

数学培优竞赛一讲一练

(九年级，第2版)

朱华伟 编著

清华大学出版社

北 京

内容简介

本书是《数学培优竞赛讲座(九年级,第2版)》(ISBN: 9787302648819)的配套练习册,可为读者提供自我检测.在内容上以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景,按照初中数学课程的进度分专题编写,力求与课堂教学同步.在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往数学奥林匹克前沿的捷径;在巩固深化初中数学教材知识的同时,拓展有关中考数学和竞赛数学的知识,介绍令人耳目一新的解题方法与技巧.本书有助于激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高学生中考数学和初中数学竞赛的成绩.

本书可供初中生及准备参加初中数学竞赛的学生使用,同时也适合中学数学教师、数学爱好者及高等院校数学教育专业的大学生、研究生和数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 九年级 / 朱华伟编著. —2版. —北京:清华大学出版社, 2024.1

ISBN 978-7-302-64882-6

I. ①数… II. ①朱… III. ①中学数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 213290 号

责任编辑:王 定

封面设计:周晓亮

版式设计:思创景点

责任校对:马遥遥

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社总机:010-83470000

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:河北鹏润印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:13.25

字 数:297千字

版 次:2021年8月第1版

2024年1月第2版

印 次:2024年1月第1次印刷

定 价:49.80元

产品编号:102854-01

前言

提升基础学科的科研水平，培养世界一流的拔尖创新人才，是推动人类文明进步和世界持续发展的重要动力。培养拔尖创新人才，一定要从娃娃抓起、从基础教育抓起。因此，重视并加强基础教育阶段的数学、物理等教育迫在眉睫，尤其是对于数理拔尖人才的早期识别和培养，适合的、特殊的成长机会及高水平的、有效的学习资源至关重要。

为了给对数学感兴趣的初中资优生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台，笔者以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，根据多年辅导初中数学资优生参加中考数学和初中数学竞赛积累的素材、经验和体会，编写了这套《数学培优竞赛讲座》（七年级、八年级、九年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（七年级、八年级、九年级）。

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分。

培优篇 按照初中数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往中考数学、著名重点高中自主招生和初中数学竞赛的捷径；在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野，提高思维能力；在有利于学生把初中数学教材知识巩固深化的同时，又恰到好处地为学生拓宽有关中考数学、自主招生和竞赛数学的知识。

竞赛篇 以初中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感。这类问题涉及的数学知识较少而包含的技巧性强，理解和解决时往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法相当困难，没有固定的模式可套。它要求学生去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、构造、对应、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法技巧，发现规律，找到解决问题的途径，这恰是数学竞赛试题应有的风格。

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下。

名人名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅。

知识方法述要：详细归纳相关的知识、方法与技巧，突出重点、难点和考点，对于初中数学教科书中没有的内容，尽可能给出新知识、新方法的产生背景。

例题精讲：含“分析”“解”和“评注”，从易到难，拾级而上，由基础题、提高题、综合题组成。部分例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，起到画龙点睛之效；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系。总之，评注一方



面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然。

同步训练：含选择题、填空题、解答题，遵循因材施教原则，同步训练题的设置兼顾多个层次的学习需求，分为 A，B，C 三层，便于分层教学，师生在实际教学中可按需取舍。例如，对于数学基础较好的学生，可以在完成 A 组和 B 组习题的基础上努力尝试完成 C 组习题；对于数学基础较弱的学生，可以在完成 A 组习题的前提下努力尝试完成 B 组习题。为方便自学，在书后每题均给出了详细解答过程。

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测。书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度。《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果。

本书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸显科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析解决问题能力的培养。希望通过学习本书，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创造，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而增强学习数学的兴趣。

数学大师陈省身为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词：“数学好玩。”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说：“数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！”

本书是初中生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点高中自主招生、破解中考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友。

在本书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢。由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正。

