第3章

电平信道

数字通信与网络中，用比特“0”“1”来统一表示各类信息，在之前的章节中已经介绍了将各类信源有效地表示为“0”“1”的方法。接下来将讨论如何在实际的物理信道中有效、可靠地传输“0”“1”比特，并对典型方法的性能进行分析。应注意，通信系统本质是一个物理系统，需要用实体的“物理量”承载携带抽象的“逻辑量”。这里将逐层级把抽象的“逻辑量”映射到具体的“物理量”，一步一步地阐明数字通信的物理实体是如何构建出来的。在本章中，先向物理量迈出一步，即用电平（在很多场合下也称为“符号”，之后会混用这两个名词）承载“0”“1”或“0”“1”的串，但是先忽略电平在时间上的表现。

3.1 实电平信道

3.1.1 信道模型

首先讨论一种较为简单的形式，即实电平信道，即信道的输入 x、输出 y 都是实数。此时，可以用条件概率 $\Pr\{y|x\}$ 唯一地刻画和描述信道，如图3.1所示。

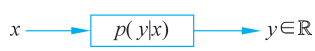

图 3.1 电平信道的转移概率模型

本书专注具有加性高斯噪声的实电平信道，如图3.2所示。

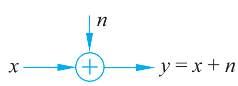

图 3.2 加性高斯噪声电平信道

该信道输入与输出之间的关系为

$$y = x + n$$

式中：n 为高斯噪声，服从零均值正态分布，其方差记为 σ^2，即 $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。其概率密度函数为

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

3.1.2　电平集合及其映射

在数字通信中，将“0”“1”比特串映射为一个许用电平（或者称合法电平），从而让电平承载信息。许用电平构成了电平集合 $\mathcal{A}$，其中许用电平的个数，即电平集合的大小 $|\mathcal{A}|$，决定了一个许用电平能够承载多少个比特。

例如：二元电平集合 $\mathcal{A}=\{-A,A\}$，每次承载1个比特；四元电平集合 $\mathcal{A}=\{-3A,-A,A,3A\}$，每次承载2个比特。

由于 k 个比特能够组成 2^k 种不同的比特串，因此电平集合 $\mathcal{A}$ 每使用一次，能够携带的比特数为

$$k=\log|\mathcal{A}|$$

在本书中一般假设上式中 k 为整数，即 $k\in\mathbb{N}$。

从比特串集合向电平集合的映射，一般采用格雷映射（Gray Mapping），这样做的目的是尽可能优化通信的可靠性。格雷映射中，相邻符号对应的比特串只有一位比特不同。因此，若将接收符号误判成相邻符号（这是以很大概率发生的），则其引起的比特差错数量最小。

针对给定的电平符号集合，还需要引入符号能量。实电平集合定义为许用符号平方的均值，即 $E_\mathrm{s}=E\{x^2\}$ 后面还会涉及复电平集合，其定义为许用符号模平方的均值。

3.1.3　二元输入及其最佳判决

最简单的一种电平信道传输，即二元符号集合的加性噪声电平信道，电平 A 表示比特“0”，电平 $-A$ 表示比特“1”。

显然，受到加性高斯噪声的污染，接收电平（信道输出）是一个随机变量，其接收电平的条件分布为：若发送 A，则接收电平 $y\sim\mathcal{N}(A,\sigma^2)$；若发送 $-A$，则接收电平 $y\sim\mathcal{N}(-A,\sigma^2)$。

二元符号集合的输出分布如图3.3所示。

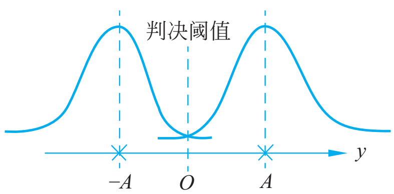

图 3.3　二元符号集合的输出分布

由以上讨论，接下来就会遇到一个基本问题：无论是发送 A，抑或发送 $-A$，接收电平都分布于整个实数轴上。那么，若接收到 y，如何判定 x 是 A，还是 $-A$？

这里关注“硬判决”，即必须将 y 映射为 A 或 $-A$，而不是仅仅说 y 更像谁，有多像？为了解决这一基本问题，首先从一些直观印象出发。先考虑 $p(A)=p(-A)=\dfrac{1}{2}$ 的情况，由对称性，当 $y>0$ 时，判为 A，当 $y<0$ 时，判为 $-A$，这看上去是较为合理的。再考虑 $p(A)>p(-A)$ 的情况，当 $y=0$ 时，更有可能发送的是 A，因此判为 A 命中的概率更大一些。把上述直观感受严格化，从而提出最大后验概率准则（Maximum a posteriori，MAP）——条件于观测到的 y，A、$-A$ 谁出现概率大，则判定为谁。

【MAP 准则】：对于给定的 y，若 $\Pr\{x=A|y\}>\Pr\{x=-A|y\}$，则判定 $\hat{x}=A$；若

$\Pr\{x=A|y\}<\Pr\{x=-A|y\}$，则判定 $\hat{x}=-A$。

如果把判决看作从实数集合 $\mathbb{R}$ 到许用符号集合 $\mathcal{A}$ 的一个映射 $\hat{x}=\mu(y)$，那么可以把这个映射具体写为

$$\begin{aligned}\hat{x}=\mu(y)&=\underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmax}}\ p(x|y)\\&=\underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmax}}\ \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}\\&=\underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmax}}\ p(y|x)p(x)\end{aligned}$$

下面对 MAP 准则的最优性进行严格的数学讨论。

定理 3.1 MAP 准则可最大化正确判决 $\Pr\{\text{correct}\}$ 的概率。

证明： 在电平信道中，正确判决意味着发送 A 时接收端将 y 判为 A，发送 $-A$ 时接收端将 y 判为 $-A$。 □

因此，其概率可以严格表示为

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{correct}\}=&\Pr\{\mu(y)=A|y,x=A\}p(y|A)p(A)+\\&\Pr\{\mu(y)=-A|y,x=-A\}p(y|-A)p(-A)\end{aligned}$$

进一步注意到，$\mu(y)$ 由 y 唯一确定。因此，在 y 作为条件下，$\mu(y)$ 的分布与 x 的取值无关。于是，上式中 $\Pr\{\mu(y)=A|y,x=A\}$ 可以重新写为

$$\Pr\{\mu(y)=A|y,x=A\}=\Pr\{\mu(y)=A|y\}$$

而 $\Pr\{\mu(y)=-A|y,x=-A\}$ 可以重新写为

$$\Pr\{\mu(y)=-A|y,x=-A\}=\Pr\{\mu(y)=-A|y\}$$

二者都与 x 取值无关。

由条件概率的归一化公式可得

$$\Pr\{\mu(y)=A|y\}+\Pr\{\mu(y)=-A|y\}=1$$

$p(y|A)p(A)$、$p(y|-A)p(-A)$ 都是与 $\mu(y)$ 无关的常数，因此最大化正确率 $\Pr\{\text{correct}\}$ 的问题构成了线性规划问题。为了清晰表示为线性规划的标准形式，记 $a=p(y|A)p(A)$，$b=p(y|-A)p(-A)$，为两个非负常数。同时，优化变量 $x_1=\Pr\{\mu(y)=A|y\}$，$x_2=\Pr\{\mu(y)=-A|y\}$。于是，基于上述讨论，有线性规划问题如下：

$$\begin{aligned}\max\quad & ax_1+bx_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2=1\\ & x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

