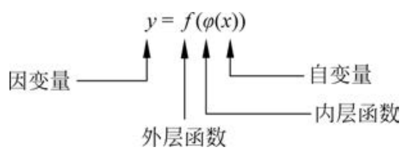

图 1-2 复合函数

复合函数还可以推广到多个中间变量的情形，由多个基本初等函数关系复合构成。在对复合函数的分析上，需要利用复合函数的概念，将一个复杂的复合函数关系分解成几个简单函数关系，使问题得以简化。

正确掌握复合函数的分解与合成方法，是掌握复合函数性质的关键。

2. 复合函数分解

要认识复合函数，必须要认识其复合过程，也就是要理解复合函数的分解过程。通常采取的方法是将复合函数由外向内逐层分解，将其拆分成若干个基本初等函数或者简单函数的复合。这里把基本初等函数经过平移、放大或缩小，或经过有限次四则运算所得到的函数关系称为简单函数。

【例 1-6】 利用复合函数的关系，求 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的定义域和值域。

解：因为 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 可看作 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=\sin x$ 复合而成；$u=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，$u\in[-1,1]$；又因为 $y=\mathrm{e}^u$，$u\in\mathbf{R}$，且 $y=\mathrm{e}^u$ 在其定义域内是单调递增的，$[-1,1]\subset\mathbf{R}$，所以 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，其值域是 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$。

【例 1-7】 指出下列函数是由哪些函数复合而成的。

（1）$y=\ln\sin x$　　　　（2）$y=\sin\sqrt{x^2+1}$

(3) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$　　　　(4) $y=\ln[\ln(\ln x)]$

解：(1) $y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u, u=\sin x$ 复合而成的。

(2) $y=\sin\sqrt{x^2+1}$ 是由 $y=\sin u, u=\sqrt{v}, v=x^2+1$ 复合而成的。

(3) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 是由 $y=u^2, u=\arctan v, v=\sqrt{x}$ 复合而成的。

(4) $y=\ln[\ln(\ln x)]$ 是由 $y=\ln u, u=\ln v, v=\ln x$ 复合而成的。

【例 1-8】 设 $f(x)=x^2+1, g(x)=2^x$，求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$。

解：$f(g(x))=[g(x)]^2+1=(2^x)^2+1=2^{2x}+1=4^x+1$

$g(f(x))=2^{f(x)}=2^{x^2+1}$

1.2.3 初等函数的定义

定义 1.3 由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数。

例如，$f(x)=(x^2+1)\cdot 2^x$；$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$都是初等函数。

许多情况下，分段函数不是初等函数，因为在其定义域区间上不能用一个式子表示，例如，$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 2-x & x>0 \end{cases}$不是初等函数。

1.2.4 反函数的定义

定义 1.4 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，并且在定义域 D 上是单调函数，若变量 y 在函数的值域 M 内任取一值 y_0，变量 x 在函数的定义域 D 内必有唯一确定的值 x_0 与之对应，且满足 $f(x_0)=y_0$，那么把变量 x 是变量 y 的函数记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$，即为函数 $y=f(x)$的反函数。

注意：①在定义域上具有单调性的函数有反函数；②反函数的定义域、值域上分别对应原函数的值域、定义域；③在同一坐标平面内，$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

基本初等函数关系中，指数函数和对数函数是一组反函数，三角函数和反三角函数是一组反函数。

【例 1-9】 求函数 $y=4x+2$ 的反函数。

解：$\because y=4x+2$　$\therefore x=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{y}{4}-\dfrac{1}{2}$　$\therefore y=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}$是 $y=4x+2$ 的反函数。

【例 1-10】 设函数 $y=4^x-2^{x+1}$，求 $f^{-1}(0)$。

解：根据原函数与反函数的关系，反函数的定义域即原函数的值域，故求 $f^{-1}(0)$可以理解为对原函数 $y=4^x-2^{x+1}$ 求其 $y=0$ 时变量 x 的值，故有 $4^x-2^{x+1}=0$。所以$(2^x)^2-2^x\cdot 2=0$，$2^x(2^x-2)=0$，故 $x=1$，即 $f^{-1}(0)=1$。

【能力训练 1.2】

基础练习

1. 判断题。

(1) 所有的函数关系都是初等函数。(　　)