李华伟

2023 年 5 月于深圳中学新校区

目 录

培优篇/1

	试题	答案
第 1 讲 一元二次方程	1	99
第 2 讲 韦达定理	3	101
第 3 讲 可转化为一元二次方程的方程	6	103
第 4 讲 一元二次方程的整数根	8	105
第 5 讲 方程组	10	108
第 6 讲 列方程解应用题	13	110
第 7 讲 二次函数	16	113
第 8 讲 一元二次方程根的分布	19	116
第 9 讲 反比例函数	22	120
第 10 讲 函数的最值	26	123
第 11 讲 比例线段	28	126
第 12 讲 相似三角形	31	128
第 13 讲 几何变换	34	132
第 14 讲 圆的基本性质	37	136
第 15 讲 直线与圆	40	139
第 16 讲 圆与圆	43	142
第 17 讲 圆幂定理	46	146
第 18 讲 四点共圆	49	149
第 19 讲 三角形的四心	54	153
第 20 讲 锐角三角函数与解直角三角形	57	157
第 21 讲 几何与三角	60	161
第 22 讲 概率初步	63	164
第 23 讲 面积问题与面积方法	66	166
第 24 讲 正多边形与圆	70	170
第 25 讲 几何极值	73	174
第 26 讲 分类与讨论	76	178
第 27 讲 从简单情形看问题	78	182
第 28 讲 极端原理	81	184
第 29 讲 构造法	83	186



第 30 讲	组合几何	86	188
第 31 讲	完全平方数	88	191
第 32 讲	同余	90	194
第 33 讲	不定方程	92	197
第 34 讲	整数几何	94	200
第 35 讲	函数 $[x]$ 与 $\{x\}$	97	203



第 1 讲 一元二次方程

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 若 $b=a+c$, 则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一个实数根是_____.
2. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(m+1)x+(3m^2+4mn+4n^2+2)=0$ 有实数根, 则 $3m^2+2n^2=$ _____.
3. 若关于 x 的方程 $\frac{2k}{x-1}-\frac{x}{x^2-x}=\frac{kx+1}{x}$ 只有一个解, 则 $k=$ _____.
4. 若实数 x 使分式 $\frac{2x^2-9x-5}{x^2-25}$ 的值为零, 则 x 的值等于_____.
5. 若关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 与 $x^2+qx+p=0$ 只有一个公共根, 则 $(p+q)^{20}$ =_____.
6. 如果 m, n 都是正数, 关于 x 的方程 $x^2+mx+2n=0$ 和 $x^2+2nx+m=0$ 都有实数根, 则 $m+n$ 的最小值是_____.
7. 已知整系数多项式 x^3+ax^2+bx+c , 当 $x=a, x=b$ 时, 它的值分别为 a^3, b^3 , 并且 a, b, c 为互不相等的非零整数, 则 $a+b+c$ 的值是_____.
8. 已知关于 x 的方程 $(x-19)(x-97)=p$ 有实数根 r_1 和 r_2 , 那么方程 $(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的最小实根是_____.
9. 已知关于 x 的方程 $|x^2-2ax+b|=8$ 恰有三个实数根, 且它们是一个直角三角形的三边长, 那么 $a+b$ 的值是_____.
10. 已知 $m^4+16m+8(m$ 为正整数) 可以表示为两个或两个以上连续整数的乘积, 则 m 的最大值是_____.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 设 x, y, z 是不为 0 的相异实数, 且满足等式 $\frac{y+z}{y}=\frac{z+x}{z}=\frac{x+y}{x}$, 试证明: 此等式的



值不可能是实数.

12. 设 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 关于 x 的方程 $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ 与 $x^2 + 2cx - b^2 = 0$ 有一个相同的根, 求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

13. 设非零实数 p_1, p_2, q_1, q_2 满足关系式 $p_1 p_2 = 4(q_1 + q_2)$, 求证: 关于 x 的方程 $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ 与 $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ 中至少有一个方程有不等的实数根.

14. 小杰和小丁依下列规则玩游戏. 首先, 小杰写下一个二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$, 其中 a, b, c 都是正整数. 接着, 小丁可以随意地将这个方程式中的 0 个、1 个或 2 个“+”改为“—”. 如果改变后的方程式有两个整数根, 则小杰获胜; 如果改变后的方程式没有实数根或至少有一个根不是整数, 则小丁获胜. 请问: 小杰有没有必胜策略?