尽管一般线性规划问题需要通过单纯型法等求解，但上述线性规划问题的最优解可以很直观地看出：当 $a>b$ 时，$x_1=1,x_2=0$ 为最优解；当 $a<b$ 时，$x_1=0,x_2=1$ 为最优解。

将上述最优解置换回原始讨论的概率参数，就可以得到如下结论：

（1）当 $p(y|A)p(A)>p(y|-A)p(-A)$ 时，$\Pr\{\mu(y)=A|y\}=1$，最佳。因此，有 $\mu(y)=A$。

（2）当 $p(y|A)p(A)<p(y|-A)p(-A)$ 时，$\Pr\{\mu(y)=-A|y\}=1$，最佳。因此，有 $\mu(y)=-A$。

3.1.4 二元输入的最大似然判决和最小距离判决

上面推导了一种最佳判决准则，即MAP准则。下面讨论其一种特殊情况，即$p(A) = p(-A) = \dfrac{1}{2}$。通过信源压缩部分的知识可知，理想的压缩结果中“0”“1”比特出现的概率各是$\dfrac{1}{2}$，因此会导致两个电平等概率的情况。此时，可以进一步简化MAP准则，得到

$$\begin{aligned}\hat{x} = \mu(y) &= \underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmax}}\ p(y|x)\cdot\frac{1}{2}\\ &= \underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmax}}\ p(y|x)\end{aligned}$$

在上述判决中，当$p(y|A) > p(y|-A)$时，就判为A；而当$p(y|A) < p(y|-A)$时，就判为$-A$。直观上来看，就是y与谁相似，就判为谁，因此也将这种判决称为最大似然（Maximum likelihood, ML）准则。

ML准则和MAP准则对比可以发现，MAP准则相对于ML准则多了先验概率的加权。当先验概率平权时，MAP准则就退化成了ML准则。此外，ML准则还适用于先验概率未知的场合。

之前的讨论都是针对一般信道的，即由$\Pr\{y|x\}$进行一般性刻画的信道，而并没有用到条件概率$\Pr\{y|x\}$的具体形式。在数字通信中，重点关注的一类信道是加性高斯噪声信道，其$\Pr\{y|x\}$提供了进一步简化判决方式的信息。

仍从概率分布的直观图像开始，如图3.4所示。

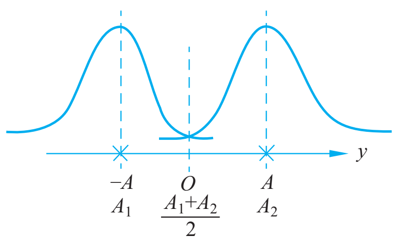

图 3.4 等概发送符号的条件概率密度对比

可以看到，由高斯分布的对称性和单边单调性可得出：当$y > 0$时，条件概率$p(y|A) > p(y|-A)$，输出应判为A；当$y < 0$时，条件概率$p(y|A) < p(y|-A)$，输出应判为$-A$。

上述讨论所适用的符号集合还可以从$\mathcal{A} = \{-A, A\}$进一步推广到$\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$，其中$A_1 < A_2$。根据条件概率密度的大小对比图，有如下直观结论：

（1）当$y > \dfrac{A_1 + A_2}{2}$时，输出应判为A_2；

（2）当$y < \dfrac{A_1 + A_2}{2}$时，输出应判为A_1。

结合上述直观对比，以严格的数学推导简化加性高斯噪声二元电平信道的ML准则。如下推导中主要利用函数的单调性，可得

$$\hat{x} = \mu(y) = \underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmax}}\ p(y|x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmax}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmin}} (y-x)^2 \\
&= \underset{x\in\{-A,A\}}{\operatorname{argmin}} |y-x|
\end{aligned}
$$

上述推导的结论表明，当接收到的 y 距离 A 近时，就判为 A；当 y 距离 $-A$ 近时，就判为 $-A$。这种把接收电平判决到距离最近的合法符号的方法称为最小欧几里得距离（Minimum Euclidean Distance, MED）准则。由于 A 和 $-A$ 关于原点 0 的对称性，也可以把 0 作为判决阈值：当 $y>0$ 时，输出应判为 A；当 $y<0$ 时，输出应判为 $-A$。

上述判决准则未指明 $y=0$ 时如何判决。此时，无论将接收电平 $y=0$ 判为 A，抑或判为 $-A$，都不会改变判决的正确率，因此随机判一个就可以。

3.1.5 二元电平信道的判决差错概率

在通信与网络学科中，不仅要设计最佳的策略和方法，还需要对其性能，特别是理论性能极限进行分析。对于判决的差错概率分析就是一种典型且重要的核心知识。

下面以二元电平信道为切入点，开始介绍如何有效地分析电平信道的可靠性。由 3.1.4 节给出的最佳判决准则，当 $p(A)=p(-A)=\dfrac{1}{2}$ 时，把 $y>0$ 判为 A，把 $y<0$ 判为 $-A$。那么差错事件的出现就包含如下两种情况：

（1）发送电平 $x=A$，但接收到 $y<0$，即 $\{x=A,y<0\}$，此时发生差错；

（2）发送电平 $x=-A$，但接收到 $y>0$，即 $\{x=-A,y>0\}$，此时也发生差错。

上述两个事件的交集为空，即 $\{x=A,y<0\}\cap\{x=-A,y>0\}=\varnothing$。因此，电平错判概率可以由如下表达式给出：

$$
P_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\Pr\{y<0|A\} + \frac{1}{2}\Pr\{y>0|-A\}
$$

将加性高斯噪声信道的统计特性，即

$$
p(y|A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}\right),\ p(y|-A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y+A)^2}{2\sigma^2}\right)
$$

代入上式后，可推导差错概率。

在发送电平 $x=A$，但误判成 $\hat{x}=-A$ 的条件概率为

$$
\begin{aligned}
\Pr\{y<0|A\} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{-A} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{A}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{A/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= Q(A/\sigma)
\end{aligned}
$$

式中：$Q(x)$ 为标准正态分布的互补累积分布函数，其表达式为

$$Q(x)=\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$

类似的条件，在发送电平 $x=-A$，但误判成 $\hat{x}=A$ 的条件概率为

$$\begin{aligned}\Pr\{y>0|-A\}&=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x+A)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_A^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\\&=Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

将以上两式代入判决差错概率 P_e 的表达式，可得

$$\begin{aligned}P_\mathrm{e}&=\frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\\&=Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

显然，判决差错概率 P_e 是 $\dfrac{A}{\sigma}$ 的减函数。下面对判决差错概率 P_e 做进一步的讨论。

首先，对于二元电平集合 $\mathcal{A}=\{-A,A\}$，1个比特对应于一次电平符号的传输。因此，误比特率 P_b 与电平符号的判决差错概率 P_e 相等。常将电平符号的判决差错概率简称为误电平率或者误符号率，误符号率用 P_s 表示。

接下来，还希望建立误符号率和符号能量之间的关系。回顾之前的定义，传一个电平（符号）的能量 E_s 为其电平的均方 $E(x^2)$。针对二元电平集合 $\mathcal{A}=\{-A,A\}$，其符号能量为

$$\begin{aligned}E_\mathrm{s}&=\frac{1}{2}(-A)^2+\frac{1}{2}A^2\\&=A^2\end{aligned}$$