(2) 所有的函数关系都有反函数。(　　)

(3) 定义在全体实数范围内的三角函数没有反函数。(　　)

(4) 任意多个函数关系都可以构成复合函数。(　　)

2. 填空题。

(1) $y=2^{\cos x}$ 的定义域是________,值域是________。

(2) $y=\ln\sqrt{x^2+1}$ 是由________________复合而成的。

(3) $y=e^{x+2}$ 的反函数是________________。

3. 将下列复合函数分解为简单函数。

(1) $y=\arcsin 2x$　　　　(2) $y=e^{\cos x}$

(3) $y=\ln\tan 2x$　　　　(4) $y=\sin^3(2x+5)$

4. 设 $f(x)=2^x$,$g(x)=\sin x$,求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$。

5. 设 $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$,求其反函数。

提高练习

1. 将下列复合函数分解为简单函数。

(1) $y=\sin(\sqrt[3]{x^2+2x})$　　　　(2) $y=\sqrt{\ln\sin x^2}$

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f(f(x))$。

3. 设函数 $f(x)=\sin x$,$g(x)=\begin{cases} x-\pi & x\leqslant 0 \\ x+\pi & x>0 \end{cases}$,求 $f(g(x))$。

4. 设函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$,求它的反函数,并指出反函数的定义域。

1.3　极限思想与函数极限

极限是微积分学中的一个基本重要概念,微分学与积分学的许多概念都是由极限引入的,并且最终由极限知识来解决,因此它在微积分学中占有非常重要的地位。

1.3.1　中国古代极限思想

在中国古代数学史上,许多哲学思想中都渗透着“极限”的光辉,朴素的极限思想占有

了非常重要的地位。公元前4世纪，中国古代思想家和哲学家庄子在《天下篇》中论述：“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。”其中，“大一”和“小一”指的就是无穷大和无穷小。而“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，更是道出了无限分割的极限思想。公元3世纪，刘徽在《九章算术》方田章“圆田术”注文中创造性地提出“割圆术”，刘徽提出“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”作为计算圆的周长、面积以及圆周率的基础，由此得出了我国最早的圆周率为3.1416，这个数值是当时世界上最早也是最准确的圆周率数据。在此过程中，刘徽大胆地将极限思想和无穷小分割引入了数学证明，给出的圆面积算法是极限思想的具体化，十分贴近现代积分学意义下的定义与公式，他的思想超越了他的时代。

1.3.2 数列的极限

在客观世界里，人们经常遇到某种无限变化的过程或者趋势，需要对这种无限变化过程或者趋势的发展结果做一定的研究。对这一类现象结果的研究，在数学上归纳为极限。

【应用实例 1-1】 一尺之棰，日取其半，万世不竭。

解：假设木棒长一尺，每次取其一半，用数学语言描述，可以表述为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$$

这是一个无限的过程，我们更关注无限过程的结果，可以分析出随着过程的进行，木棒越来越短，近乎为零。

定义 1.5 以自然数 n 为自变量的函数 $a_n=f(n)$，把它按照自然数由小到大的顺序排列：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，这样的一列无穷个数称为数列，记作$\{a_n\}$，数列中的每一个数称为数列中的项，数列的第 n 项 a_n 表述了数列的规律，称为数列的通项或者一般项。

例如，$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$的通项为$\frac{1}{2^n}$；$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$的通项为$\frac{n+1}{n}$；$1,0,1,0,\cdots,\frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\cdots$的通项为$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$。观察前两个数列，可以得到：随着 n 的无限增大，这两个数列都无限趋向一个固定的常数，其中$\frac{1}{2^n}$无限趋向于0，$\frac{n+1}{n}$无限趋向于1。

定义 1.6 给定一个数列$\{a_n\}$，当 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，如果存在一个常数 A，通项 a_n 无限接近于常数 A，则称数列$\{a_n\}$有极限，极限为 A，或称数列$\{a_n\}$收敛于 A，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$；否则，称 $n\to\infty$时，数列$\{a_n\}$没有极限或者发散。

【例 1-11】 试指出下列数列有没有极限，若有，极限是多少？

（1）$2,1,\frac{2}{3},\frac{2}{4},\cdots,\frac{2}{n},\cdots$

（2）$1,1,1,1,\cdots,1,\cdots$

（3）$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$

（4）$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$