15. 已知 t 是一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的一个根, 如果正整数 a, b, m 使得等式 $(at + m)(bt + m) = 31m$ 成立, 求 ab 的值.

第2讲 韦达定理

一、填空题(每题5分,共50分)

1. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (k+1)x + k + 2 = 0$ 的两个实数根的平方和等于 6, 则 $k =$ _____.

2. 已知关于 x 的二次方程 $(ab-2b)x^2 + 2(b-a)x + 2a-ab=0$ 有两个相等的实数根, 那么 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ _____.

3. 已知 m, n 是不相等的实数, 关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的两根差与关于 y 的方程 $y^2 + ny + m = 0$ 的两根差的绝对值相等, 则 $m + n =$ _____.

4. 若 $a^2 + 3a + 1 = 0, b^2 + 3b + 1 = 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值是_____.

5. 设 $a^2 + 2a - 1 = 0, b^4 - 2b^2 - 1 = 0$, 且 $1 - ab^2 \neq 0$, 则 $\left(\frac{ab^2 + b^2 + 1}{a}\right)^{2000}$ 的值是_____.

6. 设 a 与 b 是方程 $x^2 + 2018x + 1 = 0$ 的两个相异根, c 与 d 是方程 $x^2 - 2022x + 1 = 0$ 的两个相异根, 则 $(a+c)(a-d)(b+c)(b-d)$ 的值是_____.

7. 设 a, b 是整数, 关于 x 的方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有一个根是 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, 则 $a + b =$ _____.

8. 若方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根 α, β 也是关于 x 的方程 $x^4 - px^2 + q = 0$ 的根, 则 $p + q =$ _____.

9. 已知关于 x 的方程 $m^2x^2 - (4m+3)x + 4 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 设 $S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, 则 S 的取值范围是_____.

10. 如果关于 x 的方程 $x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m = 0$ 的三根可以作为一个三角形的三边之长, 那么 m 的取值范围是_____.



二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 如果方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+px+q=0$ 有一个公共根,求以它们的相异根为根的二次方程.

12. 若 α, β 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根,也是关于 x 的方程 $x^6-px^2+q=0$ 的两根,试求 p, q 的值.

13. 若直角三角形的两条直角边都是整数,且是关于 x 的方程 $mx^2-2x+m+1=0$ 的根(m 为整数). 这样的三角形是否存在? 若存在,求出满足条件的所有三角形的三边长;若不存在,请说明理由.

14. 已知关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0$ 与 $x^2+cx+b=0$ 分别各有两整数根 x_1, x_2 与 x'_1, x'_2 , 且 $x_1x_2>0, x'_1x'_2>0$. 求证:

(1) x_1, x_2, x'_1, x'_2 均为负数;

(2) $b-1 \leq c \leq b+1$;

(3) 求 b, c 所有可能的值.

15. 定义:如果一个关于 x 的多项式经过合并同类项和按降幂(或升幂)排列后,相邻两项的符号相反,我们就说多项式在这两项间出现了一次符号变更. 例如,在多项式 $x^6 - x^5 + 2x^4 + x^2 - 1$ 中出现三次符号变更:在第一、二项之间;在第二、三项之间;在第四、五项之间.

定理:在关于 x 的二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是实数, $a \neq 0$) 的左边,

- (1) 如果没有符号变更,则该方程没有正根;
- (2) 如果有一次符号变更,则该方程有一个正根;
- (3) 如果有两次符号变更,则该方程没有正根或有两个正根.

请你证明这个定理.