于是，可以把 $Q(x)$ 函数的自变量重新表示为

$$\frac{A}{\sigma}=\sqrt{\frac{E_\mathrm{s}}{\sigma^2}}$$

式中：σ^2 为加性高斯噪声的方差。

因此，二元电平信道的差错概率为

$$P_\mathrm{b}=P_\mathrm{e}=Q\left(\sqrt{\frac{E_\mathrm{s}}{\sigma^2}}\right)$$

式中：$\dfrac{E_\mathrm{s}}{\sigma^2}$ 为信噪比（Signal-to-Noise Ratio, SNR）。

最后探讨从比特传输层面所看到的等效信道。从比特层面来看，可以把电平信道封装在一个“黑盒子”中。此时，每发送一个数据比特 $d\in\{0,1\}$，黑盒子就以概率 $1-P_\mathrm{b}$ 正确输出原始的输入比特，而以概率 P_b 输出与原始比特相反的比特，这种抽象出来的“黑盒子”信道称为对称二进制信道或二元对称信道（Binary Symmetric Channel, BSC）。在一些教科书和论文中也常用 ε 来代替 P_b。显然，$\varepsilon=Q\left(\sqrt{\dfrac{E_\mathrm{s}}{\sigma^2}}\right)$。二元对称信道与二元电平信道的等效关系如图3.5所示。

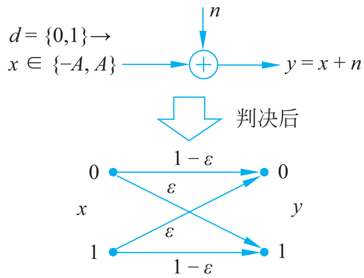

图 3.5　二元对称信道与二元电平信道的等效关系

从相互转化的角度来看，电平信道是二元对称信道的一种物理实现，判决后等效为二元对称信道，有一些综合性的题目就会利用二者的转化关系。

3.1.6　单极性二元电平集合

在一些特殊的应用中，要求电平符号非负，电平符号集合$\mathcal{A}=\{-A,A\}$就不再适用。为了满足$x\geqslant 0$的约束，可以换一个新的符号集合，$\mathcal{A}=\{0,2A\}$。这个新的符号集合称为单极性二元电平集合，简称单极性二元码。此时，仍假设符号从$\mathcal{A}$中等概选取。

对比一下双极性电平集合$\mathcal{A}=\{-A,A\}$，哪些分析结果仍然适用，哪些需要更新。首先，判决阈值的位置变为A，但是电平到阈值的距离仍为A，并没有发生变化，如图3.6所示。因此，误符号率或者误比特率的表达式仍为$P_{\rm b}=P_{\rm e}=Q\left(\dfrac{A}{\sigma}\right)$。

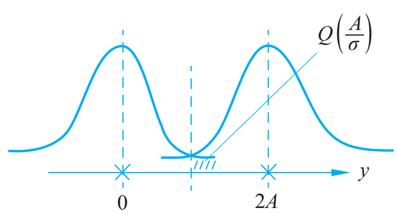

图 3.6　单极性二元电平集合的接收电平条件概率分布

但是，此时符号能量$E_{\rm s}$与A之间的关系发生改变：

$$\begin{aligned}E_{\rm s}&=\frac{1}{2}0^2+\frac{1}{2}(2A)^2\\&=2A^2\end{aligned}$$

因此，有$A=\sqrt{\dfrac{E_{\rm s}}{2}}$，代入$P_{\rm b}=P_{\rm e}=Q\left(\dfrac{A}{\sigma}\right)$后，得到$P_{\rm b}=Q\left(\sqrt{\dfrac{E_{\rm s}}{2\sigma^2}}\right)$。相比$\{-A,A\}$集合，要想达到相同$P_{\rm b}$，就需要多用1倍的符号能量。换言之，其信噪比相对于双极性二元符号集合损失了3dB。

进一步推广上述讨论，即给双极性二元符号集合的电平添加一个直流分量D。此时，构成的符号集合$\mathcal{A}=\{D-A,D+A\}$。为了分析该符号集合的差错性能，仍采用“知识迁移”的学习方法，哪些分析结果仍然适用，哪些需要更新。首先，此时判决阈值的位置变为D，但是电平到阈值的距离仍为A，没有发生变化，如图3.7所示。因此，仍然有$P_{\rm b}=P_{\rm e}=Q\left(\dfrac{A}{\sigma}\right)$。

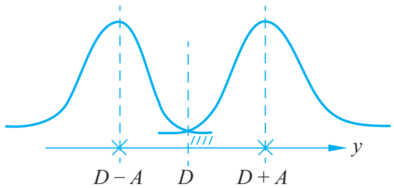

图 3.7　直流分量为 D 的二元电平集合的接收电平条件概率分布

但是，符号能量 E_s 的计算公式又有改变，具体推导如下：

$$\begin{aligned}E_\mathrm{s} &= E(x^2)\\ &= \frac{1}{2}(D-A)^2+\frac{1}{2}(D+A)^2\\ &= D^2+A^2\end{aligned}$$

其结果不仅与 A 有关，还与直流分量 D 有关。为了更加简洁地表示差错性能，定义归一化参数，$\zeta=\dfrac{D}{A}$。此时，符号能量 $E_\mathrm{s}=(1+\zeta^2)A^2$，代入到 $P_\mathrm{b}=P_\mathrm{e}$ 的表达式中，可得 $P_\mathrm{b}=Q\left(\sqrt{\dfrac{E_\mathrm{s}}{(1+\zeta^2)\sigma^2}}\right)$。换言之，直流分量越大，在相同符号能量下，通信的可靠性越差，误码率越大。

3.1.7　多元电平信道（一维）

上面详尽地讨论了二元电平集合，但是这种电平集合有一个天然的缺陷，即使用其进行传输时，信道每次只能通过1个比特。当通信有着较高的速率要求时，就希望每次使用信道，能够通过 k 个比特。这时，人们自然地想到了多电平符号集合。当多电平符号集合的大小 $|\mathcal{A}|=M$ 满足 $M=2^k$ 时，就可以一次承载 k 个比特。符号集合的大小用 M 表示。将 M 电平符号集合的电平传输称为 M 元码传输。

在本节中，关注实数轴上的多元电平传输，即一维空间上的 M 元码。从对称情况谈起，其电平集合如图3.8所示。

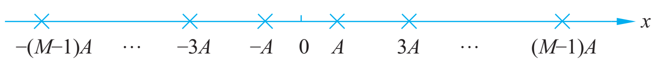

图 3.8　M 元符号集合的电平分布

在图3.8所示的符号集合 $\mathcal{A}$ 中，共有

$$\frac{(M-1)A-(-(M-1)A)}{2A}+1=M(\text{个})$$

电平符号。默认符号等概率发送，则应用最小欧几里得距离判决准则（这里略去了 M 元符号的MAP准则、ML准则和MED准则讨论，读者不难从二元情况自行推广）后，可以得到直观结论：图3.8中，电平在 A 的奇数倍位置时，判决阈值在 A 的偶数倍位置。

首先讨论多元电平集合的最佳判决策略。对多电平情况，MAP准则、ML准则和MED准则仍然是最优的，但是其检验假设集合从 $\{-A,A\}$ 的二元电平集合变为了等间距且关于0对称的 M 元电平集合，即

$$\mathcal{A}=\{-(M-1)A,\cdots,-A,A,\cdots,(M-1)A\}$$

此时，只需要替换之前推导中的符号集合 $\mathcal{A}$ 即可，于是有

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\, p(x|y)\\ &= \underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\, p(y|x)p(x)\\ &= \underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\, p(y|x)\\ &= \underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmin}}\, |y-x|\end{aligned}$$

在给出了 M 元电平传输的符号集合以及最佳判决方法之后，我们着眼于分析此类多元电平传输的差错概率。注意，还是从知识迁移的角度关注 M 元电平传输与两电平传输的差异之处。对于 M 元电平符号集合，其发送不同的符号，发生差错的条件概率是不同的，如图3.9和图3.10所示。

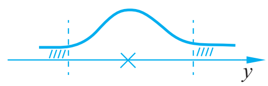

图 3.9　M 元电平集合中，中间电平的差错图样

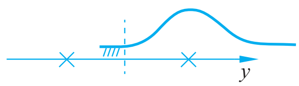

图 3.10　M 元电平集合中，边缘电平的差错图样

在 M 元电平符号集合中，共有 $M-2$ 个“中间的点”，它们因为有两个“邻居”（左邻右舍），更加容易因为噪声而被误判。其条件差错概率为

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{e}1} &= \int_{-\infty}^{-A}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x+\int_{A}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

除了 $M-2$ 个“中间的点”，M 元电平符号集合中还包括2个边缘上的点，这些电平只有一个“邻居”，因此被误判成相邻电平的概率比起“中间的电平”要小一半。当发送边上的电平时，其条件差错概率为

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{e}2} &= \int_{-\infty}^{-A}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\text{或}\int_{A}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

综合上面的讨论，并注意到符号是等概发送的，即发送任意一个电平的概率都是 $\frac{1}{M}$，于是上述 M 元电平传输的平均差错概率为

$$P_{\mathrm{e}} = \frac{M-2}{M}\times 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)+\frac{2}{M}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = \frac{2M-2}{M}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

在上式中将 M 元电平传输的符号差错概率 P_{e} 表示为符号距离的一半（即 A）和噪声标准差 σ 的函数。而表示为符号能量 E_{s} 和噪声方差 σ^2 的函数，则无论在理论上还是工程上都具有特别的便利性。但是，在 M 元电平传输中，由符号距离的一半 A 计算符号能量 E_{s}，相对复杂一些，需要一些公式的记忆或者技巧。

下面从 A 推导 M 电平集合的符号能量（这是记忆或者推导 M 电平集合的差错概率的

难点）：

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{s}} = E(x^2) &= \frac{1}{M} \times 2(A^2 + (3A)^2 + \cdots + ((M-1)A)^2) \\
&= \frac{2A^2}{M} \sum_{i=1}^{M/2} (2i-1)^2 \\
&= \frac{2A^2}{M} \left(4\sum_{i=1}^{M/2} i^2 - 4\sum_{i=1}^{M/2} i + \frac{M}{2} \right)
\end{aligned}
$$

其中，求等差数列的求和是读者耳熟能详的，即

$$
\sum_{i=1}^{M/2} i = \frac{(1+\frac{M}{2})\frac{M}{2}}{2} = \frac{M(M+2)}{8}
$$

但是，求等差数列的平方和 $\sum_{i=1}^{L} i^2$ 有一定的难度，也不是读者之前常用的。推导或者记忆等差数列的平方和，其要点在于如下两方面：

（1）等差数列的平方和必是 L 的3次多项式（这个性质用于猜出通项表达式）；

（2）数学归纳法，用于证明上面猜出的表达式。

等差数列的平方和必是 L 的3次多项式，将其记为

$$
S_L = \sum_{i=0}^{L} i^2 = aL^3 + bL^2 + cL + d
$$

把求和项改为从0开始，因为 $S_0 = 0$，从而可以简化推导。为了求解通式中的未知数 a、b、c、d，可以直接计算 L 为0、1、2、3时的值，从而得到如下四元一次方程组：

$$
\begin{aligned}
&S_0 = d = 0 \\
&S_1 = a + b + c + d = 1 \\
&S_2 = 8a + 4b + 2c + d = 5 \\
&S_3 = 27a + 9b + 3c + d = 14
\end{aligned}
$$

通过求解该四元一次方程组，可以得到

$$
a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}
$$

将其代入

$$
S_L = \sum_{i=0}^{L} i^2 = aL^3 + bL^2 + cL + d
$$

可以得到

$$
S_L = \frac{1}{6} L(L+1)(2L+1)
$$

通过数学归纳法可以证明上式对于一般 L 都是成立的。在一些先讲积分后讲微分的数学教学体系中，上式也是有应用的。

注意到 E_{s} 的表达式中 $L = \frac{M}{2}$，因此有

$$
\sum_{i=1}^{M/2} i^2 = \frac{M^3}{24} + \frac{M^2}{8} + \frac{M}{12}
$$

把这一结果和等差数列的求和公式代入 E_s 的表达式中，可以得到 M 元码的符号能量为

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{2A^2}{M}\left(\frac{M^3}{6}+\frac{M^2}{2}+\frac{M}{3}-\frac{M^2+2M}{2}+\frac{M}{2}\right) \\ &= \frac{A^2(M^2-1)}{3} \end{aligned}$$

由上式可得

$$A=\sqrt{\frac{3E_s}{M^2-1}}$$

同时还要注意到，在 M 电平传输中，一个符号承载的比特数为 $\log_2 M$。因此，每比特能量 $E_b = E_s/\log_2 M$。显然，在二元电平符号集合中，有 $E_b = E_s$。

将 $A=\sqrt{\frac{3E_s}{M^2-1}}$ 代入 M 电平传输的误符号率公式中，可得

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{E_s}{\sigma^2}}\right) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)$$

注意，上式中给出的 P_e 为误符号率，其在 $M(M>2)$ 电平传输中并不等于误比特率。对于格雷映射，当信噪比 E_s/σ^2 较大时，多数符号差错只会导致 1 个比特差错。这是由于在格雷码中，相邻符号之间只有 1 个比特不同，因此如果误判成相邻位置的电平，也只会导致 1 个比特的差错。当信噪比较高时，误判为非邻位电平的概率很低，如图3.11所示。

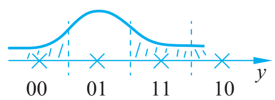

图 3.11　格雷映射下高信噪比的差错图样

综上讨论，可以得到高 $\frac{E_s}{\sigma^2}$ 下近似的误比特率公式：

$$\begin{aligned} P_b &\approx \frac{1}{\log_2 M}P_e \\ &= \frac{2(M-1)}{M\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{E_s}{\sigma^2}}\right) \\ &\approx \frac{2}{\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{E_s}{\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

注意每符号能量 E_s 和每比特能量 E_b 之间的倍数关系，将 $E_b = E_s/\log_2 M$ 代入上式，可得

$$P_b = \frac{2(M-1)}{M\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{\sigma^2}}\right)$$

最后对一维 M 电平传输的符号集合做一般化推广。如果其中存在一个直流偏置分量 D，即 M 元电平集合为

$$\{D-(M-1)A,\cdots,D-3A,D-A,D+A,D+3A,\cdots,D+(M-1)A\}$$

则不难计算出

$$E_s = \frac{M^2-1}{3}A^2+D^2$$

即在交流分量的能量基础上叠加了直流分量的能量消耗。为了简洁表示，定义归一化因子

$$\zeta = \frac{D}{A\sqrt{\frac{M^2-1}{3}}}$$

此时，可以将每符号能量重新写为

$$E_{\mathrm{s}} = (1+\zeta^2)\frac{M^2-1}{3}A^2$$

重复上面的推导，可以类似得到含直流偏置分量 D 的 M 电平传输的误比特率为

$$P_{\mathrm{b}} = \frac{2(M-1)}{M\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_{\mathrm{b}}}{(1+\zeta^2)\sigma^2}}\right)$$