第3讲 可转化为一元二次方程的方程

一、填空题(每题5分,共50分)

1. 方程 $x + \frac{1}{x-2} = 4\frac{1}{2}$ 的一个根是4,则另一个根是_____.
2. 方程 $\frac{x-2002}{2003} + \frac{x-2003}{2002} = \frac{2003}{x-2002} + \frac{2002}{x-2003}$ 的解是_____.
3. 解方程: $\frac{1}{x^2-10x-29} + \frac{1}{x^2-10x-45} - \frac{2}{x^2-10x-69} = 0$, 得 $x =$ _____.
4. 方程 $1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 2x + x^2$ 的解是_____.
5. 解方程: $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{4}{21}$, 得 $x =$ _____.
6. 解方程: $\sqrt{7x^2+9x+13} + \sqrt{7x^2-5x+13} = 7x$, 得 $x =$ _____.
7. 如果关于 x 的方程 $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 3px^2 - 9px + 2p^2 = 0$ 有且只有一个实数满足,则 p 的值为_____.
8. 解方程: $x^2 - x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)$, 得 $x =$ _____.
9. 解方程: $\sqrt{3x^2-18x+52} + \sqrt{2x^2-12x+162} = \sqrt{-x^2+6x+280}$, 得 $x =$ _____.
10. 方程 $(x^3 - 3x^2 + x - 2)(x^3 - x^2 - 4x + 7) + 6x^2 - 15x + 18 = 0$ 的全部相异实根是_____.

二、解答题(每题10分,共50分)

11. 解方程: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+2)^2$.

12. 解方程: $\frac{x^2+5}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+5} = \frac{10}{3}$.

13. 解关于 x 的方程: $\sqrt[3]{(x+a)^2} + 4\sqrt[3]{(x-a)^2} = 5\sqrt[3]{x^2-a^2}$ ($a \neq 0$).

14. 已知实数 a, b 和 c 满足 $\frac{a(b-c)}{b(c-a)} = \frac{b(c-a)}{c(b-a)} = k > 0$, 其中 k 为某个常数. 请问: 小于或等于 k 的最大整数是什么?

15. 关于 x 的方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两个不同的实数根, 求证: 关于 x 的方程 $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$ 有四个不同的实数根.

第4讲 一元二次方程的整数根

一、填空题(每题5分,共50分)

1. 已知关于 x 的方程 $(a^2-1)x^2-2(5a+1)x+24=0$ 有两个不等的负整数根,则整数 a 的值是_____.
2. 已知关于 x 的方程 $a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$ (其中 a 为非负整数)至少有一个整数根,那么 $a=$ _____.
3. 已知关于 x 的方程 $(k+1)x^2+(2k+1)x+k=0$ 只有整数根,且关于 y 的方程 $ky^2-3y+1=0$ 有两个实数根,则整数 $k=$ _____.
4. 若关于 x 的方程 $rx^2-(2r+7)x+(r+7)=0$ 的根是正整数,则整数 r 的值可以是_____.
5. 设关于 x 的方程 $x^2+(m+6)x+(m-3)=0$ 有两个不同的奇数根,则整数 m 为_____.
6. 已知关于 x 的方程 $rx^2+(r+2)x+r-1=0$ 有且只有整数根,那么有理数 $r=$ _____.
7. 已知关于 x 的方程 $x^2+(a-6)x+a=0$ ($a \neq 0$) 的两根都是整数,那么整数 a 的值是_____.
8. 设 p 为质数,关于 x 的二次方程 $x^2-2px+p^2-5p-1=0$ 的两个根都是整数,则 p 可能取的值有_____个.
9. 已知关于 x 的整系数二次方程 $x^2+ax+2=0$ 和 $x^2+bx+3=0$ 有一个相等的整数根,则关于 x 的二次方程 $x^2+abx-64=0$ 的较小根为_____.
10. 若 $1 \leq p \leq 20, 1 \leq q \leq 10$, 且关于 x 的方程 $4x^2-px+q=0$ 的两根均为奇数,则此方程的根是_____.

二、解答题(每题10分,共50分)

11. 关于 x 的方程 $kx^2-(k-1)x+1=0$ 有有理根,求整数 k 的值.

12. 当 b 为何值时, 关于 x 的方程 $x^2 - bx - 2 = 0$ 和 $x^2 - 2x - b(b-1) = 0$ 有相同的整数根? 并且求出它们的整数根.

13. 把关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的系数 p 及 q 每次加 1, 这样的步骤重复四次, 使五个方程都具有整数根. 请举出这样的实例.