对于 M 电平传输来说，由于一次传输承载了 $k=\log_2 M$ 个比特，相当于把二元对称信道使用了 $k=\log_2 M$ 次，且每次的误比特率都是 $\varepsilon = P_{\mathrm{b}}$。

3.2　复电平信道与矢量电平信道

3.1 节集中讨论了在一维实空间（实数轴）上的电平集合，即实电平集合，其对应的是实电平信道。如果信道每次可以传输一个复数，那么称其为负电平信道。此时，通过发送复数符号就可以提升一次传输的信息承载量。如果仍用实电平符号进行传输，那么损失一部分信息承载量，在高阶的课程（如“高等数字通信”）中也称损失一个自由度。

因此，本节的目的是拓展符号集合为二维或复数，乃至 N 维空间上的电平集合。在学习中应关注哪些知识是可以迁移的，哪些是新的增量的知识。

不变的知识（可迁移）：最大后验概率准则、最大似然准则、最小欧几里得距离准则的最优性依然保持；

新增的知识：复电平传输中的判决域，差错分析方法。

首先关注复电平或二维电平。将 $\boldsymbol{x}=(x_{\mathrm{I}},x_{\mathrm{Q}})\in\mathbb{R}^2$ 称为一个二维电平。更常见的是常用一个复电平表示二维空间中的电平，即 $x=x_{\mathrm{I}}+\mathrm{j}x_{\mathrm{Q}}\in\mathbb{C}$。

应注意如下两点：

（1）从集合的角度来看，二维向量与复数可一一对应（建立一一映射，同时保持空间上的几何结构如距离等）；

（2）若定义运算，则二维向量与复数是不同的。例如，旋转一个二维向量需要用一个 2×2 矩阵与之相乘，而旋转复数只需要另一个复数与之相乘就可以。有一个专门的数学分支为“表示理论”，其采用有特殊结构的 2×2 矩阵来对应一个复数。

在通信与网络中，二维向量与复数电平集合无本质差别。但是，人们更习惯采用复电平进行讨论，其优势在后面的载波信道章节中还会进一步介绍。

3.2.1　加性复高斯噪声信道与复电平信道的判决准则

首先介绍常用的一种复电平信道，即加性复高斯噪声信道，如图3.12所示。

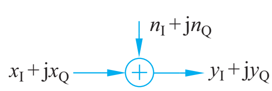

图 3.12　加性复高斯噪声信道

加性复高斯噪声信道的数学模型为

$$y_{\mathrm{I}}+\mathrm{j}y_{\mathrm{Q}}=x_{\mathrm{I}}+\mathrm{j}x_{\mathrm{Q}}+n_{\mathrm{I}}+\mathrm{j}n_{\mathrm{Q}}$$

复高斯随机变量 $n=n_{\mathrm{I}}+\mathrm{j}n_{\mathrm{Q}}$ 的均值为0，n_{I} 和 n_{Q} 相互独立，且满足 $n_{\mathrm{I}}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$，$n_{\mathrm{Q}}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$。此时，记复高斯随机变量 $n=n_{\mathrm{I}}+\mathrm{j}n_{\mathrm{Q}}\sim\mathcal{CN}(0,2\sigma^2)$。更具体地，$n_{\mathrm{I}}$ 和 n_{Q} 的联合分布为

$$p(n_{\mathrm{I}},n_{\mathrm{Q}})=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{n_{\mathrm{I}}^2+n_{\mathrm{Q}}^2}{2\sigma^2}\right)$$

复电平传输的一种简单实现方法是第一次传 x_{I}，第二次传 x_{Q}，将一个实数电平信道使用两次，构成一个复电平信道。而在后面的章节内容中可以看到，实际通信系统中是存在用一次完成负电平传输的机制的。

接下来对复电平传输的判决准则进行推导。假设符号集合中的复电平等概率发送。具体地，假设 $x\in\mathcal{A}$，且 $\mathcal{A}$ 为 M 个复数组成的集合。此时不难看出，MAP 准则仍然是最优的。从 MAP 准则出发，有

$$\begin{aligned}
\hat{x}&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,p(x|y)\\
&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,p(y|x)p(x)\\
&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,p(y|x)\\
&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{(y_{\mathrm{I}}-x_{\mathrm{I}})^2+(y_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{Q}})^2}{2\sigma^2}\right)\\
&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmin}}(y_{\mathrm{I}}-x_{\mathrm{I}})^2+(y_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{Q}})^2\\
&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmin}}\,\|y-x\|
\end{aligned}$$

上述推导的结论落脚于复平面上的最小欧几里得距离准则，即在复平面上，接收符号 y 距离哪个许用符号近，就判决成哪个许用符号。接下来针对具体复电平集合，应用上述判决准则给出最佳判决域，分析其差错概率。

3.2.2 正方形格点上的复电平集合

复平面上的正方形格点是实轴上等间距格点最自然的一种推广，其分布如图3.13所示。

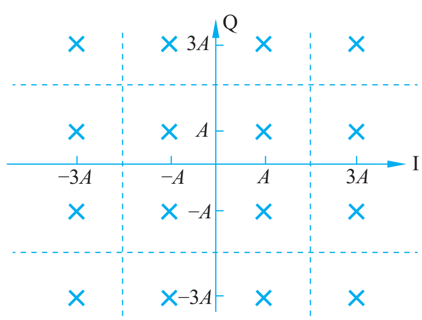

图 3.13 正方形格点上的复电平集合及其判决域

记 $M=L^2$，则正方形格点上的包含 M 个复电平的集合可以表示为

$$x\in\{-(L-1)A,\cdots,-A,A,\cdots,(L-1)A\}+\mathrm{j}\{-(L-1)A,\cdots,-A,A,\cdots,(L-1)A\}$$

其每个符号可以承载 $\log_2 M$ 个比特，同样采用格雷映射。这种复电平集合的产生类似于将两个实电平集合做空间直积（也称笛卡儿乘积），即在两个实电平集合中各任取一个元素，其中一个乘以虚数单位 j 相加。

对上述复电平集合应用最小欧几里得距离准则，则无论判决阈值也是横平竖直的直线，在实轴（I 路）和虚轴（Q 路）都位于偶数倍 A 电平处，如图3.13所示。

接下来对其进行差错分析。类似于 M 元 $(M>2)$ 实电平传输，发送不同位置上的符号，其条件差错概率不同，如图3.14所示。

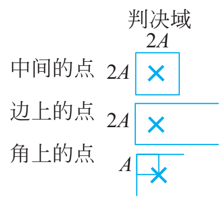

图 3.14　不同位置上符号的差错模式

为了进行定量化分析，对其数学表达式分类讨论如下：

（1）中间的点，其条件差错概率为

$$P_{\mathrm{e}}=1-\left(1-2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)^2$$

这样的点共有 $(\sqrt{M}-2)^2$ 个。

（2）边上的点，其条件差错概率为

$$P_{\mathrm{e}}=1-\left(1-2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)\left(1-Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)$$

这样的点共有 $4(\sqrt{M}-2)$ 个。

（3）角上的点，其条件差错概率为

$$P_{\mathrm{e}}=1-\left(1-Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)^2$$

这样的点共有 4 个。

一种直观的理解仍然类似于 M 元实电平传输的讨论。

基于上述分类讨论给出正方形格点复电平集合的平均差错概率。同样，有两种方法进行计算。直观的方法就是按照上面的三类判决域及其差错图样进行分类讨论，再求平均。这里采用一种更巧妙的方法。由于这样一个符号集合的几何结构，I、Q 两路（两维），或者说实部、虚部的噪声是独立的，同时也在两个维度上独立进行判决。因此，可以将其看作两路独立的一维对称实电平传输，其每一路的电平集合有 $L=\sqrt{M}$ 个元素。

一路对称 $\sqrt{M}$ 元实电平传输的差错概率为

$$P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{I}}=P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Q}}=\frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

记此类复电平传输的正确概率为 P_{c}，显然

$$P_{\mathrm{c}}=(1-P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{I}})(1-P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Q}})$$

因此，差错概率可以表示为

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{e}} &= 1 - P_{\mathrm{c}} \\
&= 1 - (1 - P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{I}})(1 - P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Q}}) \\
&= P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Q}} - P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{I}} P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Q}} \\
&\approx P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Q}} \\
&= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

仍然把表征符号间距的物理量 A 替换为常用的符号能量 E_{s}。为此，推导 E_{s} 与 A 之间的关系。M 元复电平符号集合包含了两路 $\sqrt{M}$ 元复电平符号集合的能量，因此不难得到

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \times 2 \times 2 \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} (2i-1)^2 A^2 \\
&= \frac{2(M-1)}{3} A^2
\end{aligned}
$$

从上式中反推 A，就可以得到

$$
A = \sqrt{\frac{3E_{\mathrm{s}}}{2(M-1)}}
$$

将这一结果代入上述差错概率公式，就可以得到正方形格点上复电平集合的差错概率，即

$$
P_{\mathrm{e}} = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{2(M-1)} \frac{E_{\mathrm{s}}}{\sigma^2}}\right)
$$

每个复电平符号承载 $\log_2 M$ 个比特，因此给定每比特能量 E_{b} 后，就有 $E_{\mathrm{s}} = \log_2 M \times E_{\mathrm{b}}$。由于采用了格雷映射，因此相邻符号之间仅相差 1 个比特。当信噪比较高时，即使发生差错，也会以很高的概率被误判成相邻符号，此时有

$$
P_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\log_2 M} P_{\mathrm{e}}
$$

综合上述讨论，可以把正方形格点上复电平符号集合的误比特率写为

$$
P_{\mathrm{b}} = \frac{4}{\log_2 M}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{2(M-1)} \frac{E_{\mathrm{b}}}{\sigma^2}}\right)
$$

当 M 较大时，可以得到一个简化的近似结果，即

$$
P_{\mathrm{b}} \approx \frac{4}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{2(M-1)} \frac{E_{\mathrm{b}}}{\sigma^2}}\right)
$$

最后讨论此时的复电平传输与对称二元信道之间的等效关系。每使用正方形格点的复电平集合进行一次复电平传输，就等价于使用 $\log_2 M$ 次二元等效信道，其误码率 $\varepsilon = P_{\mathrm{b}}$，其中 P_{b} 由上式给出。

3.2.3 均匀分布于圆上的复电平集合

复电平集合的几何图案往往取自常见的图形，并且具有某种对称性。这样一方面有较为成熟的数学工具用于描述判决域，另一方面对称性尽量最优化了最差符号的可靠性。接

下来考虑另一种常见的复电平集合，其 M 个复电平均匀分布于半径 A 的圆上，如图3.15所示。

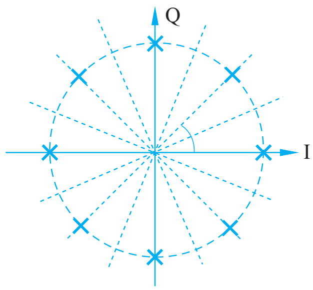

图 3.15 均匀分布于圆上的复电平集合及其判决域

M 个许用复电平的集合可以表示为

$$x \in \mathcal{A} = \{A, A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, A\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta}, \cdots, A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(M-1)\theta}\}$$

其中，相邻符号的辐角之差 $\theta = \dfrac{2\pi}{M}$。均匀分布于圆上的复电平集合同样存在格雷映射，如图3.16所示。因此，当误判为相邻符号时，只会产生1个比特的差错。

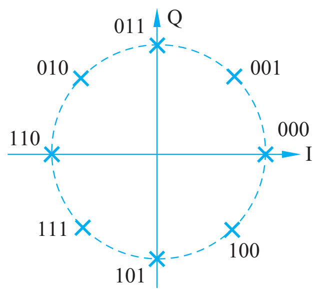

图 3.16 均匀分布于圆上的复电平集合的格雷映射

基于上述符号集合的表达式可推导其最佳判决策略。仍假设符号等概率发送，此时可以直接应用最小欧几里得距离准则，得到

$$\hat{x} = \underset{x \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} \|y - x\| = \underset{x \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} |\angle y - \angle x|$$

为了更简洁清晰地表述判决准则，将 $\hat{x}$ 重新写为

$$\hat{x} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\hat{m}\theta}$$

式中

$$\hat{m} = \underset{m \in \{0,1,\cdots,M-1\}}{\operatorname{argmin}} \left|\angle y - \frac{2m\pi}{M}\right|$$

其中：$\angle y = \arctan\dfrac{y_{\mathrm{Q}}}{y_{\mathrm{I}}}$，$\angle x = \arctan\dfrac{x_{\mathrm{Q}}}{x_{\mathrm{I}}}$。

上式给出了一种基于角度的判决，即接收符号的辐角与哪个许用符号的辐角最接近，则将其判决为哪个许用符号。其另一种数学表述为

若
$$\frac{2m\pi}{M} - \frac{\pi}{M} < \angle y < \frac{2m\pi}{M} + \frac{\pi}{M}$$

则把 y 判为 $\hat{x} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\hat{m}\theta}$。

针对一个复电平的判决域如图3.17所示。

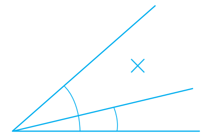

图 3.17　针对一个许用复电平（× 表示）的判决阈值

基于以上讨论，可以将此时的判决阈值描述为——从原点出发，辐角为$\dfrac{(2m+1)\pi}{M}$ $(m=0,\cdots,M-1)$ 的射线簇。每个复电平对应的判决域为一个锥尖在原点锥形，如图3.18所示。

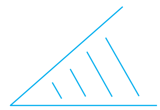

图 3.18　锥形的判决域

针对圆上均匀分布的复电平集合，在刻画完其判决域之后，分析其符号能量 E_s 和差错概率 P_b。此时，圆的对称性对于我们的讨论大有裨益。首先，此时的符号能量计算简单，即

$$E_\mathrm{s}=E(|x|^2)=A^2$$

因此，有 $A=\sqrt{E_\mathrm{s}}$。

在计算此种情况的差错概率之前，还要做一个准备工作，就是要注意无论发送哪个复电平，所产生的条件差错概率都是一样的。对于上述直观给予更严格的说明。

首先，在几何上每个复电平及其判决域为全等的锥形。还要进一步考察许用复电平叠加噪声后的分布。发送任意一个复电平，噪声都由其径向分量 $n_\parallel$ 和垂直分量 $n_\perp$ 组成，数学表达式为

$$n=(n_\parallel+\mathrm{j}n_\perp)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}$$