14. 求所有的正整数 a, b, c , 使得关于 x 的方程 $x^2 - 3ax + 2b = 0, x^2 - 3bx + 2c = 0, x^2 - 3cx + 2a = 0$ 的所有根都是正整数.

15. 设 a 是大于零的实数, 已知存在唯一的实数 k , 使关于 x 的二次方程 $x^2 + (k^2 + ak)x + 1999 + k^2 + ak = 0$ 的两个根均为质数. 求 a 的值.

第5讲 方程组

一、填空题(每题5分,共50分)

1. 如果 $xy=1, xz=2, yz=3$, 那么 $x^2+y^2+z^2=$ _____.

2. 已知实数 x_0, y_0 是方程组 $\begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ y=|x|+1 \end{cases}$ 的解, 则 $x_0+y_0=$ _____.

3. 方程组 $\begin{cases} xy=9, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{3} \end{cases}$ 的解是_____.

4. 方程组 $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2-4xy+3y^2=-1 \end{cases}$ 的解是_____.

5. 已知正数 a, b, c 满足方程组

$$\begin{cases} a+b^2+2ac=29, \\ b+c^2+2ab=17, \\ c+a^2+2bc=26, \end{cases}$$

那么 $a+b+c$ 的值是_____.

6. 正数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 同时满足

$$\begin{aligned} \frac{x_2x_3x_4x_5x_6}{x_1} &= 1, \frac{x_1x_3x_4x_5x_6}{x_2} = 2, \frac{x_1x_2x_4x_5x_6}{x_3} = 3, \\ \frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{x_4} &= 4, \frac{x_1x_2x_4x_5x_6}{x_5} = 6, \frac{x_1x_2x_4x_5x_6}{x_6} = 9, \end{aligned}$$

则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ 的值为_____.

7. 已知 a, b, c 为互不相等的非零实数, 且存在实数 x, y 满足

$$\begin{cases} a^3+ax+y=0, \\ b^3+bx+y=0, \\ c^3+cx+y=0, \end{cases}$$

那么 $a+b+c$ 的值是_____.

8. 方程组 $\begin{cases} x-y=20, \\ \sqrt{x-3}-\sqrt{y+2}=3 \end{cases}$ 的解是_____.

9. 已知互不相等的实数 a, b, c 满足 $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = t$, 则 $t =$ _____.

10. 已知实数 a, b, c, d 互不相等, 且 $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = d + \frac{1}{a} = x$, 则 x 的值是_____.

二、解答题(每题 10 分, 共 50 分)

11. 解方程: $\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{4-x} = 3$.

12. 解方程组:
$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^5+y^5+z^5=3. \end{cases}$$

13. 解方程: $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 16$.



14. 求所有的实数 x , 使得 $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

15. 请问: 存在多少个有序三元实数组 (x, y, z) , 使得 $x + y^2 = z^3, x^2 + y^3 = z^4$ 且 $x^3 + y^4 = z^5$?

第6讲 列方程解应用题

一、填空题(每题5分,共50分)

1. 某村居民在第一年增加了 n 人,在第二年又增加了 300 人,也可以说居民人数在第一年增加了 300%,在第二年又增加了 $n\%$. 那么,该村现在有居民_____人.

2. 有一个凸 n 边形,如果它的对角线共有 119 条,那么这是_____边形.

3. 有一群蜜蜂,其半数的平方根只飞向茉莉花丛, $\frac{8}{9}$ 留在家里,还有 2 只去寻找荷花瓣里的雄蜂,这 2 只蜜蜂被荷花的香味吸引,傍晚时由于花瓣合拢,飞不出去了,则蜂群中有_____只蜜蜂.

4. 已知两个边长为 6 的正方形 $ABFE$ 和 $EFCD$ 拼成长方形 $ABCD$. 点 G 在线段 ED 上,连接 BG 交 EF 于点 H . 如果五边形 $CDGHE$ 的面积为 33,那么线段 BG 的长等于_____.