需要注意，$n_\parallel+\mathrm{j}n_\perp$ 与 $n_\mathrm{I}+\mathrm{j}n_\mathrm{Q}$ 具有完全一致的统计特性。为了证明这一点，还是采用复电平的二维向量等效表达式：

$$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} n_\mathrm{I}\\ n_\mathrm{Q}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}'=\begin{bmatrix} n_\parallel\\ n_\perp\end{bmatrix}$$

在此基础上，定义旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}(\beta)\triangleq\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

基于旋转矩阵，可以将 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$ 联系起来，具体如下：

$$\boldsymbol{n}'=\begin{bmatrix} n_\parallel\\ n_\perp\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_\mathrm{I}\\ n_\mathrm{Q}\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{R}(\beta)\boldsymbol{n}$$

旋转矩阵具有如下优良性质：

$$\forall\beta,\ \boldsymbol{R}^{-1}(\beta)=\boldsymbol{R}(-\beta)=\boldsymbol{R}^\mathrm{T}(\beta)$$

$\boldsymbol{n}$ 的概率密度分布可由如下分布函数给出：

$$p(n_\mathrm{I},n_\mathrm{Q})=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{n}^\mathrm{T}\boldsymbol{n}}{2\sigma^2}\right)$$

可以利用随机向量映射后的概率密度函数给出 $\boldsymbol{n}'$ 的概率分布：

$$\begin{aligned} p(n_{\|}, n_{\perp}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2 \det(\boldsymbol{R}^{-1}(\beta))} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{R}^{-1}(\beta)\boldsymbol{n}')^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}^{-1}(\beta)\boldsymbol{n}')}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_{\|}^2 + n_{\perp}^2}{2}\right) \end{aligned}$$

这样证明了 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$ 具有完全相同的统计特性。再加上判决域是全等的锥形，就可以得出结论：发送任意一个复电平符号，其条件差错概率都是相同的，如图3.19所示。

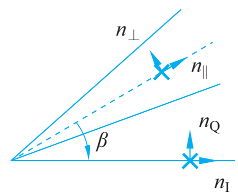

图 3.19　发送不同复电平符号的条件差错概率相同

由上述讨论可知，对于圆上均匀分布复电平集合，其差错概率 P_{e} 等于发送任意一个许用复电平符号的条件差错概率。那么选用一个最便于讨论的许用复电平符号，即 $x = \sqrt{E_{\mathrm{s}}}$，计算其条件差错概率，并且只讨论这一个点即可。当发送符号为 $x = \sqrt{E_{\mathrm{s}}}$ 时，根据其判决阈值将复平面划分为4个区域：

（1）正确判决的区域：y 落入该区域，则判决结果正确。

（2）向左上“出界”的区域 D_1：y 落入该区域，则判决结果错误。

（3）向左下“出界”的区域 D_2：y 落入该区域，则判决结果错误。

（4）D_1 和 D_2 重叠的区域 $D_1 \cap D_2$：划分这个区域是为了尽量避免重复计算差错概率。

上述4个区域在复平面上的直观表示如图3.20所示。

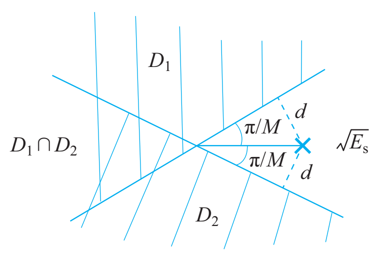

图 3.20　发送符号为 $x = \sqrt{E_{\mathrm{s}}}$ 时的判决区域划分

基于上述区域划分，可以把发送 $x = \sqrt{E_{\mathrm{s}}}$ 时的条件差错概率表示为

$$P_{\mathrm{e}} = 1 - P_{\mathrm{c}} = \Pr\{y \in D_1\} + \Pr\{y \in D_2\} - \Pr\{y \in D_1 \cap D_2\}$$

接下来逐一计算上述各个概率分量。仍将噪声分解为平行（亦称“径向”）和正交（亦称“垂直”）分量，即 $n_{\|}$ 和 $n_{\perp}$。显然，无论 $n_{\|}$ 多大，都不会引起误判，只有 $n_{\perp}$ 才会引起误判，如图3.21所示。同样，有之前讨论的结论，即 $n_{\|}$ 与 $n_{\perp}$ 相互独立，且它们都服从分布 $n_{\|} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，$n_{\perp} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。

由简单的三角运算可知，许用复电平符号 $\sqrt{E_{\mathrm{s}}}$ 距判决域边界的距离为

$$d = \sqrt{E_{\mathrm{s}}} \times \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

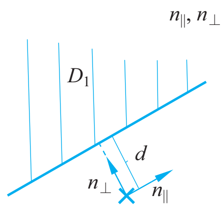

图 3.21　仅噪声的正交分量会引起误判

于是，就可以计算出接收复电平 y 落入区域 D_1 和 D_2 的概率分别为

$$\Pr\{y\in D_1\}=Q\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{M}\right)^2\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)$$

$$\Pr\{y\in D_2\}=Q\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{M}\right)^2\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)$$

显然，由概率论中的联合界公式可以得到差错概率的上界，即

$$P_e<\Pr\{y\in D_1\}+\Pr\{y\in D_2\}=2Q\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{M}\right)^2\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)$$

为了精准地分析圆上均匀分布复电平集合的差错概率，最后对 $\Pr\{y\in D_1\cap D_2\}$ 作界。当发生错判时，是有可能将 y 误判为其余 $M-1$ 个不正确的许用复电平中任一个的。而在所有 $M-1$ 个不正确的许用复电平中，由于 $-\sqrt{E_s}$ 是距离 $\sqrt{E_s}$ 最远的一个，因此最不可能被判决成的就是对面的 $-\sqrt{E_s}$。换言之，y 落入 $-\sqrt{E_s}$ 判决域，即 $D_1\cap D_2$ 的概率，一定小于误判为 $M-1$ 个不正确的许用复电平中任一个的概率的均值。其数学表达式为

$$\Pr\{y\in D_1\cap D_2\}<\frac{1}{M-1}P_e<\frac{2}{M-1}Q\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{M}\right)^2\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)$$

综合上面的讨论可以写出差错概率的上、下界：

$$\left(2-\frac{2}{M-1}\right)Q\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{M}\right)^2\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)<P_e<2Q\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{M}\right)^2\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)$$

这个概率的上、下界随着 M 的增大不断收紧。当 M 较大时，对于差错概率有如下的近似表达式：

$$P_e\approx 2Q\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{M}\right)^2\frac{E_s}{\sigma^2}}\right)$$

当信噪比 $\dfrac{E_s}{\sigma^2}$ 较大时，由格雷映射的性质可以进一步写出误比特率的近似表达式：

$$\begin{aligned}P_b&=\frac{2}{\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\sigma^2}}\cdot\sin\frac{\pi}{M}\right)\\&=\frac{2}{\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{\log_2 M\times E_b}{\sigma^2}}\cdot\sin\frac{\pi}{M}\right)\\&\approx\frac{2}{\log_2 M}Q\left(\frac{\pi}{M}\sqrt{\frac{E_b}{\sigma^2}\log_2 M}\right)\end{aligned}$$