5. 如图 6-1 所示,等边 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 分别在三条互相平行的直线 l_1, l_2, l_3 上,其中 l_1, l_2 的距离为 1, l_2, l_3 的距离为 2, AC 与 l_2 相交于 D , 则 $BD =$ _____.

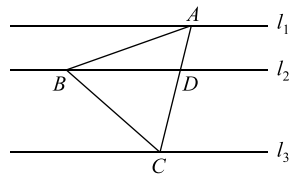


图 6-1

6. 化简: $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} =$ _____.

7. 一块场地,用 600 块正方形的砖铺成,如果把场地的面积扩大到比原面积的 2 倍还多 0.6 m^2 ,且正方形砖的边长增加 10 cm,则需要铺 540 块正方形砖,那么原场地的面积是_____ m^2 .

8. 甲、乙两队修建一条水渠. 甲先完成工程的 $\frac{1}{3}$,乙后完成工程的 $\frac{2}{3}$,两队所用的天数为 A ;甲先完成工程的 $\frac{2}{3}$,乙后完成工程的 $\frac{1}{3}$,两队所用天数为 B ;甲、乙两队同时工作完成的天数为 C . 已知 A 比 B 多 5, A 是 C 的 2 倍多 4,那么甲单独完成此项工程需要_____天.

9. 甲容器里有纯酒精 8 g,乙容器里有水 10 g,两容器均未盛满. 今把甲容器的酒精倒入乙容器若干克,再把乙容器中的混合液倒回甲容器一部分,这部分是从甲容器倒入乙容器克数的 2 倍. 这时,甲容器中酒精溶液的浓度为 60%,则从甲容器倒入乙容器的酒精约为_____ g.

10. 甲、乙两人分别从 A, B 两地同时相向而行,当甲走到一半路程时,乙尚距 A 地 120 km;当乙走到一半路程时,甲尚距 B 地 75 km,则 A, B 两地的距离为_____ km.



二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 如图 6-2 所示,有长为 24 m 的篱笆,一面利用墙(墙的最大可用长度为 11 m),围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃.

(1) 如果要围成面积为 45 m^2 的花圃,那么 AD 的长为多少米?

(2) 能否围成面积为 60 m^2 的花圃? 若能,请求出 AD 的长;若不能,请说明理由.

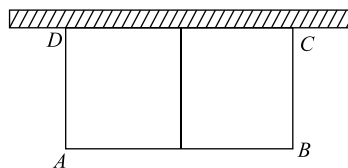


图 6-2

12. 有 $2n$ 名男生和 n 名女生参加象棋比赛,任两人都要互相比赛一场. 全部比赛结束后,发现比赛中没有平局,并且女生赢得的比赛总场数与男生赢得的比赛总场数之比为 $7:5$. 请问:共有多少名男生参加比赛?

13. 如图 6-3 所示, A, B 两港在大湖两岸, C 港在大湖北岸, A, B, C 三港恰构成一等边三角形的三个顶点. A 港甲船与 B 港乙船同时出发沿直线向 C 港匀速行驶,当乙船行驶出 40 km 时,甲、乙两船与 C 港位置恰是一个直角三角形的三个顶点;而当甲船行驶达 C 港时,乙船尚距 C 港 20 km. 问: A, B 两港之间的距离是多少千米?

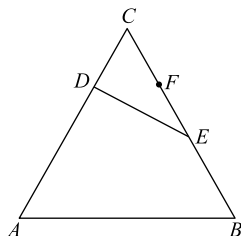


图 6-3

14. 有一长为 3.75 km 的队伍,沿公路前进.通讯员骑自行车从队伍末尾到队伍最前端传达命令,到最前端后立即返回队伍末尾;紧接着又去后方某地送信,信送到后立即返回队伍末尾.整个过程中队伍共前进 8 km.又已知通讯员送信来回所用的时间为传达命令来回所用时间的 3 倍,通讯员与队伍都是匀速前进.求通讯员行驶的全部路程.

15. 关于 x 的方程 $\left(x+1-\frac{a}{2}\right)(|4x-a|-2)=0$ 的三个解恰好是某个直角三角形三条边的边长,那么这个直角三角形面积的最大值是多少?