其中最后一步近似利用了当 M 较大时 $\sin\dfrac{\pi}{M}\approx\dfrac{\pi}{M}$ 的性质。从上述分析也可以看出，圆上

的符号集合比正方形格点上的符号集合更难于分析，而灵活地运用各类概率界和渐近分析方法获得解析的结果是数字通信中一种典型的分析技巧。

3.2.4 高维空间上的电平信道

在本节已经把一维的电平传输拓展到了二维，即复电平传输。这种拓展还可以更进一步，即用电平向量（矢量）$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_K]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^k$ 承载信息。一种简单的实现方法是反复使用一个加性高斯信道 K 次，其中第 i 次发送分量 x_i，最后统一进行判决。而在一些实际通信系统中可以一次发送这个 K 维的电平矢量。将其经历的信道抽象成矢量加性高斯噪声信道，如图3.22所示。

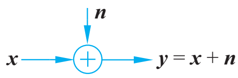

图 3.22 矢量加性高斯噪声信道

其数学模型可以表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$$

K 维高斯向量 $\boldsymbol{n}$ 服从如下概率分布：

$$p_{\boldsymbol{n}}(n_1,\cdots,n_K)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{K/2}}\exp\left(-\frac{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_K^2}{2\sigma^2}\right)$$

由以上概率密度函数的表达式也可以看到，各个分量 n_i 独立同分布，满足 $n_i\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$。

高维电平信道的最佳判决准则依然为MAP准则，在等概发送的情况下退化为ML准则和最小欧几里得距离准则。在矢量形式下推导如下：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}&=\underset{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\\&=\underset{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})\\&=\underset{\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\\&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\,\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{k/2}}\exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2}{2\sigma^2}\right)\\&=\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmin}}\,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2\end{aligned}$$

由上述推导结果可以看出，在 K 维欧几里得空间中，接收矢量 $\boldsymbol{y}$ 距离哪个许用电平矢量 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$ 的欧几里得距离最近，就判决为哪个许用电平矢量。

给定了一般的最小欧几里得距离判决准则之后，考虑一种典型的许用电平集合——正交电平集合，其由 K 个相互正交的矢量组成，即

$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{L}=\{[A,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},[0,A,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,[0,0,\cdots,A]^{\mathrm{T}}\}$$

正交电平集合的判决平面如图3.23所示，判决平面为任意两个正交矢量终点的中垂面。由立体几何知识可知，对于正交电平集合，所有的判决面交于一条线，因此判决域为一棱锥形区域。

对于正交电平集合的最佳判决也可由下式给出：

$$\hat{\boldsymbol{x}}=x_i,\ i=\underset{i}{\operatorname{argmax}}\ y_i$$

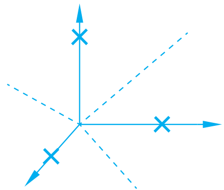

图 3.23　正交电平集合的判决平面与判决域

接下来分析用正交电平集合进行矢量电平传输的差错概率。类似于复平面上圆形电平集合的讨论，因存在对称性，只需要计算发送矢量 $[A, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$ 时候的条件差错概率即可。此时，条件差错概率 $P_{\mathrm{e}} = \Pr\{\exists i \neq 1, y_i > y_1\}$。为分析简便起见，先写出正确判决的概率：

$$P_{\mathrm{c}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_1 - A)^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 - \int_{y_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - A)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y\right]^{M-1} \mathrm{d}y_1$$

为了进一步简化表达式，在上述积分式中做变量代换，令 $u = \dfrac{y_1}{\sigma}$，$t = \dfrac{y}{\sigma}$。替换后可得

$$P_{\mathrm{c}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(u - \sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{\sigma^2}}\right)^2 / 2\right) [1 - Q(u)]^{M-1} \mathrm{d}u$$

由上式及 $P_{\mathrm{e}} = 1 - P_{\mathrm{c}}$，可得正交电平集合的差错概率为

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{e}} &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(u - \sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{\sigma^2}}\right)^2 / 2\right) [1 - Q(u)]^{M-1} \mathrm{d}u \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \left[1 - Q\left(u + \sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{\sigma^2}}\right)\right]^{M-1} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

上式中给出的是用正交电平集合进行矢量传输的误符号率。对正交电平符号集合，并不存在格雷映射。因此，错 1 个符号，对应的误比特数 j 为一个随机变量，其服从二项分布，即

$$P_j = \frac{1}{M-1} \binom{\log_2 M}{j}$$

由二项分布的对称性可得

$$E(j)/\log_2 M \approx \frac{1}{2}$$

因此，用正交电平集合进行矢量传输时，其误比特率 $P_{\mathrm{b}} \approx \dfrac{1}{2} P_{\mathrm{e}}$。

此外，针对用正交电平集合进行矢量传输的情况还有另一种简单的概率估界方法。如图3.24所示，正交电平集合中，任意两个许用电平矢量的欧几里得距离为 $2d = \sqrt{2}A$，一个符号到判决平面的距离为 $d = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$。

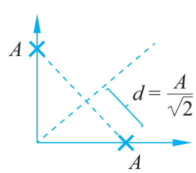

图 3.24　正交电平集合的成对差错概率示意图

给定一个发送符号，其接收后被误判成另一个符号的概率（又称为成对差错概率）为

$$Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)=Q\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{2\sigma^2}}\right)$$

注意，一个符号可以被错判成最多 $M-1$ 个其他符号。于是，由概率论中的联合界公式

$$\Pr\{D_1\cup D_2\cdots\cup D_{M-1}\}\leqslant\sum_{i=1}^{M-1}\Pr\{D_i\}$$

可得

$$P_{\mathrm{e}}<(M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{2\sigma^2}}\right),P_{\mathrm{b}}<\frac{M}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{2\sigma^2}}\right)$$

本节最后对最小欧几里得距离准则进一步讨论。欧几里得距离可以展开写为如下表达式：

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2^2=\langle\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle=\|\boldsymbol{y}\|_2^2+\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$$

由于上式的最小化只与 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$ 的选择有关，而 $\|\boldsymbol{y}\|_2^2$ 仅充当了一个常数，所以最小欧几里得距离准则可以写为

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}}\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$$

考虑一种特殊的矢量电平集合，即 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$，$\|\boldsymbol{x}\|_2$ 恒为一个常数。此时，上式的最小欧几里得距离准则可以进一步简化为

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmax}}\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$$

换言之，将接收电平矢量 $\boldsymbol{y}$ 向所有许用电平矢量 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$ 做投影。在哪个许用电平矢量 $\boldsymbol{x}$ 上的投影最大，就判决为哪个许用电平矢量。将这一最佳判决准则称为投影准则。在使用投影准则时，要注意其适用条件，即 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 恒为常数。

将投影准则应用于一个最简单的双极性电平集合。双极性电平集合就是一种最简单的矢量电平传输模型，其数学表达式满足 $\hat{\boldsymbol{x}}\in\{-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\}$。

投影准则可以简化表述如下：

（1）若 $\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\rangle>0$，则判定发送符号为 $\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$；

（2）若 $\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\rangle<0$，则判定发送符号为 $\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{a}$。

用双极性电平集合进行矢量电平传输，其差错概率 $P_{\mathrm{b}}=P_{\mathrm{e}}=Q\left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{\sigma^2}}\right)$。这一点不难理解：如果旋转坐标系，那么双极性电平集合与二元对称电平集合本质上是等效的。而对分量独立同分布的高斯矢量的任意旋转，都不改变其统计特性。因此，双极性矢量电平传输的误比特率与二元对称实电平传输完全一致。